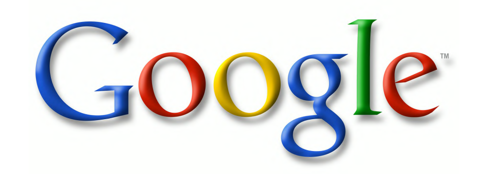
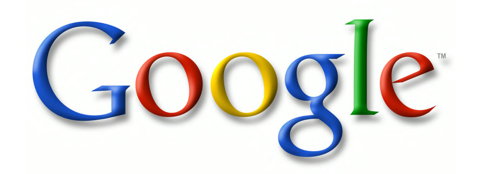
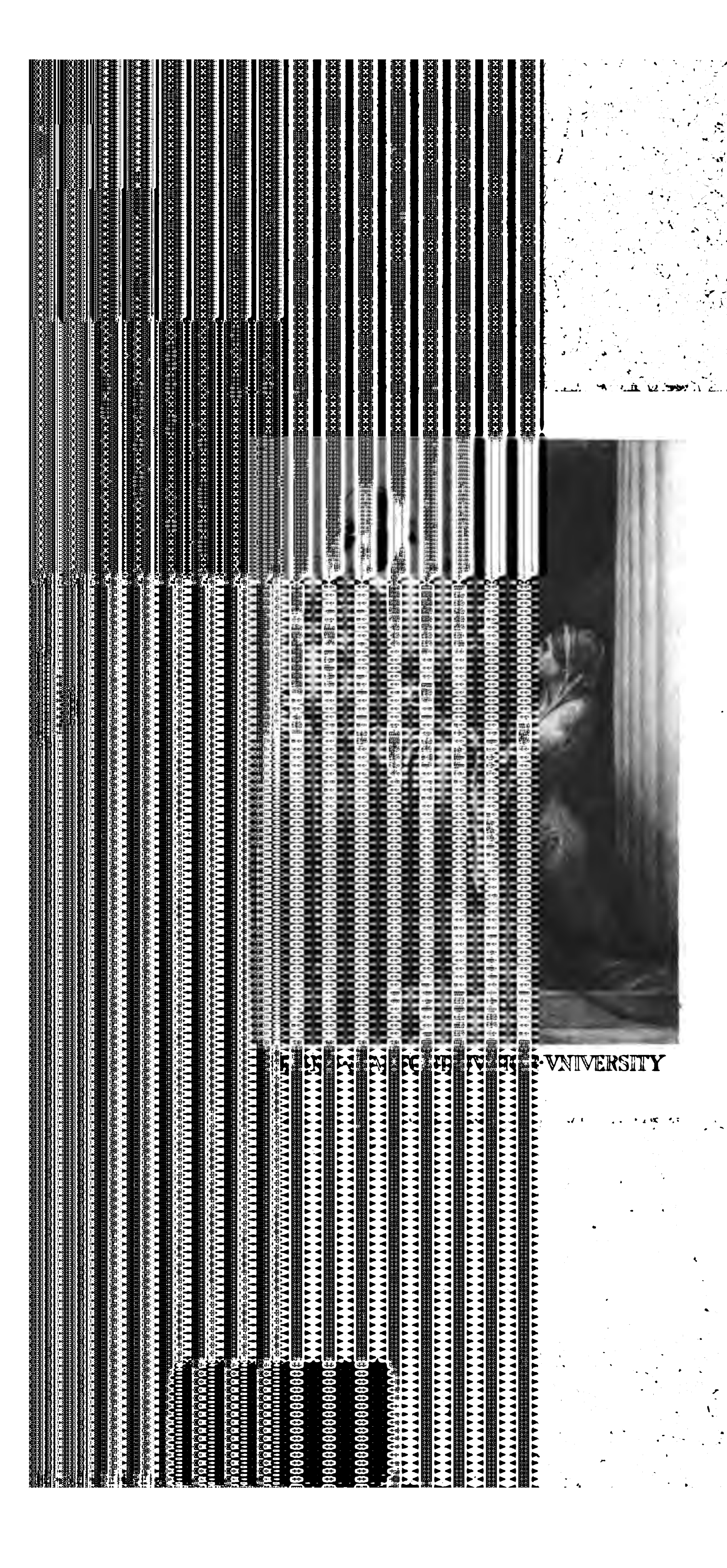
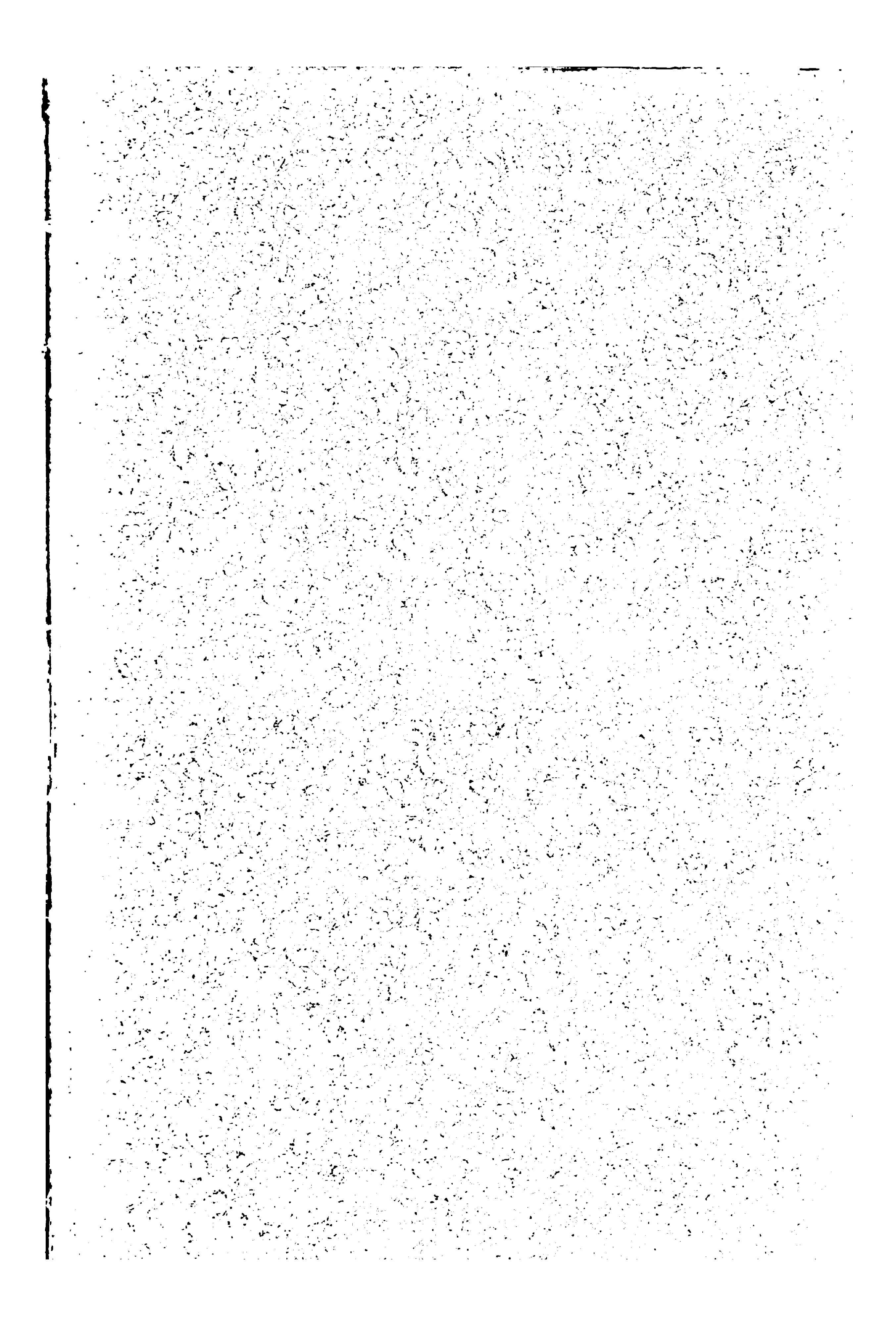
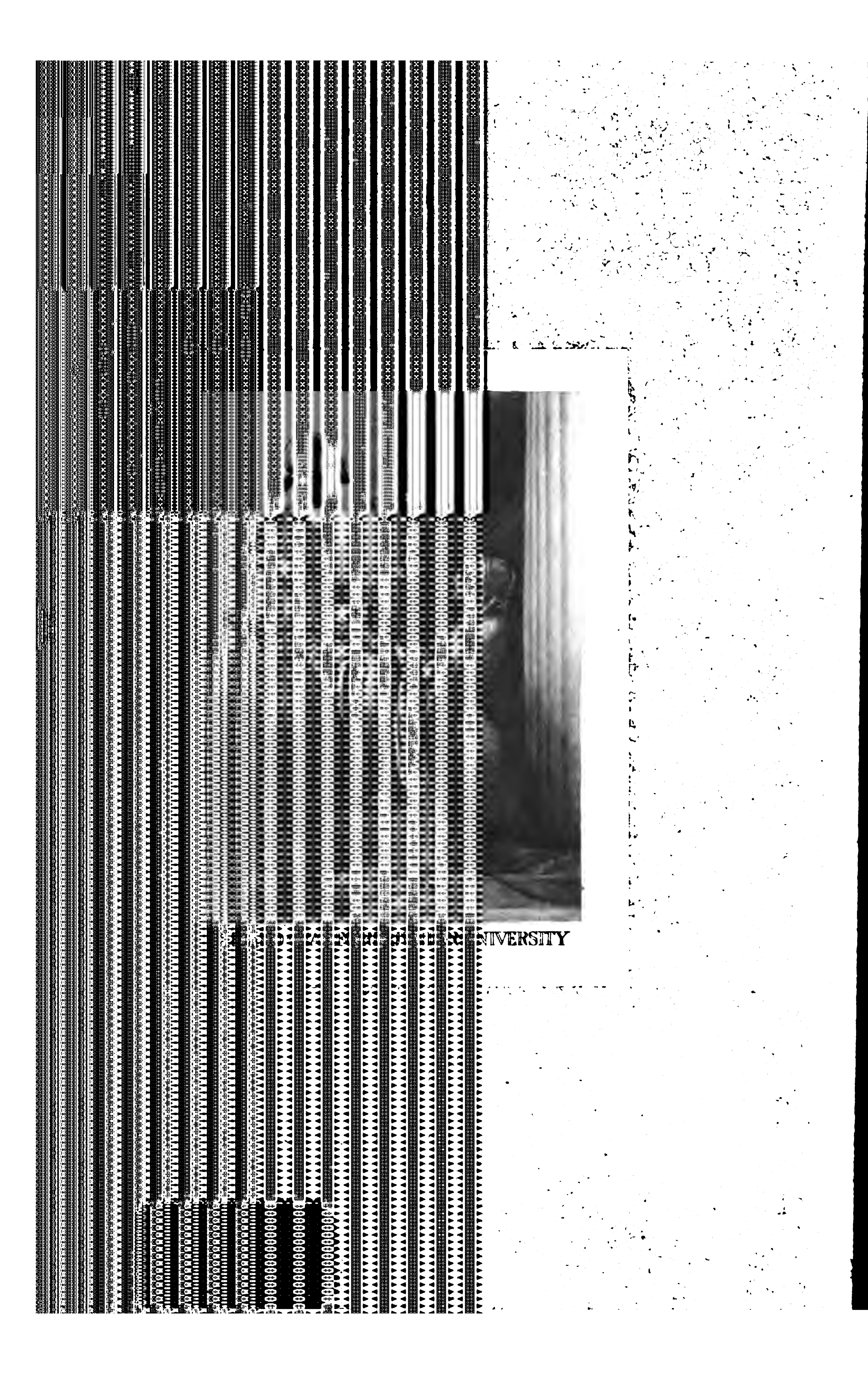


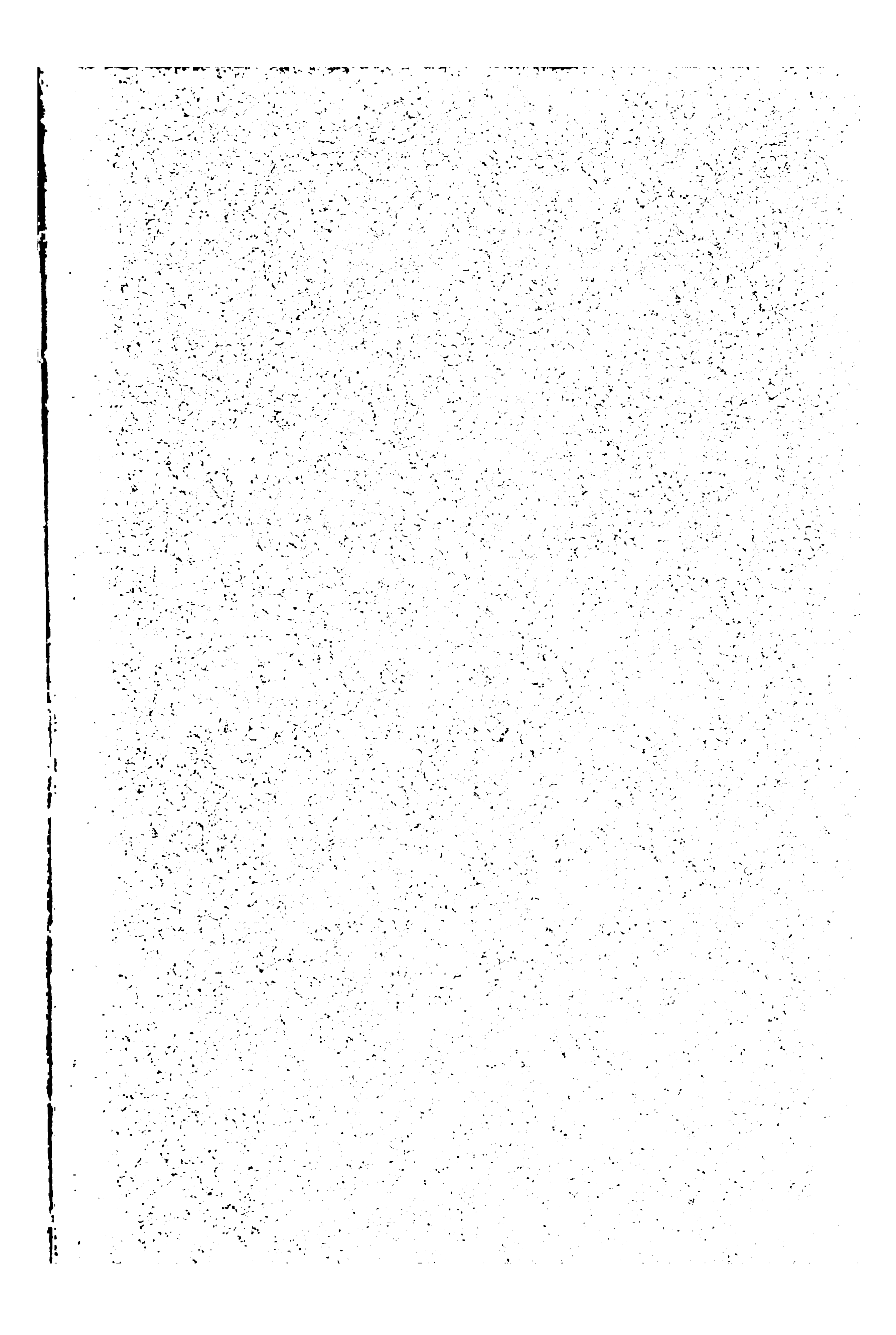












Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1905.



Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1905.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1905.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XIV.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Februar 1905.

1) Ueber Bestandteile der Salbeiöle.

In dem gewöhnlichen Salbeiöl aus Salvia officinalis, welches rechtsdrehend ist, sind als wesentliche Bestandteile nachgewiesen: d-Pinen, Cineol, Salven, Borneol, Thujon und zwar ist das Thujon, wie ich kürzlich gezeigt habe (Ann. d. Chem. 336, 270), in der α- und β-Modification, in der Hauptmenge aber als rechtsdrehendes β-Thujon in dem Oel enthalten.

Es war mir nun von Interesse, in dem Handelsbericht von H. Haensel in Pirna 1904, Quartal II, Seite 23, ein aus der breitblätterigen Form (grandiflora?) von Salvia hergestelltes Oel aufgeführt zu finden, für das Linksdrehung, [α_D = — 10,06° und d = 0.9084 bei 15°] angegeben wird.

Man konnte vermuten, daß man es hier mit einer neuen Quelle für das linksdrehende α-Thujon zu tun habe, auf dessen Reingewinnung man bisher allein auf das Thujaöl angewiesen ist.

Herr H. Haensel hatte die Freundlichkeit, mir 120 Gramm seines Präparates für eine Untersuchung zur Verfügung zu stellen, die aber, wie ich gleich bemerken will, zu dem unerwarteten Resultat geführt hat, daß dieses Oel aus der großblätterigen Salbei-Varietät, welche botanisch der gewöhnlichen, schmalblätterigen, so nahe steht, überhaupt keine Spur Thujon enthielt.

Zur Untersuchung kamen folgende Fraktionen, welche unter Atmosphärendruck nachstehende Siedepunkte aufwiesen:

1) bis 160°, 2) 160—175°), 3) 175—185°, 4) 185—215°.

Die erste Fraktion zeigte folgende Eigenschaften:

$d = 0{,}8755, \quad n_D = 1{,}4663, \quad \alpha_D = -18^{\circ}\,5'.$

Diese Fraktion gab sehr leicht ein Nitrosochlorid, welches bei der Behandlung mit Alkali in das bei 132° schmelzende Nitrosopinen überführbar war. Diese Fraktion bestand also wesentlich aus l-Pinen.

In der zweiten und dritten Fraktion ließ sich in dem um 175° siedenden Anteil mit Hülfe der Bromwasserstoff-Reaktion mit Leichtigkeit eine beträchtliche Menge Cineol nachweisen und mit seinen characteristischen Eigenschaften isolieren.

Die zweite Fraction reagierte außerdem mit salpetriger Säure in der Art des Phellandrens. Es gelang nur eine sehr kleine Menge des Reactionsproduct zu isolieren und durch Krystallisation aus Aceton in Form eines rein weißen, krystallinischen, bei 85—86° schmelzenden Körpers abzuscheiden, der sich aber nicht wie eines der bekannten Phellandrennitrite verhielt und über dessen Natur daher noch nichts ausgesagt werden kann.

Die vierte Fraktion endlich reagierte mit Semicarbazid. Das in reichlicher Menge erhaltene Semicarbazon schmolz beim Umkrystallisieren bei 236° und zeigte alle Eigenschaften des Camphersemicarbazons. In der Tat ließ es sich leicht unter Abscheidung von festem Campher zerlegen. Eine optische Bestimmung an dem Präparat zeigte aber, daß man es nicht mit gewöhnlichem, sondern mit Links-Campher zu tun hat.

$S = 1{,}5190, \; L(\text{Aether}) = 5{,}5182, \; d = 0{,}77 \; t = 18^{\circ} \; p = 21{,}58\%$

$l = 1 \text{ dm}, \; \alpha = -6^{\circ}\,30' \; [\alpha]_D = -39{,}11.$

Dieses reichliche Vorkommen von Links-Campher in dieser Modifikation des Salbeiöls ist recht bemerkenswert, da das Vorkommen von freien Links-Campher bisher nur im ätherischen Oel von Matricaria Parthenium L und im Oleum Tanaceti beobachtet wurde (Gildemeister & Hoffmann, S. 227).

2) Ueber den Phellandrengehalt des ätherischen Oels von Schinus molle L.

Nachdem ich nachgewiesen habe, (Ann. d. Chemie **336**, 9), daß man nicht nur physikalisch, sondern auch chemisch verschiedene Modificationen von Phellandren zu unterscheiden hat, ist es wünschenswert, daß für die schon bekannten Vorkommen dieses

Kohlenwasserstoffs festgestellt wird, mit welcher Modification man es zu tun hat.

Zur Untersuchung kam ein mir zur Verfügung stehendes Präparat von Phellandren aus Schinusöl, welches mir schon vor längerer Zeit durch die Firma Schimmel & Co. übermittelt wurde.

Das durch Destillation mit Wasserdampf frisch gereinigte Produkt zeigte folgende Eigenschaften:

$$d = 0.829 \text{ bei } 19^{\circ}, \ \alpha_D = +57^{\circ}.$$

Das Präparat bildete leicht ein Nitrit, aus welchem nach dem fraktionierten Krystallisieren aus Aceton hoch (bei 111°) und niedrig (bei c. 96°) schmelzende Anteile erhalten werden konnten. Das durch Spaltung mit Alkali daraus gewonnene Nitrophellandren gab bei der Reduction ein Keton, das in das Semicarbazon übergeführt wurde. Das Präparat färbte sich am Licht schwach gelblich und war nicht absolut einheitlich. Als Hauptbestandteil konnte aber daraus nach mehrfacher Krystallisation aus Methylalkohol das Semicarbazon des Carvotanacetons mit allen seinen charakteristischen Eigenschaften abgeschieden werden. Die gut krystallisierte Verbindung schmolz bei 172—173° und schied beim Erwärmen mit verdünnten Säuren leicht ein carvonartig riechendes Oel ab.

Aus diesem Befund ist der Schluß zu ziehen, daß der untersuchte Kohlenwasserstoff jedenfalls der überwiegenden Menge nach aus α-Phellandren besteht. Ob auch kleine Mengen von β-Phellandren darin enthalten sind, muß noch dahingestellt bleiben.

3) Ueber das Vorkommen eines Alkohols von den Eigenschaften des Pinocarveols im ätherischen Oel von Eucalyptus globulus.

In dem Handbuch von Gildemeister und Hoffmann über die ätherischen Oele findet man bereits die kurze Notiz, daß in hochsiedenden Anteilen des Oels von Euc. gl. der Ester eines Alkohols enthalten sei, der zwischen 215—220° siedet, $d = 0.96$, $[\alpha]_D = -17^{\circ}$ zeigt.

Herr Dr. Helle hatte schon vor längerer Zeit die Freundlichkeit, mir ein kleines Präparat dieses Alkohols zuzustellen, den er durch den Phtalsäureester hindurch gereinigt hatte und von von dem er folgende Eigenschaften angibt:

Siedepunkt 104—105° unter 9^{mm}, $d = 0,9704$, $n_D = 1,49505$ bei 20°. Für das Drehungsvermögen dieses Präparats wurde hier ermittelt in: 14%-iger ätherischer Lösung $[\alpha]_D = +21,06$.

Die folgende Untersuchung, an welcher sich Herr Dr. Friedrich Jäger mit großem Eifer beteiligt hat, wurde hier wesentlich mit einem von Schimmel & Co. bezogenen Rohöl durchgeführt, aus dem der Alkohol hier nach folgendem Verfahren abgeschieden wurde.

Je 25 Gramm der hochsiedenden Anteile des Eucalyptusöls wurden in der zehnfachen Menge absoluten Aethers gelöst und mit etwas mehr als 4 Gramm Natrium in dünner Drahtform zusammengebracht. Nach Verlauf von 4 oder 5 Tagen hat sich ein Natriumalkoholat gebildet. Nun wurden 25 Gramm Phtalsäureanhydrid zu der Masse gegeben und wieder einige Tage in der Kälte stehen gelassen. Dann wurde das entstandene Phtalestersaure Natrium durch Zusatz von Wasser in Lösung gebracht, aus der wässrigen Lösung die organische Säure durch Ansäuren mit Schwelfelsäure in Freiheit gesetzt, durch Kochen mit alkoholischem Kali verseift und der abgeschiedene Terpenalkohol mit Wasserdampf übergetrieben, ausgeäthert, mit Pottasche getrocknet und im Vacuum fractioniert.

Der so gewonnene reine Alkohol siedete unter 12^{mm} bei 92^{0} und zeigte folgende Eigenschaften: d = 0.9745, $n_D = 1.49630$ bei 20^{0}. [M = 45,59.] In 12,75%-iger Lösung $[\alpha]_D = -52,45$.

Ein auf entsprechendem Wege gütigst durch Herrn Dr. Ohligmacher in Leipzig dargestelltes Präparat zeigte in 13,97%-iger, ätherischer Lösung $[\alpha]_D = -58,92$.

Die Analyse ließ keinen Zweifel darüber, daß dem Alkohol die Zusammensetzung $C_{10}H_{15}OH$ zukommt.

Gefunden = 78,26, H = 10,92
Berechnet = 78,86, H = 10,62

Die Eigenschaften des natürlich vorkommenden Alkohols ähneln ganz außerordentlich denen des von mir 1893 auf synthetischem Wege dargestellten Pinocarveols (Ann. d. Chem. **277**, 149; **249**, 387).

Für diesen Alkohol fand ich: Siedepunkt 215—218^{0}, d = 0,978, $n_D = 1,49787$ bei 22^{0} [M = 45.55].

Nach der folgenden Untersuchung kann auch kaum mehr bezweifelt werden, daß man es in dem Naturproduct mit der optisch aktiven Modification des Pinocarveols zu tun hat. Es liegt hier also einer der wenigen Fälle vor, daß eine Verbindung der Terpenreihe früher synthetisch gewonnen als in ihrem natürlichen Vorkommen nachgewiesen ist.

Zur näheren Characterisierung wurde der Alkohol $C_{10}H_{15}OH$ durch Umsetzung mit Carbanil in das Phenylurethan

$C_{10}H_{15}O . CONHC_6H_5$ übergeführt. Diese Verbindung ließ sich durch Umkrystallisieren aus Methylalkohol in zwei Bestandteile zerlegen. Einen leichter löslichen, der nur in sehr geringer Menge auftrat und der bei 94—95° schmolz und einen in derben Krystallen vom Schmelzpunkt 82—84° krystallisierenden, der in überwiegender Menge entstand. Dies Hauptproduct wurde analysiert.

Berechnet für $C_{10}H_{15}O . CONHC_6H_5$: C = 75,21, H = 7,82, N = 5,18
Gefunden: C = 74,89, H = 8,04, N = 5,3
C = 75,00, H = 7,99, —

Das bei 82—84° schmelzende Urethan zeigte nur sehr schwaches Drehungsvermögen, nämlich in 23%-iger alkoholischer Lösung $[\alpha]_D = -4,108$.

Der Alkohol $C_{10}H_{15}OH$ wurde ferner der Oxydation unterworfen und zwar mit Chromsäure, einerseits in Eisessiglösung, andererseits ohne Anwendung eines Lösungsmittels bei Gegenwart von verdünnter Schwefelsäure. In beiden Fällen entstand die um zwei Wasserstoffatome ärmere Verbindung $C_{10}H_{14}O$, welche in alkoholischer Lösung mit Semicarbazid reagierte. Auch das Semicarbazon konnte durch Krystallisation in zwei Bestandteile zerlegt werden, nämlich 1) in leichter lösliche durchsichtige farblose Krystalle vom Schmelzpunkt 209—210°, als Hauptbestandteil und 2) in feine Nädelchen, welche in Methylalkohol und in Essigester ganz außerordentlich schwer löslich sind und erst bei etwa 320° unter Zersetzung schmolzen.

Analyse der Verbindung vom Schmelzpunkt 209—210°.

Berechnet für $C_{10}H_{14}N . NHCONH_2$: C = 63,68, H = 8,28, N = 20,32%,
Gefunden: C = 63,50, H = 8,48
C = 63,65, H = 8,40.

Eine Stickstoffbestimmung in der schwerer löslichen hochschmelzenden Verbindung ergab 20,44% N.

Beide Verbindungen leiten sich also von dem Oxydationsproduct $C_{10}H_{14}O$ ab, welches durch Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure unter teilweiser Verharzung aus den Semicarbazonen regeneriert werden kann.

Die so gewonnene Verbindnng $C_{10}H_{14}O$ wurde gleichfalls analysiert.

Berechnet für $C_{10}H_{14}O$: C = 79,92, H = 9,42%.
Gefunden: C = 79,60, H = 9,49%.

Das reine Product wurde ferner in ein Oxim verwandelt, das unter 20mm bei 140° siedete und beim starken Abkühlen zu einer strahlig krystallinischen Masse erstarrte, die in allen organi-

schen Solventien so löslich ist, daß sie nicht gut umzukrystallisieren war.

Im Folgenden seien die Eigenschaften des natürlichen Alkohols im Eucalyptusöl mit denen des synthetischen Pinocarveols zusammengestellt:

	Alkohol $C_{10}H_{15}OH$ aus Eucalyptusöl.	Pinocarveol aus Pinylamin
Siedepunkt	215—220°	215—218
d	0,9745	0,978
n_D	1,4963	1,4978
Schmelzpunkt des Urethans	82—84°	82—84°
	94—95°	95°.

Dazu ist noch zu bemerken, daß nach dem Vermischen der gleich schmelzenden Urethane verschiedener Herkunft keine Schmelzpunktsdepression eintrat.

Während die Alkohole sonach vollständige Uebereinstimmung aufweisen, traten bei dem Oxydationsproduct $C_{10}H_{14}O$, namentlich bezüglich der Eigenschaften des Oxims, merkliche Differenzen auf, die aber sehr wohl darin begründet sein können, daß die Verbindungen aus dem natürlichen Alkohol optisch activ, die aus dem synthetischen optisch inactiv sind. Die Untersuchung muß nach dieser Richtung noch weiter verfolgt und ergänzt werden.

4) Ueber das Semicarbazon des d- und l-Fenchons und das Vorkommen von l-Borneolester im Thujaöl.

Während das Sauerstoffatom des Camphers sich leicht zu Condensationsreactionen hergiebt — der Campher setzt sich z. B. sehr glatt mit Hydroxylamin und mit Semicarbazid um —, zeigt das Fenchon ein anderes Verhalten, obgleich bei sonst (wie man wenigstens bisher annimmt) ganz analogem Bau Campher und Fenchon sich nur durch die räumlich verschiedene Stellung einer Methylgruppe von einander unterscheiden:

C—CH_3 / H_2C / H_2C / $C(CH_3)_2$ / CO / CH_2 / CH

Campher

C / H_2C / H_2C / $C(CH_3)_2$ / CO / CH . CH_3 / CH

Fenchon.

Fenchonoxim bildet sich nur langsam und das Semicarbazon des Fenchons ist bisher auf directem Wege überhaupt noch nicht hergestellt worden.

Rimini gibt an (Gazz. chim. ital. **30**. I. 604) bei der Behandlung von Isopernitrosofenchon mit alkoholischer Semicarbazidlösung eine bei 186—187° schmelzende Verbindung von der Zusammensetzung des Fenchonsemicarbazons erhalten zu haben, sagt aber bei der Gelegenheit: „... analog wie beim Campher, Tanaceton und Menthon habe ich versucht, das Semicarbazon des Fenchons direct aus dem Fenchon herzustellen. Aber alle bisher dahin zielenden Versuche — sei es daß in der Kälte oder unter Erwärmen gearbeitet wurde — haben bisher ein negatives Resultat ergeben, indem es mir nicht gelungen ist, eine wahrnehmbare Menge des Products zu gewinnen: man erhielt immer unverändertes Fenchon wieder.“

Offenbar wird das glatte Eintreten der sonst für Ketone so characteristischen Reaction durch das Vorhandensein einer s. g. „sterischen Hinderung“ bedingt, welche man im gegebenen Fall nur im Gesamtbau des Moleküls und nicht allein in der Nachbarstellung des Methyls zum Carbonyl zu suchen hat, denn sowohl das 1.2-Methylcyklopentanon als auch das 1.2-Methylcyklohexanon setzten sich sehr schnell mit Semicarbazid um. (Vgl. Annal. d. Chem. **329**, 376; **331**, 322).

Die Annahme, daß sich das Semicarbazon des Fenchons auf directem Wege überhaupt nicht erhalten lasse, ist aber irrtümlich: der Prozeß der Bildung erfordert nur viel mehr Zeit als in analogen Fällen. Man erhält — vorausgesetzt, daß man vom reinem Fenchon ausgeht — die Verbindung ganz sicher unter folgenden Bedingungen.

Je 10 Gramm Semicarbazidchlorhydrat und 10 Gramm Natriumacetat werden in 20 ccm Wasser gelöst und mit dem Reagens eine Auflösung von 10 Gramm Fenchon in 50 ccm Alkohol vermischt. Man läßt die klare Lösung bei gewöhnlicher Temperatur mindestens zwei Wochen stehen. Gießt man die Flüssigkeit dann in viel Wasser, so scheidet sich ein Oel ab, welches eine Auflösung von Fenchonsemicarbazon in Fenchon vorstellt und beim Stehen an der Luft unter allmähligem Abdunsten des letzteren erstarrt. Viel zweckmäßiger und ökonomischer verfährt man indeß so, daß man nach der angegebenen Zeit das Reactionsproduct der Destillation mit Wasserdampf unterwirft. Es geht Alkohol und unverbrauchtes Fenchon über, das auf diese Weise wiedergewonnen wird, während in dem Destillationsrückstand das

in kochendem Wasser nicht ganz unlösliche Semicarbazon teils auskrystallisiert, teils in compacter Masse zurückbleibt. Die Ausbeute pflegt auch bei Verlängerung der Reactionszeit kaum mehr als 40—50 % vom Gewicht des angewandten Ketons zu betragen.

Das Fenchonsemicarbazon ist in heißem Methylalkohol ziemlich leicht und in kochendem Wasser merklich löslich und krystallisiert aus verdünnten alkoholischen Lösungen in außerordentlich scharf ausgebildeten, centimetergroßen, glänzenden dicken Prismen, welche bei etwa 174° zu sintern beginnen und bei 182 bis 183° glatt schmelzen. Durch Säuren wird die Verbindung leicht in die Componenten gespalten. Die Analyse zeigte, daß das Präparat eine normale Zusammensetzung besitzt.

0.2518 Gramm gaben 0.5798 CO_2 und 0.2084 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$: N.NHCONH$_2$	Gefunden
C. 63,06	62,80
H. 9,17	9,28

Reines Rechts- und Links-Fenchon verhalten sich in Bezug auf die Semicarbazonbildung vollständig gleich. Die Semicarbazone lenken das polarisierte Licht in demselben Sinne wie das Ausgangsketon ab und stellen Spiegelbildformen von einander vor.

Ein racemisches Gemisch von d- und l-Fenchonsemicarbazon zeigte einen Schmelzpunkt von 172—173° und geringeres Krystallisationsvermögen.

Bezüglich der Intensität des Drehungsvermögens wurden in methylalkoholischer Lösung (L) folgende Beobachtungen gemacht:

Für Rechts-Fenchonsemicarbazon:

$S = 1{,}433$, $L = 16{,}2406$, $d = 0{,}8120$, $t = 20^\circ$, $p = 8{,}108\,\%$, $l = 2$ dm, $\alpha = +6^\circ\,12'$,

$$[\alpha]_D = +47{,}04.$$

Für Links-Fenchonsemicarbazon:

$S = 0{,}3104$, $L = 5{,}3374$, $d = 0{,}807$, $t = 17^\circ$, $p = 5{,}506\,\%$, $l = 1$ dm, $\alpha = -2^\circ\,5'$,

$$[\alpha]_D = -46{,}88$$

$S = 1{,}1546$, $L = 13{,}3920$, $d = 0{,}8140$, $t = 17^\circ$, $p = 7{,}937\,\%$, $t = 2$ dm, $\alpha = -6^\circ\,3'$

$$[\alpha]_D = -46{,}82.$$

Aus reinem d- und l-Fenchon erhält man, wie gesagt, bei Einhaltung der oben angegebenen Bedingungen das durch seine Krystallisationsfähigkeit ausgezeichnete Semicarbazon mit allen oben präcisierten Eigenschaften. Geht man aber von einem Roh-Fenchon aus, das noch andere mit Semicarbazid reagierende Bestandteile enthält, so wird die Krystallisationsfähigkeit des Fen-

chonsemicarbazons und damit seine Reingewinnung erheblich beeinträchtigt.

Das zeigte sich zunächst als ein für rein gehaltenes l-Fenchon-Präparat aus Thujaöl mit Semicarbazid umgesetzt wurde.

Als Ouelle für Links-Fenchon dient bekanntlich bisher allein das Thujaöl, aus dessen zwischen 190—200° siedender Fraction es in der Weise gewonnen werden kann, daß man mit Hülfe von Salpetersäure oder Permanganat das Thujon fort oxydiert. (Vgl. Ann. d. Chem. 272, 102).

Als nun ein auf diese Weise gewonnenes, zwischen 191—193° siedendes und in der Kälte vollständig erstarrendes Präparat nach den obigen Angaben mit Semicarbazid behandelt wurde, resultierte ein aus Methylalkohol in Nadeln krystallisierendes Product, welches einen höheren Schmelzpunkt und geringere Löslichkeit in Methylalkohol zeigte, als das auf analogem Wege dargestellte Semicarbazon aus reinem d-Fenchon. Es gelang nun dadurch, daß man das in Nadeln krystallisierte Präparat sehr langsam aus viel Methylalkohol krystallisieren ließ, die ursprünglich erhaltenen nadelförmigen Krystalle in zwei Fractionen zu zerlegen, nämlich in kleine, durchsichtige, nunmehr in Methylalkohol außerordentlich schwer lösliche längliche Prismen vom Schmelzpunkt 238° und in viel leichter lösliche große tafelförmige Krystalle, welche bei 182—183° schmolzen und aus dem characteristischen, erst beschriebenen l-Fenchonsemicarbazon bestanden.

Es wurde darauf das hochschmelzende Semicarbazon in etwas größerer Menge dargestellt und durch Erwärmen mit Säuren zerlegt. Die Spaltung verlief sehr glatt. Als Spaltungsproduct trat ein im Kühlrohr sofort erstarrendes Keton von allen Eigenschaften des Camphers auf. Damit stimmt nun auch das Verhalten des hochschmelzenden Semicarbazons.

Setzt man zu einer Auflösung von 5 Gramm Semicarbazidchlorhydrat und 5 Gramm Natriumacetat in 10 ccm Wasser eine Lösung von 5 Gramm gewöhnlichem Campher in 25 ccm Alkohol, so bleibt die Flüssigkeit ganz klar. Schon nach 24 Stunden krystallisiert aber ein großer Teil des Camphers in Form seines Semicarbazons aus der Lösung aus: Campher bildet also viel schneller Semicarbazon als Fenchon. Das Camphersemicarbazon ist selbst in kochendem Methylalkohol schwer löslich (1 Gramm gebraucht etwa 30 ccm) und zeigt im übrigen die eben angegebenen Eigenschaften. Das Semicarbazon des d-Camphers ist bereits aus essigsaurer Lösung von Tiemann 1895 (Ber. chem. Ges. 28, 2182) gewonnen worden. Tiemann gibt den Schmelz-

punkt zu 236—238° an, was mit meinem Befunde vollkommen stimmt. Eine Angabe von Rimini (1900, Gazz. chim. it. 30. I. 603), nach der das Camphersemicarbazon bei 245° schmelzen soll, kann ich nicht bestätigen. Man erhält beim Umkrystallisieren des Camphersemicarbazons zwar auch kleine Mengen so hoch schmelzender Anteile. Diese sind aber kein reines Semicarbazon.

Das l-Fenchon aus Thujaöl enthielt demnach als Fremdbestandteil Campher. Eine optische Untersuchung des Campher-Präparats zeigte aber, daß nicht gewöhnlicher d-Campher, sondern Links-Campher vorliegt.

S = 0,2360, L (Aether) = 5,029; d = 0,729, t = 17°, p = 4,48 %
l = 1 dm, $\alpha = -1^{\circ} 18'$, $[\alpha]_D = -$ **39,9.**

Der bisher ganz übersehene Gehalt an l-Campher im l-Fenchon läßt sich nun weder durch fractionierte Destillation noch durch Ausfrieren des Präparats entfernen. Ebenso hat es sich als unmöglich erwiesen, den Campher durch Behandlung des Präparats mit rauchender Salpetersäure oder durch mehrtägiges Kochen mit verdünnter Salpetersäure zu zerstören. Es wird bei dieser Behandlung auch viel Fenchon vernichtet, ohne daß der Rest campherfrei wird. Dagegen kann man die Tatsache, daß sich Campher sehr viel schneller mit Semicarbazidlösungen umsetzt als Fenchon zur Eliminierung des Camphers und völliger Reindarstellung des Fenchons benutzen.

Zu dem Zweck läßt man eine alkoholische Lösung des campherhaltigen Fenchons mit einer Semicarbazidlösung von erst angegebener Concentration zwei Tage bei gewöhnlicher Temperatur stehen und destilliert dann Alkohol und nicht angegriffenes Keton mit Wasserdampf ab. Aus dem Rückstand krystallisiert Camphersemicarbazon, vermischt mit etwas Fenchonsemicarbazon aus und aus dem Destillat kann man das nicht angegriffene Fenchon wiedergewinnen, das gewöhnlich schon nach einmaliger Behandlung campherfrei ist, anderenfalls noch einmal derselben Operation unterworfen werden muß.

Der nunmehr feststehende Gehalt des l-Fenchons an Campher erklärt es, warum die Drehungsintensität des l-Fenchons von mir bei seiner Entdeckung etwas niedriger gefunden wurde als die von d-Fenchon, während die krystallisierten Derivate in dieser Hinsicht vollkommene Uebereinstimmung zeigten. Aus letzteren war der Fremdkörper durch Krystallisation eben zu entfernen gewesen, aus dem freien Fenchon aber nicht.

Es entsteht nun natürlich die Frage, ob der l-Campher schon als solcher im Thujaöl neben l-Fenchon und l-Thujon enthalten

ist, oder erst durch die Manipulation der Oxydation in das Präparat hineinkommt. Ersteres war von vornherein unwahrscheinlich, denn anderenfalls hätte mir bei der neuerlichen ausführlichen Untersuchung über das Thujon des Thujaöls (Ann. d. Chem. **336**, 258), bei welcher die Behandlung der um 200° siedenden Bestandteile des Rohöls mit Semicarbazid eine so wesentliche Rolle gespielt hat, das Auftreten von Camphersemicarbazon nicht wohl entgehen können. Neuerdings angestellte Versuche, bei deren Durchführung mir Herr Dr. E. Böcker wieder behülflich gewesen ist, haben ferner gezeigt, daß sich auch aus der zwischen 205—220° siedenden Fraction des Thujaöls (Siedepunkt des Camphers 210°) bei directer Behandlung mit Semicarbazid wohl Semicarbazon des α-Thujons, nicht aber Camphersemicarbazon abscheiden läßt.

Dagegen hat sich die Vermutung bestätigt, daß im rohen Thujaöl Borneol, beziehungsweise Ester des l-Borneols enthalten sind, wie solche bereits in verschiedenen ätherischen Oelen beobachtet wurden (vergl. Gildemeister und Hoffmann, Die ätherischen Oele, Seite 206) und daß diese bei der zur Herausarbeitung des Fenchons notwendigen oder wenigstens bisher geübten Behandlung des Oels mit Oxydationsmitteln verseift werden, während gleichzeitig das l-Borneol in l-Campher übergeht.

Die zwischen 205—220° siedende Fraction des Thujaöls wurde in einer kupfernen Blase einige Stunden mit Kalilauge gekocht, die flüchtigen Bestandteile mit Wasserdampf abgeblasen, der alkalische Rückstand durch Ausäthern von neutralen Producten befreit, dann angesäuert und wieder mit Aether ausgezogen. In den Aether gingen organische Säuren vom Geruch höherer Fettsäuren. Damit war der Estergehalt in der betreffenden Thujaölfraction dargetan. Nun wurde ein Teil der mit Wasserdampf nach dem Verseifen abgeblasenen Anteile mit Semicarbazid behandelt. Es konnte Thujon-Semicarbazon, nicht aber Camphersemicarbazon im Reactionsproduct aufgefunden werden. Nachdem jedoch ein anderer Anteil derselben neutralen Fraction einige Stunden mit so viel 5%-iger Permanganatlösung durchgeschüttelt worden war, daß die Rotfärbung bestehen blieb, konnte aus dem wiederum mit Wasserdampf abgeblasenen Product nach der Behandlung mit Semicarbazid nunmehr mit Leichtigkeit die Bildung von Camphersemicarbazon (Schmelzp. 236°) nachgewiesen werden.

Damit dürfte genügend sicher gestellt sein, daß die Quelle für das Auftreten von l-Campher im l-Fenchon aus Thujaöl im

Vorhandensein von l-Borneolester in diesem Oel zu suchen ist.

5) Ueber Darstellung und Verhalten von Methyl(1)-Phenyl(3)-hexen.

Die Darstellung eines phenylierten Cyklohexens hat Herr Kaschinsky auf meine Veranlassung unternommen, um den Einfluss der Phenylgruppe auf das allgemeine Verhalten der hydrierten cyclischen Verbindungen zu untersuchen und um eventuell einen Weg zur Gewinnung phenylierter Adipinsäuren zu eröffnen. Ein bequemes Mittel für den Zweck bot die Anwendung der Grignardschen Reaction auf das zugängliche 1.3-Methylhexanon. Aetherische Lösungen aequimolekularer Mengen von $BrMgC_6H_5$ und Methylhexanon wurden 1 bis $1^1/_2$ Stunden erwärmt, nach beendeter Reaction das Product mit Eiswasser durchgeschüttelt und mit Essigsäure angesäuert. Die von der wässrigen Schicht getrennte ätherische Lösung wurde über Pottasche getrocknet und dann der Aether abdestilliert. Der bald erstarrende Rückstand wurde durch fractionierte Krystallisation aus Alkohol gereinigt.

Neben Diphenyl und ungesättigten Kohlenwasserstoffen ließ sich, und zwar als schwerlöslichster Anteil, eine in reinem Zustand bei 124—125° schmelzende Verbindung isolieren, für welche durch die Analyse die Zusammensetzung $C_{13}H_{17}OH$ ermittelt wurde und die auf Grund ihrer Bildungsweise als der Alkohol

```
          CH3
          |
          CH
         /  \
     H2C      CH2
      |        |     OH
     H2C       C  /
         \    /   \
          CH2      C6H5
```

angesprochen werden muß.

Der phenylierte Alkohol ist in organischen Lösungsmitteln leicht löslich und mit Wasserdampf flüchtig. Durch Erwärmen mit dem doppelten Gewicht Chlorzink bis auf 150° wurde ihm Wasser entzogen, das nun entstandene Product mit Wasserdampf abdestilliert, über Pottasche getrocknet und im Vacuum fractioniert.

Die Hauptfraction ging bei 35^{mm} zwischen 154—155° über. Diese dann nochmals über Natrium destillierte Fraction siedete bei gewöhnlichem Druck bei 258—260° und zeigte d = 0,960 bei 22,5°. Die Analyse des Products stimmte auf die Formel $C_{13}H_{16}$.

Einen Kohlenwasserstoff nicht nur von dieser Zusammensetzung, sondern auch von entsprechendem Bau, hat schon vor einiger Zeit auf ganz anderem Wege Knoevenagel erhalten (Ann. d. Ch. **303**, 263). Er giebt für die Verbindung den Siedepunkt 248—252° und d = 0,9581 bei 22° an.

Aus dem obigen Alkohol können durch Wasserabspaltung zunächst die beiden Kohlenwasserstoffe:

```
        CH3                         CH3
        |                           |
        CH                          CH
       /  \                        /  \
   H2C     CH          und     H2C     CH2
    |      ||                   |      |
   H2C     C.C6H5              H2C     C.C6H5
       \  /                        \  //
        CH2                         CH
```

entstehen. Es ist aber auch möglich, daß eine Bindungsverschiebung der Doppelbindung nach 1.2 während der Reaction stattfindet.

Um den erhaltenen Kohlenwasserstoff näher zu characterisieren, wurde er nach dem üblichen Verfahren an Nitrosylchlorid addiert.

Die leicht entstehende Verbindung $C_{13}H_{16}.NOCl$ ist unlöslich in Methylalkohol und wurde aus Chloroform unter Zusatz dieses Alkohols umkrystallisiert. Das Nitrosochlorid schmolz unter Zersetzung bei 124—127°.

Zum Zweck der Chlorwasserstoff-Entziehung wurde das Nitrosochlorid mit Natriummethylat erwärmt. Die Reaction verläuft sehr langsam und es muß bis zu ihrer Beendigung lange erwärmt werden. Das bei der Umsetzung erhaltene Product ergab bei der Analyse Zahlen, welche gut für ein Oxim $C_{13}H_{14}NOH$ stimmten. Es gelang aber nicht, die Verbindung in deutlich krystallisierter Form zu erhalten, jedoch konnte sie durch fractioniertes Fällen aus methylalkoholischer Lösung in zwei verschieden schmelzende Fractionen zerlegt werden, welche die Schmelzpunkte 145—149° und 102—106° aufwiesen. Ob man es hier mit stereoisomeren Formen desselben Oxims zu tun hat, oder ob chemisch

isomere Verbindungen vorliegen, welche ihre Entstehung dann dem Umstand verdanken würden, daß der Ausgangskohlenwasserstoff schon ein Gemenge der erst schon als möglich bezeichneten Isomeren vorstellt, das muß noch einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Bei der Zerlegung des Oxims mittelst verdünnter Schwefelsäure wurde ein mit Wasserdampf sehr schwer flüchtiges, krystallinisches Keton $C_{13}H_{14}O$ erhalten, das in der Hauptmenge bei 41—44°, also auch nicht ganz scharf, schmolz, aber bei der Analyse gut stimmende Zahlen lieferte. Das Semicarbazon dieses Ketons schmolz bei 177—180°.

Die Oxydation dieses Ketons führte nicht zu einer phenylierten Fettsäure, sondern es entstand dabei viel Benzoësäure: ein großer Teil der Verbindung war also nach erfolgter Ringsprengung in einfachere Bestandteile zerfallen. Es läßt sich jedoch erwarten, daß, wenn man das Keton erst zu der vollkommen gesättigten Verbindung reduciert, es gelingen wird, die Oxydation zu einer Säure mit gleichem Kohlenstoffgehalt durchzuführen.

6) Ueber Bromsubstitutionsproducte des Cyklohexanons und Cyklopentanons.

Brom wirkt sehr energisch auf Cyklohexanon ein und je nach den angewandten Versuchsbedingungen entstehen verschiedene Producte. Am glattesten verläuft der Proceß, wenn man folgende Verhältnisse wählt.

Je 5 Gramm Cyklohexanon werden in einer Kältemischung gut abgekühlt und anfangs langsam, dann schneller 24 Gramm Brom in das Keton eingeträufelt, d. i. auf 1 Mol. $C_6H_{10}O$ läßt man 6 Atome Brom einwirken. Es erfolgt bald eine stürmische Entwicklung von Bromwasserstoff, die man zuletzt am besten unter Belichtung in directem Sonnenlicht zu Ende gehen läßt. Nach einigen Stunden ist der Gefäßinhalt zu einer etwas dunkel gefärbten Krystallmasse erstarrt, aus der man anhaftendes Brom und Bromwasserstoff durch Waschen mit etwas Alkohol, dem schweflige Säure zugesetzt ist, entfernt. Das abgepreßte Product wird aus wenig Essigester umkrystallisiert, in großen farblosen tafelförmig ausgebildeten bei 119—120° schmelzenden Krystallen erhalten.

Aus den Mutterlaugen krystallisieren etwas niedriger (112 bis 113°) schmelzende Krystalle aus.

Die Verbindung erwies sich als ein Tetrabromid $C_6H_6Br_4O$ oder $C_6H_8Br_4O$, obgleich nur 3 Moleküle Brom zu ihrer Bildung

aufgewendet wurden. Die bei der Reaction auftretende Bromwasserstoffsäure scheint sich demnach bei der Entstehung der Substanz zu beteiligen. Man würde das unter der Annahme verstehen können, daß das Cyclohexanon in der Enolform, also als ungesättigte Verbindung reagiert und als solche bei der Reaction freiwerdende Bromwasserstoffsäure addiert. Das Verhalten des Bromids spricht allerdings mehr für die Formel $C_6H_6Br_4O$.

Erhitzt man nämlich die reine Verbindung im offenen Gefäß auf 120—130°, so entweicht stürmisch Bromwasserstoffgas. Läßt man die Reaction möglichst vollständig zu Ende gehen, so hinterbleibt ein beim Abkühlen nach einiger Zeit erstarrendes Oel. Die durch Destillation mit Wasserdampf gereinigte und umkrystallisierte Verbindung zeigte einen Schmelzpunkt von 55—56°, einen Bromgehalt von 63,24% Br und erwies sich identisch mit dem Bibromphenol

OH

Br Br

Dieser Abbau des Cyklohexanons zu einem Phenol kann also als eine gewisse Umkehr der Sebatier'schen Reaction betrachtet werden, mittelst derer man vom Phenol zu dem völlig hydrierten Keton gelangen kann.

Wenn man die Erwärmung des Hexanontetrabromids eher unterbricht als die Bromwasserstoff-Entwickelung völlig aufgehört hat, so kann man die Bildung von zwei gut characterisierten Zwischenproducten beobachten, die neben Bromphenol auftreten und von diesem durch ihre Unlöslichkeit in Natronlauge getrennt werden können. Das eine dieser Producte läßt sich aus Alkohol leicht umkrystallisieren und wird aus diesem Lösungsmittel in durchsichtigen, bei 72—74° schmelzenden Prismen erhalten, deren Bromgehalt zu 71,97% ermittelt wurde. Ein Tribromid $C_6H_5OBr_3$ würde 72,07% Brom verlangen. Wird dieses Tribromid für sich erhitzt, so erhält man ebenfalls 2,6 Bibromphenol.

Das zweite Nebenproduct, dessen Auftreten mit dem Tribromid stets gleichzeitig beobachtet wurde, ist durch seine große Schwerlöslichkeit in Alkohol ausgezeichnet. Es gelang aber, diese Substanz aus heißem Eisessig zu krystallisieren, aus dem sie in Form kleiner Nädelchen herauskommt, welche bei 189—193° schmelzen. Möglicher Weise hat man es hier mit einer Verbin-

dung zu tun, welche durch Zusammentritt zweier Moleküle entstanden ist.

In ganz anderem Sinne, wie beim trockenen Erhitzen, wird das Tetrabromcyklohexanon verändert, wenn die Substanz in fein verteiltem Zustande mit Natronlauge digeriert wird. Sie geht dabei unter spontaner Erwärmung und schwacher Braunfärbung in Lösung. Phenolartige Zersetzungsproducte treten dabei aber höchstens spurenweise auf. Als Hauptproduct der Reaction finden sich schlecht characterisierte Verbindungen von saurer Beschaffenheit vor, die ihre Entstehung unzweifelhaft einer vorangegangenen Ringsprengung der cyclischen Verbindung verdanken dürften.

Das Cyklopentanon reagiert mit Brom unter den angegebenen Bedingungen genau wie das Hexanon. Anwendung von 3 Mol. Brom führt auch hier zu einem in großen durchsichtigen Prismen krystallisierenden Tetrabromid vom Schmelzpunkt 101—102°. Beim Erhitzen für sich liefert dies Bromid ein mit Wasserdampf schwer flüchtiges Oel, das durch Natronlauge unter starker Violett- oder Grünfärbung in Lösung gebracht werden kann. Das Tetrabromid selbst wird durch Natronlauge gleichfalls unter Entstehung tief gefärbter Lösungen verändert.

Bei der Untersuchung der besprochenen Bromverbindungen ist mir Herr Dr. Adolf Kempe in dankenswerter Weise zur Hand gegangen.

Ueber Wirkungen des Gebirgsdruckes im Untergrunde in tiefen Salzbergwerken.

Von

A. von Koenen.

Hierzu 2 Tafeln.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Januar 1905.

Seit etwa 20 Jahren habe ich in einer Reihe von Aufsätzen, welche größtentheils im Jahrbuche der Kgl. Preußischen Geologischen Landes-Anstalt in Berlin veröffentlicht sind, das Verhalten der Dislokationen oder Schichtenstörungen im nordwestlichen Deutschland geschildert, wie es an der Tagesoberfläche eben in Erscheinung tritt, die Richtungen, welche sie hauptsächlich einnehmen, die Zeiten ihrer Entstehung und ihre Wirkung auf die Gebirgsbildung, sowie endlich ihre Erstreckung über größere Landflächen; diese letzten Punkte habe ich auch in einer kurzen Mittheilung in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaft 1886 Nr. 6 S. 196 zusammengefaßt, habe aber in diesen Aufsätzen vermieden, auf das Verhalten der Störungen im Untergrunde weiter einzugehen, da hierfür thatsächliche Beobachtungen fast gar nicht vorlagen. Inzwischen sind nun durch verschiedene Bergbau-Unternehmungen auf Kalisalze Aufschlüsse bis zu bedeutender Tiefe hergestellt worden, welche ich genauer verfolgen konnte und jetzt schildern möchte, soweit ich dazu Ermächtigung habe, da sie größeres Interesse darbieten.

Im Jahre 1895 wurde nördlich von Klein-Freden, gegen 200 m östlich der Bahnlinie nach Alfeld, in der Leinethal-Antiklinale ein Bohrloch abgeteuft auf einem gegen 20 m hohen Buntsandstein-Rücken, welcher sich nach Süden allmählich senkt und gegen die Nordwest-Südost laufenden Bergzüge der Gegend auffällig diver-

girt, und auch der Buntsandstein desselben nimmt ein südliches Streichen und östliches Einfallen an.

Ein Profil des Bohrloches veröffentlichte Kloos in einem Aufsatze „die tektonischen Verhältnisse des norddeutschen Schollengebirges auf Grund der neuesten Tiefbohrungen im Leinethal und bei Hannover“ [1]), indem er angab, daß unter 173 m Buntsandstein und 112 m Gyps, Anhydrit und Salzthon bis zu 718 m Tiefe jüngeres Steinsalz und bis zu 1000 m älteres Steinsalz angetroffen worden wären mit einem Einfallen von 45 bis 50 Grad, soweit solches an den Bohrkernen zu ermitteln gewesen wäre, im jüngeren Steinsalz aber neben schwächeren Einlagerungen solche von 25,5 m, resp. 32 m und 12,5 m von Carnallit, sowie von 28,5 resp. 20,5 m Salzthon.

Etwa 1200 m südöstlich von diesem Bohrloch, an der Straße nach Winzenburg, am Eingange des Waldes wurde dann von Seiten der preußischen Bergbehörde ein Bohrloch niedergebracht, welches folgende Schichten mit ca. 60 Grad Einfallen antraf:

Unterer Buntsandstein	bis	428,30 m
Rothe Schieferthone mit Gyps	„	499,60 m
Rother und blauer Thon	„	540,— m
Anhydrit mit Steinsalz	„	547,50 m
Rothe Letten mit Steinsalz	„	581,— m
Steinsalz mit Thon	„	640,— m
Steinsalz, oben und unten mit Anhydrit .	„	675,60 m
Röthliches und weißes Steinsalz	„	832,— m
Anhydrit	„	914,30 m
Grauer Thon	„	918,44 m
Carnallit	„	932,— m
Aelteres Steinsalz	„	1131,50 m.

Dieses Profil ist jedenfalls von dem von Kloos mitgetheilten gänzlich verschieden, aber von dem letzteren weicht auch das Profil erheblich ab, welches Kloos nach einem von der Gewerkschaft Hohenzollern 1899 ausgegebenen Berichte später aufstellte, und welches in „Deutschlands Kali-Industrie“ Nr. 30 vom 20. August 1899 veröffentlicht wurde; hier wurden 5 Kalisalzlager und 3 Salzthonmassen aufgeführt.

Ganz andere Aufschlüsse ergab aber der Schacht, welcher dann, mit dem Bohrloch in der Mitte, abgeteuft wurde, nämlich:

---

1) Festschrift der Herzoglichen technischen Hochschule in Braunschweig für die 69. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, 1897.

Buntsandstein	bis	109 m
Letten mit Gyps	„	145 m
Gyps und Anhydrit	„	264 m
Salzthon (sogenannter)	„	271 m
„Salzthon“ mit Gyps, unten Anhydrit	„	283 m.

Alles mit „bedeutenden Spuren von Druckverhältnissen“. Dann folgte steil aufgerichtetes jüngeres Steinsalz, nach unten mit unregelmäßigen Streifen von Kalisalzen, welche allmählich etwas zahlreicher und bis zu 2 m dick wurden und sich wiederholt nach Westen ausbogen. In solchen steil stehenden Streifen hatte aber das Bohrloch die scheinbar so mächtigen Carnallit-Lager durchbohrt. Dazwischen lagen dann ebenso unregelmäßige, annähernd parallele, als Salzthon bezeichnete Streifen, und Querschläge, welche vom Schachte aus bei 470 m, 520 m, 540 m, 580 m, 620 m und 680 m Tiefe, sowie später bei 700 m Tiefe nach Osten in das Hangende, bei 540 m auch in das Liegende getrieben wurden, ergaben kein günstigeres Resultat, und auch das Abteufen des Schachtes bis zu 720 m Tiefe war vergeblich.

Ein „Kontroll“-Bohrloch, welches 125 m westlich von dem Schacht angesetzt wurde, traf aber an:

Lehm und Gerölle	bis	9 m
Zechsteindolomit	„	25 m
Rother Thon	„	30 m
Unterer Buntsandstein . . .	„	72 m
Gyps	„	98 m
Rother Thon	„	102 m
Dunkler Zechsteindolomit . .	„	111 m
Rother Thon	„	115 m
Gyps	„	145 m
Rother Thon	„	149 m
Unterer Buntsandstein . . .	„	240 m
Anhydrit.	„	252 m.

Der rothe Thon wurde als Spalten-Ausfüllung gedeutet; der Zechsteindolomit war, soweit ich noch Proben davon gesehen habe, sehr stark zerstückelt, und die Lücken mit sekundär gebildetem Gyps erfüllt; das Einfallen war jedenfalls sehr steil. Dieses Bohrloch steht aber sehr nahe der Antiklinal-Linie, in welcher in Freden selbst marines Ober-Oligocän und miocäne Quarzsande, aber nordwestlich davon, am Leineufer, Schichten der Unteren Kreide wie Hilsthon, Hilssandstein und Flammenmergel eingesunken liegen.

Der angebliche Salzthon des Schachtes erwies sich nun bei näherer Untersuchung als ein Gemenge von Salz und Gyps mit Buntsandstein und Schieferbrocken bis zu Kopfgröße, ein wahres Reibungskonglomerat, welches auf eine Aufschiebung oder Ueberschiebung von Buntsandstein und dessen Unterlage über das Steinsalz und Kalisalz schließen ließ, wie eine solche auch durch den zweimaligen Wechsel von Zechstein und Buntsandstein in dem Kontrollbohrloch dargethan wurde; die unregelmäßigen Bänder von Steinsalz und Kalisalzen dazwischen konnten aber füglich auch nur durch eine Auswalzung hervorgebracht sein, deren Ursache in einer Stauchung im Untergrunde der Antiklinale zu suchen war. Auch im untersten Theile des Schachtes steht noch ein solches Konglomerat an, ist aber auf dem Profil Tafel I nicht angegeben. Um daher das Kalisalzlager auszurichten, welches mit dem fiskalischen Bohrloche angetroffen worden war, wurden Querschläge in das Hangende auf der 700 m und der 680 m Sohle, später auch auf höheren Sohlen aufgefahren, und zwar zunächst, da die Schichten nach Osten einfielen, auf ca. 60 m Länge nach Osten, alsdann, da sich das Schichtenstreichen änderte, nach Nordosten.

Mit dem untersten Querschlage wurde dann bei ca. 50 m vom Schacht massives Steinsalz angefahren, mit den höheren in entsprechend geringerer Entfernung, meistens mit eigenthümlicher, fast Gneiß-artigen Druckschieferung, und bei ca. 140 m vom Schachte folgten dann wieder ein Paar unregelmäßige, bis über 3 m dicke, ausgewalzte Lagen von Kalisalzen und Steinsalz, aber ohne Buntsandsteinbrocken, so daß hier nur eine Ueberschiebung von älterem Steinsalz über Kalisalz vorlag.

Dann folgte wieder älteres Steinsalz, im 700 m-Sohlen-Querschlage bis zu 247 m vom Schacht, in dem 680 m-Querschlage bis 207,5 m, auf der 620 m-Sohle bis 172,5 m und auf der 600 m-Sohle bis 156 m vom Schacht, und dahinter Carnallit mit ca. 60 Grad einfallend; durch Ueberbrechen wurde dann festgestellt, daß es sich um ein zusammenhängendes Kalisalzlager handelt, über welchem normal einige Meter echter Salzthon und dann fester Anhydrit folgen.

Recht oft ist die Lagerung aber einigermaßen gestört, besonders durch schwebende oder annähernd streichende Störungen und Verdrückungen, welche gewöhnlich mit Anschwellungen der Mächtigkeit des Kalisalzlagers wechseln, indem eine jede, wenn auch geringfügige Aenderung im Streichen oder Einfallen in der Regel von einer Aenderung der Mächtigkeit begleitet wird.

Stellenweise ist diese fast auf Null reducirt und schwillt dafür auch wieder auf über 30 m oder selbst 75 m vom Hangenden zum Liegenden an, ohne daß im Steinsalz oder Kalisalz Verwerfungen scharf und deutlich hervortreten. Die ganze Lagerung wird durch das Profil auf Tafel I anschaulich gemacht, welches durch den Schacht nach Nordosten gerichtet ist.

Sehr mannigfaltig und weitgehend waren die Störungen aber zum Theil auf der 680 m-Sohle und besonders auf der 700 m-Sohle, auf welchen das Kalisalzlager zuerst angefahren wurde, und zwar gleich mit einer flach einfallenden Verwerfung, welche eine S-förmige Schleife des Lagers hervorgebracht hatte, doch so, daß der hangende Anhydrit auch z. Th. im Liegenden der Kalisalze auftrat, und daß in diesen einzelne eckige, größere und kleinere Anhydritblöcke steckten. Der Salzthon fehlte unter dem Anhydrit, und dieser war zum Theil plattig, Gneiß-artig, und enthielt Carnallit in dünnen, unregelmäßigen Streifen. Augenscheinlich ist hier das nordöstliche Kalisalz nebst Anhydrit über das von oben bis hierher reichende Kalisalz nebst Anhydrit übergeschoben, und dieses gleichzeitig gestaucht und gefaltet.

Die streichende Grundstrecke traf 90 m südöstlich vom Querschlage der 680 m - Sohle auf einen Querbruch, an welchem sich Salzthon mit nordöstlichem Streichen zwischen die Unterfläche des Anhydrits und des nach derselben Richtung sich umbiegende Kalisalzlager legte. Der Anhydrit ist hier um etwa 60 m in das Hangende verschoben, und der Carnallit erreicht eine sehr bedeutende Mächtigkeit. Auf den anderen Sohlen findet sich eine so bedeutende Verwerfung nicht, so daß die Lagerung im Wesentlichen folgendermaßen aufzufassen ist:

Der Anhydrit, das festeste Gestein, ist durch den Druck bei Auffaltung der Schichten in größere und kleinere Schollen und Blöcke zerlegt, von welchen das plastische Salz und zwar zunächst die Kalisalze gepreßt wurden, so daß sie von manchen Stellen fortgedrückt wurden und an anderen um so größere Mächtigkeit erhielten, daß sie gelegentliche Spalten und Klüfte im Anhydrit ausfüllten oder isolirte Blöcke von solchem umhüllten.

Wesentlich anders gestalten sich die Erscheinungen im Controllbohrloch, dem Schacht und den südwestlichen Theilen der Querschläge. Von den Bohrkernen des Controllbohrloches habe ich nur solche von Zechsteindolomit gesehen, nicht aber die mit Buntsandstein und mit rothem Thon (Kluftausfüllung) bezeichneten. Immerhin folgt hier über Anhydrit Buntsandstein, dann Gyps, Zechsteindolomit und dann wieder Gyps und Unterer Buntsand-

stein, dann wieder Thon und Zechsteindolomit, so daß hier Ueberschiebungen oder widersinnige Verwerfungen vorliegen müssen.

Die mit dem Schacht und den Querschlägen angetroffenen unregelmäßigen Streifen und Bänder von Reibungsbreccien von Buntsandstein, Salz, Gyps und Kalisalzen und die ziemlich dünnen und ebenfalls unregelmäßigen Lagen von Kalisalzen zwischen dem Steinsalz beziehungsweise unter dem älteren Steinsalz können füglich nur als Wirkung einer mit Auswalzung verbundenen Ueberschiebung gedeutet werden, nämlich so, daß zunächst durch Stauchung im Untergrunde der Antiklinale im Leinethale die Zechstein- etc. Schichten zu einer steilen Falte aufgepreßt wurden, und daß dann an dieser Falte die seitliche Fortsetzung der Schichten abbröckelte und an ihr emporgeschoben wurde. Es entstand hierdurch eine zweite, äußere Antiklinale, deren Schichten freilich allerlei Störungen, Verwerfungen, Verdickungen und Verdrückungen erlitten, aber doch im Wesentlichen im Zusammenhange blieben, wie das oben geschilderte Kalisalzlager von Hohenzollern. Ob das hangende Hartsalzlager auf den oberen Sohlen, welches so reich an Langbeinit ist, von den liegenden, vorzugsweise Carnallit führenden Lagern dem Alter nach verschieden ist, läßt sich nicht sicher entscheiden, doch ist dies wenigstens möglich.

Auch die reichen Kalisalzlager der Gewerkschaft Hercynia bei Vienenburg zeigen ja enormes Anschwellen und dazwischen Verdrückungen, an welchen das Hangende und Liegende sich einander nähern, so daß sie bei dem Abbau als Sicherheits-Pfeiler dienen können, also für den Bergbau in hohem Grade günstig sind.

Zum Theil schon während der Auffaltung der Schichten hat das Wasser von der Tagesoberfläche Zutritt erlangt, hat Anhydrit in Gyps umgesetzt, stellenweise dem Carnallit das Chlormagnesium entzogen und somit Sylvin gebildet oder auch wohl gelösten Carnallit an anderen Stellen wieder ausgeschieden, jedenfalls aber bis zu der Tiefe, in welcher das Wasser cirkuliren konnte, alles Salz, auch das Steinsalz aufgelöst. Die Abdichtung gegen das Wasser erfolgte dann später durch Schlamm, welcher sich zu Boden setzte, gelegentlich auch wohl durch die Volumenzunahme des Anhydrits um ca. 62 Procent bei der Umwandlung in Gyps, schließlich aber dadurch, daß die unterhöhlten Schichten sich herabsenkten. So fällt denn der Untere Buntsandstein bei Freden, am Harliberg bei Vienenburg etc. oben und in geringerer Tiefe bei weitem nicht so steil ein, als das darunter anstehende Salzgebirge.

In der Antiklinallinie waren aber Aufbruch-Spalten ent-

standen, in welche jüngere, seiner Zeit im Hangenden noch vorhandene Schichten von den Seiten hineinstürzen konnten, so in Freden selbst, wie oben erwähnt, Fossil-reiche Mergel des Ober-Oligocän und Quarz-Sande des Miocän, und weiter nördlich am Leine-Ufer Thone des Hauterivien, sowie Hilssandstein und Flammenmergel, so daß die jüngsten über Tage vorhandenen Schichten annähernd über den ältesten, im Untergrunde anstehenden liegen.

Ebenso ist aber auch mit anderen Schächten zunächst Tertiärgebirge und dann in verhältnißmäßig geringer Tiefe das Salz angetroffen worden, so mit dem Schacht der Gewerkschaft Justus I. bei Volpriehausen und dem der Gewerkschaft Eime bei Banteln, über deren Ergebnisse ich zur Zeit noch nicht berichten kann.

Im Leinethale findet sich aber auch Lias eingesunken, in Gronau anstehend, und wurde auch im Brunnen eines Bahnwärterhauses südlich von Brüggen angetroffen.

Der Salzgittersche Höhenzug, dessen südlichster, Goslar zunächst liegender Theil von Denckmann[1]) untersucht wurde, verläuft durchschnittlich von Südsüdost nach Nordnordwesten bis in die Gegend von Salder, wo er sich scharf nach Westen biegt. Seine äußeren Ränder werden durch eine Antiklinale von Turon- und Cenoman-Pläner gebildet, unter welchen nach innen etwas unregelmäßig Flammenmergel und Minimus-Thon, Hilssandstein (unteres Albien), Thone des Aptien etc. und Eisensteine der Unteren Kreide folgen, vielfach steil aufgerichtet und verschoben.

Unter diesen Kreidebildungen liegen dann regellos in sehr verschiedener Ausdehnung und mit verschiedenem Einfallen Schollen von Lias, Keuper, Muschelkalk und Buntsandstein.

Streichende und spießeckige Verwerfungen sind vielfach nachzuweisen, und Querthäler, wie das bei Dörnten, sind von Quer-Verwerfungen begleitet (vergl. Denckmann), und dies ist namentlich auch an dem Querthal von Salzgitter der Fall, wo der ganze Höhenzug nach Norden hin statt der nordwestlichen Richtung eine beinahe nördliche einnimmt und zugleich eine weit geringere Breite erhält.

Eine ganze Reihe von Bohrlöchern in der weiteren Umgebung von Salzgitter hatte ebenfalls ergeben, daß die Lagerung der Schichten sehr unregelmäßig ist; so hatte ein Bohrloch bei Othfresen ganz steil stehenden Buntsandstein angetroffen, so daß in 800 m Tiefe noch dieselbe Schicht anstand, wie über Tage.

---

1) Inaugural-Dissertation Göttingen 1887 und Abhandl. kgl. Geolog. Landesanstalt. Berlin, Band VIII, Heft 1.

Bohrloch III S. O. Salzgitter nahe der „Muttereiche“ hatte dagegen bis zu 678 m Tiefe mit ca. 60 Grad einfallenden Gypskeuper durchsunken, während andere Bohrlöcher, welche auf den Rath der betreffenden Gutachter im Muschelkalk angesetzt waren, wie Bohrloch I und II Salzgitter, in mäßiger Tiefe, bei 330 m resp. 375 m Steinsalz, zum Theil mit Anhydrit, und dann an verschiedenen Stellen auch Sylvinit und Carnallit erbohrt hatten, und Bohrloch II Gitter schließlich bei 664 m Tiefe wieder Unteren Buntsandstein mit Rogensteinbänken, mit 63 Grad nach Osten einfallend.

Ein Schacht „Fürst Bismarck“, 600 m südlich Salzgitter, traf bis 102 m Tiefe Oberen, bis 195 m Mittleren Muschelkalk, mit 50 Grad einfallend, dann Röth mit Gyps und Anhydrit, flach einfallend, bis 252 m, und endlich bis über 800 m tief Steinsalz mit einer Anzahl mehr oder minder steil stehender, oft gekrümmter Streifen oder Linsen von Kalisalzen. Versuchsstrecken bei 600 m Tiefe trafen aber 80 m vom Schacht eine N. N. O. streichende Verwerfung, auf welche Röth folgte, und auf der 800 m-Sohle wurde in mehreren in verschiedenen Richtungen getriebenen Versuchsstrecken ebenfalls, meist schon in geringeren Entfernungen vom Schacht, das Salz durch Verwerfungen abgeschnitten, welche von Süden nach Norden oder auch nach Nordnordwest verliefen; ohne Erfolg blieb auch das Verfolgen der dünnen Kalisalz-Streifen im Streichen, da sie ganz unregelmäßig waren und sich schließlich auskeilten. Es wurden dann Strecken getrieben nach Bohrloch II Salzgitter nach Südosten und nach Bohrloch I Gitter nach West bei Süd.

Die erstere traf zunächst Röth und ca. 440 m vom Schacht mit 65° nach Ostsüdost einfallenden Wellenkalk und 300 m weiter hinter einer südnördlich laufenden Verwerfung Steinsalz, nahe dem Bohrloch mit Streifen von Carnallit, südlich von demselben auch einen unregelmäßig, im Horizontalschnitt hufeisenförmig gekrümmten Carnallit-Streifen, welcher allerlei Hervorragungen zeigte, durchschnittlich 1—1,5 m dick war, Steinsalzblöcke einschloß und nach Süden durch eine Reibungs-Breccie von Steinsalz und Thon begrenzt wurde. Nach Westen wurde dann in geringer Entfernung Wellenkalk angefahren und ca. 100 m nach Osten hinter dem Steinsalz Anhydrit, Dolomit und Gyps.

Die westliche Strecke traf dagegen ca. 60 m vom Schacht 1 m Anhydrit und, mit 65° nach Osten einfallend, Röth, wie Denckmann feststellte, auf 176 m Länge, dann hinter einer nordwestlich streichenden Verwerfung Lettenschiefer mit Rogensteinbänken

(Unteren Buntsandstein) auf 285 m Länge und endlich hinter einer westnordwestlichen Verwerfung Wellenkalk, so daß auch diese Strecke aufgegeben werden mußte, in der übrigens Salzwasser an einzelnen Stellen einsickerte, und auch Grubengas sich entwickelte.

Als letzter Versuch wurde dann an dieser Strecke 430 m vom Schacht im Buntsandstein ein Gesenk 275 m tief abgeteuft, welches also, da der Schacht ca. 175 m über dem Meere angesetzt war, bis zu ca. 900 m unter dem Meeresspiegel reichte; es ist dies wohl der absolut tiefste Punkt, welcher mit einem Schacht bisher erreicht worden ist. In dem Gesenk wurden bei 75 und 90 m Tiefe Verwerfungsklüfte angetroffen, doch fielen die Schichten ziemlich gleichmäßig mit ca. 65° nach Osten ein und bestanden meist aus Sandstein und Thonen in vielfachem Wechsel, bei 140 m und 175 m auch aus Rogensteinbänken, die untersten 75 m aber aus Thon mit Anhydrit und zuletzt aus Thon mit Gypsknollen, so daß jedenfalls die untersten Schichten des Unteren Buntsandstein durchteuft wurden.

Von der Sohle des Gesenkes wurde dann ein Querschlag nach Westen in das Liegende getrieben, traf aber schon bei 10 m Länge auf eine Verwerfung, dann auf einige Meter stark zerquetschtes Steinsalz und graue und rothe Thone, bei 22,5 m mit dunklem, dünnschichtigem Anhydrit, und dann auf recht steil nach Osten einfallenden Wellenkalk, von 125 m bis 143,5 m auf graue Mergel und Thonerde mit Gyps und Anhydrit, bis 192 m auf Breccien von Salz, Thon und Anhydrit, bis ca. 317 m auf ziemlich reines Steinsalz, welches zuletzt ein mehr südwestliches Einfallen annahm, so daß bei 291,5 m Länge der Querschlag um 40° mehr nach Süden, also südwestlich gerichtet wurde, und dann folgten gegen 12 m Salz mit Thon und Anhydrit und endlich Trochitenkalk und Thonplatten bis zu 365 m Länge des Querschlages. Ein Vorbohrloch traf dann auf eine heiße Quelle von 46,3° C., welche zuerst gegen 50 Liter ergab, später auf 30 Liter herabging. Da das Wasser unter starkem Druck stand, auch nicht weiter an Menge abnahm, wurde der Querschlag eingestellt, der ja an und für sich wenig Aussicht auf günstigen Erfolg hatte und nur noch ein letzter Versuch war vor der endgültigen Einstellung des Unternehmens und dem Aufgeben des Schachtes.

Die heiße Quelle enthielt aber nach den von Herrn Dr. Günther gemachten und mir freundlichst mitgetheilten Untersuchungen:

im Liter:		
am 21. August 1903:	am 28. August 1903:	
256,81 g	242,77 g	Chlornatrium
51,14 g	56,30 g	Chlorcalcium
Spuren	12,13 g	Chlormagnesium
2,17 g	2,21 g	Chlorkalium
0,33 g	0,67 g	Calciumsulphat.

Diese starke Zunahme an Chlormagnesium läßt vermuthen, daß auch Carnallit aufgelöst worden ist.

Alle mit dem Querschlage durchfahrenen Schichten zeigten aber sehr starke Druckwirkungen. Das Salz war ja stellenweise rein, aber vielfach mit Brocken und Blöcken anderer Gesteine gemengt, so daß ein wahres Reibungs-Konglomerat vorlag. Zunächst dem Buntsandstein, 10 m von dem Gesenk, enthielt es zahllose Buntsandsteinbrocken und war durch solche röthlich gefärbt, während es weiterhin, westlich der Wellenkalkmasse, also im Bereiche des Mittleren Muschelkalk, außer Anhydrit namentlich thonige und dolomitische Gesteine in kleineren oder größeren Schollen enthielt und zum Theil mit dem Haselgebirge des Salzkammergutes große Aehnlichkeit zeigte. Sehr auffällig war aber dabei, daß die meisten der von Herrn Dr. Günther ausgeführten Analysen neben Thon auch freie Thonerde (Al^2O^3) ergaben, öfters in beträchtlicher Menge, ohne daß sich feststellen läßt, ob die verschiedenen Bestandtheile der Gesteinsproben als ursprüngliche Bestandtheile oder inniges Gemenge anzusehen sind, oder durch den Gebirgsdruck zwischen und durch einander geknetet worden sind, wie dies bei der sehr verschiedenen Zusammensetzung der Gesteinsproben und dem ganzen Vorkommen keineswegs unwahrscheinlich ist. So zeigten Gesteinsproben aus verschiedenen Längen des Querschlages die darunter angegebene Zusammensetzung:

		und hinter dem Knick bei:		
	195 m	73 m	82,5 m	84,8 m
Chlornatrium . .	2,88 g	0,20 g	—	—
Chlorkalium . . .	0,18 g	—	—	—
Thon	27,52 g	30,24 g	11,26 g	10,64 g
Thonerde	30,23 g	11,06 g	4,— g	1,46 g
Calciumkarbonat .	18,— g	19,25 g	15,25 g	79,08 g
Magnesiumkarbonat	14,40 g	18,25 g	15,47 g	6,94 g
Calciumsulphat . .	6,72 g	18,60 g	53,29 g	—

Der zum Theil recht hohe Gehalt an freier Thonerde war besonders auffällig und zunächst vergleichbar dem des Salzthons

über den Staßfurter etc. Kalisalzlagern, welcher nach den Untersuchungen von Precht zu oberst aus Magnesiumkarbonat besteht, darunter aus Thonerde und Magnesiumhydrat, und unten aus Anhydrit, so daß wohl der Gedanke auftauchen konnte, daß in dem Querschlag Salzthon angefahren worden wäre, und somit die Hoffnung, ein Kalisalzlager zu finden, ein wenig steigen durfte.

Da aber im Osten Wellenkalk, im Westen Oberer Muschelkalk liegt, so ist wohl anzunehmen, daß all das Salz, Anhydrit und Thon dem Mittleren Muschelkalk zuzurechnen sind, in welchem namentlich im Salzschacht bei Erfurt ähnliche plattige Anhydrit-Lagen auftreten, während freilich freie Thonerde meines Wissens im Mittleren Muschelkalk noch nicht nachgewiesen worden ist. Es sei hier aber hervorgehoben, daß die Schichten in dem letzten Theile des Querschlages dasselbe Streichen und Einfallen angenommen hatten, wie der über Tage anstehende Südwestflügel des Salzgitterer Kreide-Sattels, so daß auch gehofft werden durfte, daß der Querschlag aus dem Bereich der eigentlichen Sattelbrüche und der Störungen des Salzgitterer Querthales heraus wäre. Besonders stark traten aber die Druckwirkungen im Bereiche des Wellenkalks hervor. Die unteren Grenzschichten gegen den Röth ließen sich nicht nachweisen, wie ja auch von dem ganzen Röth nur wenige Meter durchfahren wurden, aber der ganze übrige Wellenkalk war derartig zerquetscht, daß er größtentheils aus unebenen Platten bestand, welche mehr oder minder deutliche Harnische oder Rutschflächen trugen und durch fein zerriebenes Gesteins-Material von einander getrennt wurden, sofern nicht mit Gyps oder Steinsalz etc. ausgefüllte Spalten oder Klüfte hindurchsetzten.

Dazwischen fanden sich aber auch ganz verruschelte Massen, wie solche bei uns sonst besonders in paläozoischen Schichten des Harz und des rheinischen Schiefergebirges vorkommen, bei welchen freilich Quarz die einzelnen Brocken und Schollen verkittet an Stelle von Gyps und Salz, wie in dem Querschlage.

Die Zonen der Oolithbänke und der Werksteinbänke waren daher nicht mit Sicherheit zu erkennen, dagegen trat an der oberen Grenze des Wellenkalks unzweifelhafter Schaumkalk auf, freilich auch nur in ganz unregelmäßigen Stücken und Blöcken, welche außen Rutschflächen, innen allerlei zum Theil mit Gyps etc. ausgefüllte Ablösungen oder Spalten zeigen und von Gesteinsmehl umgeben waren, aber eben aus Schaumkalk bestehen und Myophoria orbicularis, M. laevigata und andere Arten mit in Kalkspath verwandelter Schale enthalten. Der Schaumkalk ist im Uebrigen hellgrau und enthält zahllose Poren, aber keine Oolith-

körnchen mehr, durch deren Zersetzung und Auflösung doch wohl die Poren entstanden sein dürften.

Das Ende des Querschlages liegt annähernd unter dem Fahrwege, welcher von dem nordöstlichen Ausgange des Dorfes Gitter-am-Berge nach Liebenburg führt.

Da in dem Querschlage ungeachtet der kräftigsten Luftzuführung und zugleich Absaugung die Temperatur der Luft gegen 42 Grad C. betrug, zuletzt sogar noch mehr, so war es mir nicht möglich, mich dort auch nur ein wenig länger aufzuhalten um Profile aufzunehmen oder speciellere Beobachtungen zu machen. Es ist daher besonders erfreulich, daß es Herrn Dr. Günther gelang, an verschiedenen Stellen mit Hilfe von Blitzlicht photographische Aufnahmen zu machen, welche ein Bild von der gewaltigen Zertrümmerung und Durcheinander-Schiebung der Schichten geben.

Zahlreiche Messungen der Temperatur des Gesteins lieferten aber derartig verschiedene Zahlen, daß man nur annehmen kann, daß dabei Irrthümer vorgefallen sind, indem entweder der damit beauftragte Unterbeamte die Grade nicht richtig abgelesen beziehungsweise notirt hat, oder in unmittelbar vorher gebohrten Bohrlöchern gemessen hat, deren Wandungen durch das trockne Bohren erhitzt waren, so daß bis zu 62° C. gefunden wurde und zwar schon in dem Buntsandstein des Gesenkes. Spätere Messungen in dem Querschlage ergaben nach den freundlichen Mittheilungen des Herrn Direktor Pillegard bei 74 m Länge des Querschlages 49° C., bei 94 m 56°, bei 100 m 53°, bei 125 m 52,5°, bei 137 m 53,8°, bei 165 m 50,2°, bei 208 m 53,1°, bei 222 m 47°, und durchweg war die Temperatur des Gesteins für die Rückseite der Hand empfindlich zu hoch.

Sehr auffällig ist dabei aber die Beobachtung, daß die Gesteins-Temperatur im Querschlage um einige Grade niedriger war, sobald er im Steinsalz stand; es könnte dies damit erklärt werden, daß das weniger dichte Steinsalz eine geringere Wärme-Capacität besitzt, also sich schneller abkühlen muß, doch müßte dies einigermaßen dadurch ausgeglichen werden, daß es diatherman ist. Ich möchte aber glauben, daß hierbei die Pressung, Zerdrückung und Reibung wesentlich in Betracht kommt, die in dem plastischen Salz jedenfalls bedeutend weniger Wärme hervorgebracht hat, als in den Kalken etc., wie dies ja auch nach den Ergebnissen der bekannten, von Mallet angestellten Versuche anzunehmen ist. Es würde dadurch aber auch erklärlich oder glaubhaft werden, daß in dem Buntsandstein des Gesenkes, so nahe einer Hauptverwerfung, die Temperatur thatsächlich höher gewesen wäre, als selbst 100 m tiefer.

Es würde daraus aber auch folgen, daß für die Wärme-Zunahme im Erdinnern die erwähnten Temperaturmessungen brauchbare Zahlen nicht ergeben, und dies könnte füglich auch mit ungewöhnlichen, von anderen Autoren mitgetheilten Daten der Fall sein.

Es sei aber bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß auf dem Querschlage der 700 m-Sohle von Hohenzollern bei Freden zahlreiche Temperaturmessungen im Steinsalz von 147,5 bis zu 226 m Entfernung vom Schacht gemacht worden sind, von welchen 6 gerade 36° C. ergaben, 8 : 36,2°; 2 : 36,4°; 1 : 36,5°; 1 : 36,8°, dagegen eine 35,9°; 4 : 35,8°; 1 : 35,6°; 1 : 35,5° und die beiden letzten nur 35°, so daß der Durchschnitt ziemlich genau 36° beträgt, oder ein klein wenig darüber, falls man die beiden letzten Messungen als zu weit abweichend und vielleicht ungenau ausscheiden will, jedenfalls ergaben aber 19 von 27 Messungen zwischen 35,8 und 36,2° C.

Eine gewaltige Verschiebung in der Antiklinallinie wurde in der schon oben erwähnten Grube des Kaliwerkes Hercynia bei Vienenburg 1894 durch einen Querschlag in das Liegende auf der 300 m-Sohle nachgewiesen, welcher getrieben wurde, um wo möglich den Gegenflügel des so überaus reichen Kalisalzlagers aufzuschließen, aber unter dem Steinsalz ein kurzes Gewölbe von rothem Thon und dann als Gegenflügel, beziehungsweise mit entgegengesetztem Einfallen, eine Reibungs-Breccie und plattigen, unteren Muschelkalk antraf; dieser enthielt Pecten discites, Myophoria-Arten etc. und gehörte anscheinend dem Schaumkalk-Horizont an. Die Reibungsbreccie bestand aber aus vollständig zu Brocken und Grus zermalmtem Muschelkalk und dunklem, dazwischen gepreßtem Thon, der sicher nicht als Röth-Thon anzusehen ist, sondern als Thon der Unteren Kreide, da ein anderer Querschlag in das Liegende auf der 330 m-Sohle dunkle Thone mit Exogyra Couloni, Panopaea sp., und Steinkerne von Pleurotomaria und Aporrhaïs cf. bicarinata Desh. traf, Thone, die wohl dem Barrêmien angehören dürften.

Der Schacht des Kaliwerkes Justus I bei Volpriehausen (zwischen Northeim und Uslar) durchteufte bedeutende Störungen und traf zunächst Tertiärsande, welche in einer Ecke des Schachtes bis zu 30 m Tiefe hinabreichten. Dann folgte Buntsandstein bis zu 261 m, aber ich sah selbst noch bei 180 m Tiefe ganz grobkörnigen Sandstein, ferner:

Rother Thon	bis 314 m
Gyps, Anhydrit und Thon	„ 366 m
Oberes Steinsalz	„ 406 m
Anhydrit, dessen Oberfläche mit ca. 55° einfiel	„ 466 m

während die Unterseite nur mit knapp 10° geneigt ist. Dann folgte ca. 6 m mächtiger Salzthon, 5 m Hartsalz, 16 m Steinsalz, 5 m Hartsalz mit ca. 45° einfallend, 15 m Steinsalz, 4 m Hartsalz (mit 10° in der entgegengesetzten Richtung einfallend) und endlich Steinsalz bis zur Sohle des Schachtes bei 550 m Tiefe.

Das Salz bildet unter dem Anhydrit im Großen und Ganzen ein Gewölbe und senkt sich nach Osten ziemlich gleichmäßig auf über 200 m mit ca. 15 bis 25°, und erst in der Nähe der Feldesgrenze allmählich oder z. Th. sprungartig stärker. Ueber dem Steinsalz folgt dort das Hartsalz gegen 3 m mächtig und dann Salzthon; dieser ist aber gewöhnlich sehr schiefrig oder in dünne, dunkle Blättchen zerlegt, zwischen welchen helle Körner oder kleine Linsen von Kalisalzen liegen, so daß das Ganze dann ein Gneiß-artiges Aussehen bekommt, aber leider sehr schnell Feuchtigkeit aufnimmt und in kurzer Zeit zu einer schlammigen Masse zerfällt.

Vom Schacht nach Westen verdünnt sich dieses obere Kalisalzlager schnell; das zweite, mit ca. 45° nach Osten einfallende Lager des Schachtes hebt sich dafür höher heraus, nimmt erheblich an Mächtigkeit zu, biegt sich allmählich flacher und senkt sich endlich um dann zu verschwinden [1]), wie dies das Profil CD zeigt. Etwa 60 m nach Süden ist die doppelte Krümmung dieser Kalisalzmasse beträchtlich stärker geworden, (siehe Profil AB) und hat unten noch eine Fortsetzung erhalten, die Mächtigkeit des Kalisalzes ist aber gerade an den Krümmungen wesentlich größer geworden oder geblieben. Dieses Profil ist um 20° gegen das erste gedreht und zeigt noch deutlicher die Richtung des oberen Endes nach Westen und unten, des unteren nach Osten und, noch steiler, nach unten.

Das Profil LM ist um 5° gegen AB gedreht und um 15° gegen CD und liegt gegen 40 m nördlich vom Schachte; es zeigt

---

1) Von der Direktion der Gewerkschaft Justus I wurden mir freundlichst die auf Tafel II abgebildeten Profile mitgetheilt, deren Lage aus den Lageplan auf Tafel I ersichtlich ist. Auffälliger Weise sind sie von Norden resp. von Nordosten gesehen, umgekehrt, wie sonst gewöhnlich. Leider waren sie überhöht (2:1) gezeichnet, so daß ich sie umzeichnen lassen mußte, und hierbei sind jedenfalls einzelne Verzerrungen entstanden, welche indessen wohl für die Anschauung und das Verständniß der Lagerung der Schichten ohne großen Belang sind. Es muß aber hervorgehoben werden, daß bei dem Bergbau dünne, unbauwürdige Mittel im Allgemeinen nicht weiter verfolgt werden, so daß das auf den Profilen zum Theil angegebene vollständige Auskeilen des Kalisalzlagers mitunter nur eine starke Verdrückung ist, oder auch wohl einem „ausgewalzten Mittelschenkel“ im Sinne von Albert Heim entspricht.

Nichts mehr von den beiden nach unten gerichteten Enden, sondern eine bis über 25 m mächtige, im Querschnitt Trog-förmige Kalisalzmasse, deren Oberfläche und dünne Enden dem darüber anstehenden Kalisalzlager annähernd parallel liegen, und welche nach Osten in 3 Spitzen ausläuft, indem sich hier Steinsalz zwischenschiebt. Diese Spitzen und Einschiebungen werden auf dem 40 m weiter nördlich liegenden und um 15° gegen LM weiter gedrehten Profile EF wesentlich länger, ebenso wie auf dem Profile GH, welches noch ca. 60 m weiter nach Nordwesten und um 25° gegen EF gedreht ist, während das untere Band dieser Masse sich ganz von ihr abgelöst hat, sich weiter nach Osten zieht und steiler stellt, annähernd ebenso wie das lange, nach Westen folgende Band, welches schließlich sehr deutlich als Gegenflügel zu dem obersten Lager des Schachtes erscheint.

Es nimmt aber bis zu den Profilen LM und CD eine sehr starke Einbuchtung nach Osten an, welche gegen 140 m vom Schachte entfernt bleibt und auch im Profil AB noch sichtbar ist; zwischen diesen beiden Flügeln liegen also die Kalisalze, deren Lagerung und Verhalten oben kurz beschrieben wurde, und die nur theilweise von meist wohl nur wenig mächtigem Salzthon begleitet werden, während über, beziehungsweise auf der Außenseite der beiden Flügel wohl fast überall Salzthon liegt, und darüber durch den Schacht und die Bohrlöcher auch Anhydrit nachgewiesen wurde, mindestens im Schachte freilich nicht in regelmäßiger Lagerung.

Natürlich sind durch die verschiedenen Versuchsstrecken auch eine ganze Reihe von Störungen in kleinem und kleinstem Maßstabe aufgeschlossen worden, wie Wurm-artige Krümmungen oder kurze Schleifen, welche in dem röthlich und weiß gebändertem Salz sehr schön hervortraten, oder dünne, ausgewalzte Streifen von Salzthon, welche ganz ähnlich in einzelne Stücke zerlegt waren, wie etwa die bekannten Belemniten der Alpen; endlich wurden auch wirkliche Verwerfungen angefahren, welche mit sekundär oder neugebildeten Salzen ausgefüllt waren.

Wenn man sich nun ein Bild von der Entstehung der doch recht verwickelten und unregelmäßigen Lagerung machen will, so ist zunächst zu bemerken, daß nach Allem, was von anderen Kalisalzbergwerken bekannt ist, nicht wohl angenommen werden kann, daß Hartsalzlager verschiedenen Alters hier vorhanden sind, daß also alle die in der Grube Justus I in Streifen, Lagen und Mulden angetroffenen Hartsalze ursprünglich gleichaltrig sein dürften, also aus einem und demselben Kalisalzlager stammen und später in

ihre jetzige Lage gebracht worden sind und zwar durch gewaltige Pressungen.

An der Tagesoberfläche bilden nun die Buntsandsteinschichten im Großen und Ganzen eine flache Antiklinale und fallen namentlich im Osten, von der Feldesgrenze des Kaliwerkes an, ziemlich gleichmäßig mit ca. 12° nach Osten oder Ostnordosten ein.

An dieser Feldesgrenze gegen den Staatswald müssen nun so ziemlich die untersten Schichten des Mittleren Buntsandstein anstehen, so daß nach Westen hin bald Unterer Buntsandstein zu Tage treten müßte, doch setzt hier eine weithin zu verfolgende Verwerfung hindurch, welche schon von Graul in seiner Dissertation [1]) geschildert wurde, und es folgen von hier bis zu dem Schachte von Justus I und weit darüber hinaus Buntsandsteinmassen mit recht verschiedenem Einfallen, welche mindestens theilweise, wenn nicht alle, auch noch dem Mittleren Buntsandstein angehören. Mittlerer Buntsandstein fand sich aber, wie erwähnt, im Schacht selbst noch bei 180 m Tiefe, so daß darunter höchstens noch 81 m Unterer Buntsandstein vorhanden sein könnten, während dieser sonst in der ganzen Gegend wohl über 300 m mächtig ist.

In der Umgebung des Schachtes und namentlich weit nach Norden hin liegen aber zwischen den Buntsandstein-Schollen häufig miocäne Quarzsande, z. Th. mit Quarziten, und auch marines Oberoligocän, das mit wohlerhaltenen Fossilien in einem Brunnen und in einem Bohrloche angetroffen worden ist.

Die Entstehung dieser Störungszone ist nun wohl so zu erklären, daß bei der Schichtenfaltung, der Bildung der Antiklinale, die Schichten im tiefen Untergrunde gestaucht und somit verdickt wurden, und daß namentlich das plastische Steinsalz dadurch emporgepreßt wurde.

Ich verweise hierbei nur auf die hochinteressanten Versuche von F. Rinne [2]), welcher bei einem Druck von 2000 kg/qcm eine sehr weitgehende Umformung von Steinsalz- und Sylvin-Spaltungsstücken erzielte bei unverändertem Zusammenhang und optischem Verhalten.

Das Steinsalz wich dem Druck dann nach den Stellen hin aus, an welchen es den geringsten Widerstand fand, vielleicht zu verschiedenen Zeiten nach verschiedenen Seiten, wurde besonders

1) Die tertiären Ablagerungen des Solling. Göttingen 1885 u. Neues Jahrbuch f. Mineralogie 1885 I.

2) Plastische Umformung von Steinsalz und Sylvin unter allseitigem Druck. (Neues Jahrbuch f. Mineralogie 1904 I, S. 114.)

in seinem oberen Theile ausgewalzt und mit ihm das darüber folgende Kalisalz und der unter dem festen Anhydrit liegende Salzthon.

Bei dieser Aufblähung wurde aber das Deckgebirge des Salzes, namentlich der Anhydrit sowie der Buntsandstein, vielfach zerrüttet, zerstückt und verschoben. Andere Störungen wurden auch wohl durch die Volumenzunahme bei der Umwandlung von Anhydrit in Gyps herbeigeführt, und der oberste Theil der Salzmassen wurde schließlich durch zutretendes Tagewasser bis zu einer gewissen Tiefe aufgelöst und fortgeführt, so daß das Deckgebirge vielfach einsank; in die bei allen diesen Vorgängen entstandenen Spalten und Vertiefungen zwischen den einzelnen Schollen, mit der Sattelspalte anzufangen, rutschten dann die dort z. Z. noch vorhandenen jüngeren Gesteine hinein, also Mittlerer Buntsandstein und Tertiärgebirge.

Von den gewaltigen Abspülungen, durch welche dann fast das ganze Tertiärgebirge und große Buntsandsteinmassen des Solling abgetragen wurden, mußten aber diese unzusammenhängenden Schollen von Buntsandstein etc. in wesentlich höherem Umfange fortgeführt werden, als der weniger gestörte, wirklich anstehende Buntsandstein, und so entstanden denn solche breite Einsenkungen der Oberfläche wie bei Volpriehausen, welche durch Erosion immer weiter zerschnitten wurden, unter welchen in auffallend geringer Tiefe Steinsalz und auch Kalisalze in mannigfaltig gestörter Lagerung angetroffen werden können.

Die Lagerung des Kalisalzlagers von Justus I würden wir uns nach allem diesem in der Weise entstanden denken können, daß infolge des von unten wirkenden Druckes eine schräg nach oben, hauptsächlich nach Nordwesten gerichtete Schleife emporgetrieben wurde, deren vorderstes Ende nicht sonderlich ausgewalzt wurde, wohl stellenweise auch eine Specialmulde enthielt und dann zurückblieb, so daß die beiden Flügel daran vorbeigeschoben wurden, wohl auch gelegentlich Theile ihres vorderen Randes zurückließen, wie einzelne kleine Streifen von Kalisalz in Steinsalz und wie namentlich die unregelmäßigen, von Steinsalz umgebenen Streifen von Kalisalz und Salzthon (vermengt mit Anhydrit und Steinsalz), welche nahe dem Westflügel der Profile GH, JK auftreten und auf EF in einen querliegenden Klumpen übergehen.

Die vorstehend kurz geschilderte Lage der Schichten in diesen Bergwerken ist nun mehr oder minder verschieden von dem an

der Tagesoberfläche sichtbaren Gebirgsbau, wenn auch die hier auftretenden Hauptstörungen auch im Untergrunde fortsetzen; es ist dabei aber sicher nicht ohne Interesse, daß die Lagerung im Untergrunde mancherlei Aehnlichkeit mit dem Gebirgsbau der Alpen oder auch der gefalteten, paläozoischen Schichten des Harzes und ähnlicher Gebirgsmassen zeigt.

So sind zunächst manche Reibungs-Breccien und verquetschte Salzmassen von Hohenzollern, Salzgitter etc. vergleichbar dem Salz, dem Haselgebirge des Salzkammergutes, manche Gesteins-Breccien von Salzgitter erinnern an Breccien der Alpen, wie sie z. B. am Untersberg im Kontakt der hellen Tithonkalke und der mürben, rothen Gosaubildungen auftreten, oder an manche Kieselschiefer-Breccien, und der zermalmte, durch dunklen Thon verkittete Muschelkalk aus dem Querschlage der 300 m Sohle der Hercynia unterscheidet sich von manchen Trümmergesteinen der Alpen vornehmlich durch weit geringere Festigkeit, entsprechend der mürberen Beschaffenheit des Gesteins; die z. Th. recht weitgehende Verruschelung des Muschelkalks in dem 1075 m tiefen Querschlage von Salzgitter zeigt recht bedeutende Aehnlichkeit mit manchen Vorkommen paläozoischer Gesteine des Harz etc, und der Salzthon von Volpriehausen zeigt, wie erwähnt, zum Theil eine ganz ausgeprägte Gneiß-Struktur.

Eine Erklärung für diese Aehnlichkeit im Schichtenbau und der Struktur dürfte aber zunächst darin zu suchen sein, daß bei der Entstehung der Störungen die Gesteine im tiefen Untergrunde einem allseitigen starken Druck ausgesetzt waren und weniger leicht ausweichen konnten, als die der Oberfläche näher liegenden, dann aber auch darin, daß das Salz eben plastisch ist, gänzlich umgeformt werden konnte und den Druck in anderer Weise weiterhin mittheilte, als dies bei starren Gesteinen der Fall sein kann.

Endlich mögen derartige liegende Falten, wie sie auf Justus I durch den Bergbau nachgewiesen sind, und wie sie aus den Alpen und den paläozoischen Schichten des Harzes genugsam bekannt sind, auch in geringerer Tiefe bei uns häufiger auftreten, sind aber bisher nach dem Ergebniß einzelner Bohrlöcher wohl zu vermuthen, aber nicht mit Sicherheit nachgewiesen.

Ueber die Dissociation des Wasserdampfs.

Von

W. Nernst und H. v. Wartenberg.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

Genauere Bestimmungen über die Dissociation des Wasserdampfs liegen unseres Wissens bisher nicht vor, obwohl dieselbe für viele wissenschaftliche und technische Fragen von hoher Bedeutung ist. Im Folgenden beschreiben wir Versuche und Messungen, die zu einer, wie wir hoffen, ziemlich genauen Kenntnis dieser Dissociationsverhältnisse geführt haben.

Das Prinzip der angewandten Methode bestand darin, daß Wasserdampf durch ein auf hoher konstanter Temperatur erhaltenes Gefäß hindurch und aus einer engen Kapillare, in der der Wasserdampf sich rasch abkühlte, herausgeleitet wurde. Aus der Menge freien Knallgases, die der austretende Wasserdampf enthielt, der übrigens bereits vor seinem Eintritt in den Erhitzungsraum mit wechselnden Mengen Knallgases beladen werden konnte, ließ sich dann auf Grund der in einer früheren Mitteilung [1]) angestellten Betrachtungen das Gleichgewicht ableiten. Dieselben lehren zugleich, daß bei obiger Methode alles darauf ankommt, ein Temperaturgebiet zu finden, in welchem die Reaktionsgeschwindigkeit einerseits groß genug ist, daß in dem Erhitzungsraum die betreffende Reaktion sich merklich abspielt, andererseits aber auch nicht so groß, daß während der Abkühlungsperiode das Gleichgewicht sich merklich wieder verschiebt. Ein solches Temperaturgebiet muß es stets geben; um aber brauchbare Zahlen zu gewinnen, kommt noch als weitere Bedingung hinzu, daß es sich nicht um gar zu geringe und daher der Analyse unzugängliche Substanzmengen handelt. Im Falle des Wasserdampfs kann man

1) W. Nernst, Diese Nachrichten 1904, Heft 4.

unterhalb etwa 1100° kaum arbeiten, weil die Mengen freien Knallgases, die dem Dissociationsgleichgewicht entsprechen, zu minimal für eine sichere Bestimmung werden; nach oben hin liegt die Grenze, die unseren Versuchen durch zu große Reaktionsgeschwindigkeit gesteckt wurde, bei etwa 1200°. Innerhalb dieses ziemlich engen Temperaturintervalls ließen sich aber hinreichend sichere Zahlen gewinnen, auf Grund deren wir dann thermodynamisch für ein größeres Temperaturintervall die Dissociationsverhältnisse des Wasserdampfs berechnen konnten.

Es sei noch bemerkt, daß wir zu der unten mitgeteilten speziellen Versuchsanordnung erst auf Grund sehr langwieriger Vorversuche gekommen sind; über manche vielleicht nicht uninteressante Einzelheiten derselben wird der eine von uns (W.) an anderer Stelle ausführlich berichten. Hier sei nur noch erwähnt, daß bereits im Laufe des Sommers 1903 von Herrn Th. Wulf und W. Nernst Versuche angestellt wurden, bei denen Wasserdampf durch eine elektrisch erhitzte Quarzkapillare, in deren Innern ein Thermoelement ausgespannt war, hindurchgeleitet wurde. Schon bei einer Temperatur des Thermoelements von 861° ergaben sich merkliche Mengen von Knallgas; doch waren die Resultate insofern unsicher, als sie mit der Strömungsgeschwindigkeit des Wasserdampfs anwuchsen, und man konnte daher nur schätzungsweise eine Dissociation im Betrage von etwa 0,004% für obige Temperatur ableiten. Es zeigte sich dann auch später, daß bei dieser Versuchsanordnung das Thermoelement merklich kälter als die Kapillare war, indem der hindurchströmende Wasserdampf sich nur unvollkommen erwärmte. Die beobachteten Mengen Knallgas dürften sich hauptsächlich unmittelbar an der heißeren Quarzwand gebildet haben, sodaß der so gefundene Wert der Dissociation etwa 5mal zu groß ausfiel. Immerhin ging aus diesen Versuchen bereits hervor, daß eine Bestimmung der Dissociation des Wasserdampfes auf dem benutzten Wege möglich sein würde, was von vornherein natürlich nicht sicher war.

Von weiteren Vorversuchen sei noch erwähnt, daß beim Hindurchleiten von Wasserdampf durch ein kugelförmiges, an beiden Enden mit einer Kapillare versehenes Porzellangefäß, das sich innerhalb eines Platindrahtofens befand und an das außen ein Thermoelement gelegt war, sich bei einer Temperatur von 1100° ein Wert der Dissociation von 0,007 ableiten ließ, welcher Wert den unten mitgeteilten Zahlen sich bereits recht gut anschließt.

I. Versuchsanordnung.

Nachdem der zuletzt mitgeteilte Vorversuch bereits gelehrt hatte, daß mit Porzellangefäßen sich günstige Resultate erzielen ließen, während Versuche mit Gefäßen aus Platin, Quarz oder Silber Hindernisse sehr verschiedener Natur bereitet hatten, benutzten wir auch bei unseren definitiven Versuchen von der Königlichen Porzellanmanufaktur angefertigte außen glasierte Gefäße der in Fig. 1 angegebenen Form. Sie bestanden aus einem länglichen Gefäß, an das sich einerseits eine Kapillare von 0,5 mm Lumen, andererseits ein etwa 6 mm weites Rohr anschloß, das mit einem T-förmigen Ansatz versehen war. Die genaueren Dimensionen des Rohres wie auch der übrigen Teile sind aus der Figur zu entnehmen.

In das weite Rohr war ein Thermoelement von Heraeus eingeführt, welches in ein vorn zugeschmolzenes dünnwandiges glasiertes Porzellanrohr gesteckt war. Das Ansatzrohr diente zum Einleiten des Wasserdampfes, der in einem Gefäß der beigezeichneten Form entwickelt wurde. Ein Kölbchen von ca. 250 ccm Inhalt war mit zwei eingeschmolzenen Platindrähten versehen, durch die ein gemessener mittelst eines Präcisionsinstruments abzulesender Strom behufs Entwicklung von bekannten Mengen Knallgas geschickt werden konnte. Außerdem war noch ein Quecksilbermanometer zur angenährten Druckmessung angebracht; der daran befindliche Hahn diente zur Dämpfung der Schwankungen der Quecksilbersäule. Da bei allen Versuchen etwas Knallgas entwickelt wurde, so erfolgte das Sieden und demgemäß auch das Durchleiten des Wasserdampfes sehr regelmäßig. Das Wasser war etwas alkalisch gemacht, um auch Spuren von Wasserstoffsuperoxydbildung bei der Elektrolyse zu vermeiden; die Dichtungen geschahen durch Gummischläuche. Der aus dem Porzellanrohr austretende Wasserdampf strömte durch eine mit Siegellack angekittete Glaskapillare in eine kleine Quecksilberwanne und wurde in einem Eudiometer von 18 cm Länge und einem Inhalt von 3 ccm kondensiert und aufgefangen. Es konnten so Knallgasmengen von wenigen Hundertstel ccm noch gemessen werden. Zur weiteren Kontrolle wurde Wasserdampf, dem kleine Mengen von Knallgas elektrolytisch beigemengt waren, in der beschriebenen Versuchsanordnung bei nur schwacher Erhitzung des Porzellangefäßes durchgeschickt und das Knallgas in guter Uebereinstimmung mit den nach Faraday's Gesetz berechneten gefunden. Vielleicht dürfte sogar eine derartige Versuchsanordnung, bei der durch den kochenden Wasserdampf das Knallgas sicherlich praktisch stets quantitativ entfernt wird und bei welcher daher nicht nur die Korrektion wegen der Löslichkeit der Gase

äußerst klein, sondern auch eine gegenseitige Einwirkung der beiden Gase an den Elektroden nicht in Frage kommt, ein sehr genaues Knallgasvoltameter darstellen.

Als elektrische Heizvorrichtung benutzten wir ein Platinrohr von 0,2 mm Wandstärke, an welches schwachfedernde Kupferbleche als Elektroden hart angelötet waren. Das Rohr war außendurch in einem Asbestkasten befindliche Magnesia isoliert. Als Heizstrom diente Wechselstrom von etwa 1,8 Volt und 300 Ampere, der von einem rotierenden Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer geliefert und durch einen passend gewickelten Transformator auf die gewünschte niedrige Spannung transformiert wurde. Auf Grund vieler Erfahrungen hat sich ergeben, daß solche Platinöfen aus einem massiven Rohr an Gleichmäßigkeit der Temperatur und vor allem an Haltbarkeit und daher schließlich auch an Billigkeit den gewickelten Platinöfen ganz außerordentlich überlegen sind. Nachdem zur Verhinderung der Wärmestrahlung eine Reihe von Chamotte- und Asbestscheiben, wie gezeichnet, auf die beiden Röhren des Porzellangefäßes geschoben waren, zeigte sich bei der Prüfung der Temperatur im Innern des Porzellangefäßes durch Verschieben des Thermoelements, daß selbst bei 1100° keine Temperaturdifferenzen von über 10° im Innern des Gefäßes vorhanden waren.

Es erwies sich als nützlich, den austretenden Teil der Porzellankapillare durch Filtrierpapier, das unten in Wasser tauchte, zu kühlen.

2. Versuchsergebnisse.

Tabelle 1—3 enthält unsere definitiven Resultate. Es zeigte sich, daß nach Explosion des im Eudiometer befindlichen Gases, welches zu diesem Zwecke in ein hohes Quecksibergefäß gesetzt war, noch ein Gasrest überblieb. Derselbe bestand, abgesehen von kaum meßbaren Spuren von Stickstoff, stets aus Wasserstoff. Luft war also jedenfalls nicht von außen hineingetreten, die ganze Apparatur und vor allem das glühende Porzellangefäß hatte dicht gehalten. Zum Teil wird das Auftreten überschüssigen Wasserstoffs aus der fast gleichen Löslichkeit von Wasserstoff und Sauerstoff im Wasser bei den betreffenden Partialdrucken erklärt. In einem Kubikcentimeter Wasser lösen sich nämlich bei 20° rund je 0,01 ccm der beiden Gase (genauer 0,013 H_2 und 0,011 O_2), sodaß also pro ccm flüssigen Wassers im Gasraum ein Ueberschuß von 0,01 ccm Wasserstoff entsteht. Es findet sich jedoch, besonders bei Temperaturen oberhalb 1100°, noch ein weiterer Ueberschuß, dessen Ursprung sich vermutlich aus einem Angriff des Wasserdampfs auf das Porzellangefäß, bez. darin vorhandene Oxydulverbindungen,

erklärt. Wie dem auch sei, der Tatsache des überschüssigen Wasserstoffs mußte Rechnung getragen werden, weil er die Dissociation ein wenig zurückdrängt, wie mit Anwendung des Gesetzes der Massenwirkung ja leicht berechnet werden kann. (S. w. u.)

Die Tabellen werden am einfachsten verständlich werden, indem wir etwa den ersten Versuch von Tabelle 1 als Beispiel berechnen. Bei diesem Versuche, der 30 Minuten dauerte, war dem Wasserdampf 0,086 Volumprozente Wasserstoff und daher auch die äquivalente Menge Sauerstoff elektrolytisch beigemengt. Aufgefangen wurden 2,15 ccm Wasser, sodaß also die Strömungsgeschwindigkeit 0,072 (Spalte 3 u. 4) betrug; die gefundene Knallgasmenge enthält Spalte 5, während in Spalte 6 der Rückstand verzeichnet ist; die gelöste Knallgasmenge beträgt 2,15 mal 0,02, wozu von dem rückständigen Wasserstoff noch 0,0215 hinzuzufügen ist, in Summa also 0,065, welche Zahl in der siebenten Spalte verzeichnet ist. Es verbleibt also ein Ueberschuß von 0,08 — 0,02 = 0,06 ccm Wasserstoff, dessen Einfluß auf die Dissociation nach dem Gesetz der Massenwirkung sich folgendermaßen berechnet. Da die aktive Masse des Wasserdampfs praktisch konstant bleibt, so muß

$$[H_2]^2 \cdot [O_2] = \frac{a^3}{2}$$

sein, wenn a den Wert der Dissociation ohne Ueberschuß an Wasserstoff bedeutet; bei vom Gleichgewicht entfernten Werten ist obiges Produkt der Geschwindigkeit proportional, mit der es dem Gleichgewicht zustrebt. In unserem speziellen Beispiel ist

$$(0,275 \cdot \tfrac{2}{3} + 0,06)(0,275\,\tfrac{1}{3}) = \frac{a^3}{2}$$

oder

$$a = 0,221;$$

da die insgesamt gefundeue Wasserstoffmenge 0,243 betrug, so ist die Korrektion selbst in diesem, wegen der Kleinheit der vorhandenen Knallgasmenge ganz besonders ungünstigen Falle immerhin nicht sehr bedeutend. Auf 0° und 760 mm reduziert — der obige Wert bezieht sich auf 20° und einen Partialdruck von 723 mm — folgt für a 0,196, welcher Wert in der vorletzten Spalte sich befindet. Da schließlich 1 gr Wasserdampf unter Normalbedingungen 1242 ccm anfüllen würde, so folgt als Endwert (letzte Spalte)

$$x = \frac{0,196}{2,15 \cdot 1242} = 0,0073\,\%.$$

In den folgenden Tabellen bedeutet ferner ε die abgelesene elektromotorische Kraft des Thermoelements in Millivolt, ε_0 diejenige beim Goldschmelzpunkt (1064°).

Tab. 1.

$\varepsilon = 10{,}80$ $\varepsilon_0 = 10{,}10$ $t = 1124^\circ$

Versuchsdauer	Elektrolytisch beigemengtes Knallgas mal $^2/_3$	Wasser	ccm Wasser pro min	Gefundenes Knallgas	Andere Gase	Gelöstes Knallgas	Ueberschuß an Wasserstoff	Korrigiertes Knallgas mal $^2/_3$	Austretendes Knallgas mal $^2/_3$	x %
30	0,0086 %	2,15	0,072	0,21	0,08 H_2 0,01 N_2	0,065	0,06	0,196	0,0073 %	
22	0,0227 "	2,10	0,093	0,38	0,12 H_2 0,04 N_2	0,063	0,10	0,319	0,0123 "	0,0075
20	0,0149 "	2,08	0,104	0,40	0,02 H_2 0,01 N_2	0,062	0,00	0,273	0,0105 "	
10	0,0027 "	2,32	0,232	0,18	0,02 H_2	0,069	0,00	0,147	0,0051 "	
10	0,0230 "	2,02	0,202	0,53	0,10 H_2 0,02 N_2	0,060	0,08	0,391	0,0155 "	0,0080
9	0,0123 "	2,05	0,228	0,40	0,02 H_2	0,061	0,00	0,272	0,0106 "	
										0,0078

Tab. 2.

$\varepsilon = 11{,}80$ $\varepsilon_0 = 10{,}08$ $t = 1207$

Versuchsdauer	Elektrolytisch beigemengtes Knallgas mal $^2/_3$	Wasser	ccm Wasser pro min	Gefundenes Knallgas	Andere Gase	Gelöstes Knallgas	Ueberschuß an Wasserstoff	Korrigiertes Knallgas mal $^2/_3$	Austretendes Knallgas mal $^2/_3$	x %
20	0,0779 %	1,19	0,060	0,43	0,06 H_2 0,13 N_2	0,036	0,04	0,315	0,0211 %	
20	0,0558 "	1,66	0,083	0,52	0,02 N_2 0,02 H_2	0,050	0,00	0,443	0,0213 "	0,0188
20	0,0351 "	1,75	0,087	0,57	0,10 H_2 0,18 N_2	0,052	0,08	0,420	0,0192 "	
20	0,0157 "	1,97	0,097	0,75	0,20 N_2	0,059	0,00	0,456	0,0186 "	
8	0,0278 "	1,78	0,222	0,74	0,02 H_2	0,053	0,00	0,476	0,0214 "	0,0198
10	0,0030 "	2,06	0,206	0,64	0,03 H_2	0,062	0,01	0,422	0,0164 "	
6	0,0046 "	2,04	0,340	0,63	0,04 H_2 0,04 N_2	0,061	0,02	0,426	0,0167 "	0,0181
6	0,0138 "	2,06	0,342	0,68	0,04 H_2 0,04 N_2	0,062	0,02	0,455	0,0177 "	
										0,0189

Tab. 3.

$\varepsilon = 12{,}8$ $\varepsilon_0 = 10{,}11$ $t = 1288^\circ$

Versuchsdauer	Elektrolytisch beigemengtes Knallgas mal $^2/_3$	Wasser	ccm Wasser pro min	Gefundenes Knallgas	Andere Gase	Gelöstes Knallgas	Ueberschuß an Wasserstoff	Korrigiertes Knallgas mal $^2/_3$	Austretendes Knallgas mal $^2/_3$	x %
13	0,0258 %	1,56	0,120	1,06	0,10 H_2	0,047	0,08	0,663	0,0340	
13	0,0076 "	1,59	0,122	1,06	0,02 H_2	0,048	0,00	0,618	0,0310	0,0343
12	0,0498 "	1,49	0,124	0,78	0,16 H_2	0,045	0,14	0,578	0,0311	
6	0,0376 "	1,49	0,247	1,04	0,04 H_2	0,045	0,02	0,613	0,0330	
6	0,0247 "	1,50	0,250	0,98	0,04 H_2	0,045	0,02	0,653	0,0350	0,0340
6	0,0062 "	1,50	0,250	1,03	0,02 H_2	0,045	0,00	0,616	0,0328	

3. Diskussion der Versuchsergebnisse.

Der einfachste und sicherste Weg zur Ableitung der Gleichgewichtswerte dürfte folgender sein.

Wenn man die bei einer bestimmten Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit gefundenen Werte von x aufträgt (vgl. Fig. 2),

indem als Abscissen die Mengen elektrolytisch hinzugefügten Wasserstoffs dienen, so findet man dieselben ziemlich nahe auf einer Geraden liegend. Demgemäß kann man einfach und sicher alle Werte, die einem beliebigen Werte der beigemengten Wasserstoffmenge entsprechen, durch gradlinige Interpolation (oder auch geringe Extrapolation) ermitteln. Berechnet man daher denjenigen Wert, bei welchem die hinzugefügte Wasserstoffmenge gleich der gefundenen wird, so muß diese der wirklichen Gleichgewichtskonzentration entsprechen, vorausgesetzt natürlich, daß sich in der Kapillare nicht nachträglich das Gleichgewicht wieder verschoben hat.

Offenbar müssen bei gleichen Strömungsgeschwindigkeiten die betreffenden Geraden um so steiler ansteigen, je niedriger die Temperatur ist, weil z. B. ein Ueberschuß beigemengten Knallgases sich infolge der durch Temperaturerniedrigung verringerten Reaktionsgeschwindigkeit um so stärker im Resultat fühlbar machen wird. Ferner müssen bei gleicher Temperatur die Geraden um so stärker geneigt sein, je höher die Strömungsgeschwindigkeit ist, weil die x-Werte um so weiter vom Gleichgewicht entfernt sein werden, je kleiner die Zeit ist, die dem Wasserdampf zur Einstellung des Gleichgewichts zur Verfügung steht. Drittens, und dies ist das wichtigste Kriterium für die Zulässigkeit unseres Verfahrens, müssen sich natürlich für die verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten bei gleicher Temperatur übereinstimmende Werte des Dissociationsgrades ergeben.

Die besprochenen Verhältnisse finden sich nun in sehr ausgesprochener Weise erfüllt bei den Temperaturen 1124° und 1207°. In der letzten Columne von Tabelle 1 und Tabelle 2 sind die aus Gruppen von Beobachtungen mit nahe gleicher Strömungsgeschwindigkeit abgeleiteten Zahlen bezeichnet; bei der graphischen Darstellung sind es einfach die Schnittpunkte der betreffenden geraden Linien mit einer unter 45° durch den Anfangspunkt der Koordinaten gelegten Geraden; diese Schnittpunkte geben ja die Werte an, bei denen die zugemengte Knallgasmenge gleich der nachträglich gefundenen wird. Anders liegt die Sache aber bei der höchsten Temperatur; hier sind die gefundenen Zahlen bei großem Ueberschuß ursprünglich beigemengten Knallgases nur wenig von denen mit geringem Ueberschuß verschieden, d. h. wir befinden uns in einem Gebiete sehr hoher Reaktionsgeschwindigkeit, wo entsprechend die Gefahr eines Rückganges der Dissociation in der Abkühlungsperiode bereits nahe liegt. Die sehr auffällige Krümmung der Verbindungslinien weist eben-

falls auf Unregelmäßigkeiten hin, die jedenfalls im gleichen Umstande zu suchen sind. Bei einer Wiederholung der Versuche unter sonst gleichen Bedingungen ergaben sich, offenbar infolge Zunahme einer katalytischen Wirkung der vom Wasser angegriffenen Wände der Austrittskapillare, sogar noch etwas niedrigere Werte. Wir können also sehr wahrscheinlich annehmen, daß die bei der höchsten Temperatur gefundenen Werte bereits unter der erwähnten Störung gelitten haben, d. h. merklich zu klein ausgefallen sind. Dies Resultat werden wir gleich auf einem anderen Wege prüfen und bestätigen können.

Wir erhalten also schließlich folgende Werte des Dissociationsgrades

t	x
1124	0,0078 %
1207	0,0189 %
1288	ca. 0,034 %.

4. Thermodynamische Behandlung der Versuchsergebnisse.

Für die Reaktion

$$2H_2O = 2H_2 + O_2$$

gelten die Gleichungen[1])

$$(1) \quad K = \frac{P}{RT}\frac{x^3}{(2+x)(1-x)^2} \quad \text{u. (2)} \quad q = -RT^2\frac{d\ln K}{dT};$$

darin bedeutet P den Druck des Wasserdampfs und R die Gaskonstante (1,985 im kalorischen Maaß). Für die Wärmetönung benutzen wir den Wert 58000 pro Mol H_2O, der sich auf 100° und konstanten Druck bezieht; somit wird für constantes Volum u. $T = 373$

$$-q = 116000 - 2\,T = 115300.$$

Wenn wir nach den offenbar sehr vorsichtigen Messungen und Rechnungen von A. Langen[2]) für die mittlere spezifische Wärme von $2H_2 + O_2$

$$13{,}9 + 0{,}0018\,T$$

und von $2H_2O$

$$10{,}6 + 0{,}0043\,T$$

einsetzen, so wird

$$(3) \qquad -q = 114400 + 3{,}3\,T - 0{,}0025\,T^2.$$

Die Integration von (2) liefert

$$\ln K = \ln K_0 - \frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{\alpha}{R}\ln\frac{T}{T_0} - \frac{\beta}{R}(T - T_0),$$

---

1) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie 4. Aufl. S. 644 u. S. 634.

2) Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 47 S. 637 (1903).

worin Q, α, β die drei Koefficienten der Gleichung (3) bedeuten; führen wir gewöhnliche Logarithmen und die betreffenden Zahlenwerte ein, so wird

$$\log K = \log K_0 - 25030\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + 1,65 \log \frac{T}{T_0} - 0,00055\,(T - T_0)$$

Setzen wir

$$T_0 = 1000^{\circ} \text{ und } x_0 = 0,311 . 10^{-4} \text{ Prozent},$$

so wird

$$(4) \qquad {}^{10}\log \frac{2x^3}{\left(2 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2} =$$

$$11,51 - \frac{25030}{T} + 2,65 \log \frac{T}{1000} - 0,00055\;(T - 1000);$$

die numerische Ausrechnung wird dadurch sehr erleichtert, daß in dem betrachteten Temperaturgebiete x klein gegen 100 ist; wie durch eine Reihenentwicklung leicht zu erhalten, genügt es, zur Berechnung von x selbst bis zu zehnprozentiger Dissociation, wenn man von dem durch 3 dividierten rechts stehenden Ausdruck den Numerus nimmt und mit $\left(1 - \frac{x}{200}\right)$ multipliciert.

Im Folgenden finden sich die nach Gleichung (4) erhaltenen Werte von x für eine Reihe von Temperaturen.

T	t	x (in Prozenten)
1000	727	$0,311 . 10^{-4}$
1100	827	$0,187\ 10^{-3}$
1200	927	$0,891\ 10^{-3}$
1300	1027	$0,293\ 10^{-2}$
1400	1127	$0,846\ 10^{-2}$
1500	1227	0,0219
1600	1327	0,0490
1700	1427	0,101
1800	1527	0,190
1900	1627	0,334
2000	1727	0,561
2100	1827	0,861
2200	1927	1,27
2300	2027	1,94
2400	2127	2,73
2500	2227	3,43.

Daß Gleichung (4) unsere Ergebnisse in der Tat gut wiedergiebt, zeigt folgende Tabelle:

T	t	x beob.	x ber.
1397	1124	0,0078	0,0083
1480	1207	0,0189	0,0183
1561	1288	0,034	0,0363
1804	1531	0,18	0,195

Insbesondere ergiebt sich, wie zu erwarten, der bei $t = 1288^0$ gefundene Wert in der Tat als etwas zu klein. Der für $t = 1531^0$ in der Tabelle verzeichnete Wert rührt von Herrn stud. L. Löwenstein her, der im hiesigen Laboratorium seit längerer Zeit mit Messungen beschäftigt ist, den Druck des Wasserstoffs zu bestimmen, der sich im Innern einer auf hohe Temperatur gebrachten evakuierten Platinbirne herstellt, um die außen Wasserdampf strömt. Diese Methode scheint bei hinreichend hohen Temperaturen sehr sichere Werte zu geben; Herr Löwenstein wird demnächst selber über seine Resultate berichten und es sei hier nur noch bemerkt, daß der obige Werth, wenn auch wohl keinesfalls erheblich von der Wahrheit entfernt, doch nur ein vorläufiger ist. Immerhin wird die relativ gute Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung auch in diesem Falle das Vertrauen in die Exaktheit der Gleichung (4) zu erhöhen geeignet sein.

Von mancherlei weiteren Erörterungen, die sich an die obigen Ergebnisse knüpfen ließen, sei hier abgesehen und nur noch bemerkt, daß sich die Aenderung der spezifischen Wärme des Wasserdampfs mit der Temperatur aus hinreichend genauen Daten für die Dissociationswerte ziemlich sicher wird ableiten lassen. Für die elektromotorische Kraft der Knallgaskette ergiebt sich aus der bekannten Formel [1])

$$\varepsilon = \frac{RT}{4} \ln \frac{1}{\pi_1^2 \pi_2},$$

worin π_1 und π_2 die Partialdrucke von Wasserstoff und Sauerstoff in gesättigtem Wasserdampf bedeuten, folgenden Wert. Es wird z. B. für $T = 290$ ($t = 17^0$) nach Gl. (4)

$$x = 0{,}537 . 10^{-25} \, \%$$

und auf den Dampfdruck des Wassers = 0.0191 Atm. reduziert

$$x = \frac{0{,}537 . 10^{-25}}{\sqrt[3]{0{,}0191}} = 2{,}01 . 10^{-25} \, \%.$$

1) Vgl. z. B. Prenner, Zeitschr. phys. Chem. 42. 57. (1902).

Somit wird

$$\pi_1 = 0{,}0191 . 2{,}01 . 10^{-27} \text{ Atm. und } \pi_2 = \frac{0{,}0191 . 2{,}01 . 10^{-27}}{2} \text{ Atm.}$$

und daraus

$$\varepsilon = 0{,}01438 \log^{10} 3{,}52 . 10^{85} = 1{,}2302 \text{ Volt.}$$

Wir sind übrigens, wie wir demnächst ausführlicher mitteilen werden, bei Wiederholung der von Preuner (l. c.) angestellten Rechnung, indem wir die von uns neu bestimmte Dissociation der Kohlensäure und ferner die Zahlen von Hahn[1]) über das Wassergasgleichgewicht zu Grunde legen, zu einem praktisch identischen Werte von ε gelangt, sodaß wir das obige Ergebnis, so weit es auch von dem bisher angenommenen Werte (1,15) abweicht, für sicher halten müssen.

Bei der Ausführung der vorstehenden Versuche standen uns, wie auch hier dankbar erwähnt sei, Mittel aus der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie zur Verfügung.

---

1) O. Hahn, Z. phys. Chem. 44. (1903.) 513. 48. (1904.) 735.

Göttingen, Januar 1905.

Institut für physikalische Chemie.

Weitere Beiträge zur Theorie des Färbevorganges.

Von

Wilhelm Biltz.

(Mitteilung aus dem chemischen Institute der Universität Göttingen.)

Vorgelegt von O. Wallach in der Sitzung vom 11. Februar.

I.

Messungen über die Bildung anorganischer Analoga substantiver Färbungen.

(Gemeinschaftlich mit Kurt Utescher.)

In einer früheren Mitteilung[1]) war gezeigt worden, daß zahlreiche anorganische Colloide ihrem Lösungswasser durch Fasern in qualitativ ähnlicher Weise entzogen werden, wie organische Farbstoffe. Es war aus dieser Tatsache auf eine Wesensverwandtschaft beider Vorgänge geschlossen und unter Berücksichtigung der Resultate anderer Autoren[2]) hinsichtlich der einfachsten Färbevorgänge, des Ausfärbens mit substantiven Farbstoffen, die Möglichkeit diskutiert worden, ob man diese einheitlich als Adsorptionswirkungen colloidaler Stoffe auffassen könnte. Zur weiteren Begründung einer solchen Auffassung blieben noch zwei Fragen zu erledigen: Im Einklange mit Adsorptionsversuchen anderer Art hat sich für die Verteilung substantiver Farbstoffe zwischen Faser und Flotte ergeben, daß aus einer verdünnten Lösung relativ mehr Farbstoff aufgenommen wird, als aus einer concentrierteren;

1) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1904. Heft 1.

2) Es ist nachzutragen, daß auch van Bemmelen im Laufe seiner Arbeiten über Adsorptionsverbindungen gelegentlich der gekennzeichneten Meinung Ausdruck verliehen hat. Z. f. anorg. Chem. 23. 333 [1900].

eine Adsorptionscurve mit den Concentrationen des Farbstoffs in der Faser (C_{Faser}) als Ordinate, den entsprechenden Concentrationen in der Flotte (C_{Flotte}) als Abscisse verläuft demnach concav gegen die Abscissenaxe und läßt sich vielfach durch eine Interpolationsformel von der Gestalt: $\frac{C^n_{Faser}}{C_{Flotte}} = K$ ausdrücken, in welcher der Exponent n größer als 1 und häufig ganzzahlig ist. Es war zu prüfen, ob bei der Aufnahme anorganischer Colloide durch die Faser ähnliche Beziehungen obwalten.

Des weiteren fordert die Adsorptionstheorie, daß anorganische Substrate von physikalisch ähnlicher Beschaffenheit, wie die pflanzliche und tierische Faser, nicht nur qualitativ, wie dies bereits v. Georgievics und neuerdings Heidenhain und Suida gezeigt haben, sondern auch quantitativ in gleicher Weise zur Farbstoffaufnahme befähigt sind.

Als anorganische Colloide wurden Molybdänblau, Vanadinpentoxyd und Silber, als organischer Vergleichsfarbstoff Benzopurpurin gewählt [1]).

1. Molybdänblau.

Ein blaues Oxyd des Molybdäns ist zuerst von Berzelius des näheren beschrieben und die Färbefähigkeit dieses Materials erkannt worden [2]). Von neueren Untersuchungen sind insbesondere die von Muthmann [3]) zu nennen, aus denen sich die Formel des Oxyds Mo_3O_8 ergab. Zur Darstellung des Farbstoffes empfehlen wir die folgende Vorschrift: Eine siedende Lösung von 15 gr käuflichem Ammoniummolybdat, $(NH_4)_6Mo_7O_{24}4H_2O$, in 250 ccm Wasser und 21 ccm 16 % Schwefelsäure werde durch einstündiges Einleiten von Schwefelwasserstoff reduciert; die Flüssigkeit färbt sich schon nach wenigen Augenblicken dunkelblau. Nach Beendigung der Reduktion wird vom ausgeschiedenen Schwefel abfiltriert, das Filtrat durch 4—6tägige Dialyse von Elektrolyt befreit — das Dialysat muß schwefelsäurefrei und nahezu farblos sein — und der Farbstoff durch Eindampfen isoliert. Man erhält eine vollkommen amorphe, tiefdunkelblaue Masse, die durch Zerreiben bei Wasserbadtemperatur getrocknet werden kann und sich ohne

---

1) Ueber einige dieser Versuche ist bereits in anderem Zusammenhange vorläufig berichtet worden; Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1904. Heft 1.

2) Lehrb. d. Chem. V. Bd. 2, 355 [1844].

3) Ann. 238, 124 [1887].

Rückstand in Wasser lösen muß. Die Ausbeute beträgt etwa 7 gr. Wird zu der geschilderten Reduktion nicht die zum Freimachen der Molybdänsäure aus dem Molybdat berechnete Menge Schwefelsäure verwendet, so erhält man bei zu starkem Zusatz, vermutlich durch Bildung der von Schultz-Sellack[1]) erwähnten Molybdänschwefelsäure eine sehr viel geringere Ausbeute, im anderen Falle färbt sich bei der Reduktion die Lösung grün, oder es tritt Abscheidung von Molybdänsulfid ein.

Eine krystallisierte Modifikation von Molybdänblau, $Mo_3O_8.5H_2O$, ist von Marchetti[2]) beschrieben worden. Es wäre gewiß von höchstem Interesse gewesen, das Verhalten dieser Modifikation, die sich als Krystalloid in Wasser lösen soll, mit dem der colloidalen Lösung zu vergleichen; leider war es uns in zahlreichen Versuchen nicht möglich, nach den Angaben dieses Autors durch elektrolytische Reduktion salzsaurer Lösungen von Molybdändioxyd andere als amorphe Massen zu erhalten, die dementsprechend in Lösung sich als vollkommenes Colloid verhielten.

Die Analyse eines unserer exsiccatortrockenen Präparate erwies die Abwesenheit von Schwefelsäure; der durch Ueberführen der Substanz in Molybdäntrioxyd ermittelte Molybdängehalt betrug im Mittel von vier Bestimmungen 58.53 %, und zwar lag, wie nach einer von Muthmann ausgearbeiteten Titrationsmethode mit Permanganat bestimmt wurde, ein Oxydgemenge von der Durchschnittsformel Mo_6O_{17} vor. Das Präparat enthielt demnach 86.2 % dieses Oxyds, der Rest bestand aus Wasser. Der starke Gehalt des Molybdänblaus an Molybdäntrioxyd ist, wie die nachfolgenden Versuche zeigen, der Haltbarkeit des Materials förderlich.

Die Haltbarkeit der Molybdänblaulösungen wechselt stark mit der Verdünnung und der Temperatur. Kalte, concentrierte Lösungen bleiben lange praktisch unverändert. Bei längerem Kochen unter Rückfluß tritt bis zu einem gewissen Grade Oxydation ein. Je 20 ccm einer 5 % Lösung beanspruchen nach 15, 30 und 45 Min. langem Kochen 21.10, 20.10, 19.90 ccm $^1/_{50}$ *n* Permanganat; nach 50 Min. wird der Titer konstant. Wie vorauszusehen war, kann man demgemäß einer Oxydation vorbeugen, wenn man den Gehalt der Substanz an Molybdäntrioxyd durch Zusatz technischen Ammoniummolybdats von vornherein noch vergrößert. Es lieferten je 20 ccm einer 2.5 % Molybdänblaulösung, die nach Zusatz von 4.5 % Ammoniummolybdat 0, 30, 45, 55, 65 und 75 Min. lang im Sieden er-

1) Ber. **4**, 14 [1871]. Vgl. Muthmann, Ann. **238**, 124.
2) Z. f. anorg. Chem. **19**, 391 [1899].

halten waren, die Titrationswerte: 10.20, 10.20, 10.15, 10.30, 10.30, 10.30 ccm $^1/_{50}$ n Permanganat. Die Probenahme während des Versuches erfolgte zur Vermeidung von Luftzutritt mit Hilfe eines im Stopfen des Kolbens angebrachten sog. Giftheber. Zu den Ausfärbeversuchen wurde derselbe Apparat benützt; es sind dabei folgende Vorsichtsmaßregeln zu beachten: 1. Die Titration des in der Flotte nach dem Ausfärben zurückbleibenden Farbstoffüberschusses mit Permanganat ist unausführbar, weil, zumal bei Seidenfärbungen, oxydierbare Substanz aus der Faser in die Flotte übertritt (Seidenleim). Die Farbstoffbestimmung muß daher colorimetrisch[1]) vorgenommen werden. 2. Aus demselben Grunde muß der colorimetrische Vergleich unmittelbar nach Entnahme der Farbstoffprobe erfolgen, da die Flotte sonst, vermutlich infolge von Reduction des Molybdäntrioxyds zu Molybdänblau, merklich nachdunkelt. 3. Die zum colorimetrischen Vergleich hergestellten, stark verdünnten Lösungen andererseits verblassen leicht durch Oxydation an der Luft; es empfiehlt sich also auch aus diesem Grunde ein möglichst schnelles Arbeiten. Unter Einhaltung dieser Vorsichtsmaßregeln erhält man indessen konstante Resultate.

Die Ausfärbung ist nach 70 Min. langem Kochen beendet; in jedem Falle enthielt die Flotte eine konstante Concentration von

---

1) Zu diesem Zwecke hat sich das Colorimeter nach Krüß mit Lummer- und Brodhun'schem Prismenpaar bestens bewährt. Z. f. anorg. Chem. 5, 325 [1893]; Optisches Institut von A. Krüß, Hamburg. Nach dem experimentellen Abschlusse der vorliegenden Mitteilung ist die allgemeine Brauchbarkeit der colorimetrischen Methode u. a. von Suida (W. M. 25, 1107 [1904]) bezweifelt worden. Nach unseren Erfahrungen betragen die Einstellfehler höchstens 5 %. Als sonstige Fehlerquelle kommt für saure und basische Farbstoffe der bei der Herstellung der Verdünnungen merklich werdende Einfluß der Hydrolyse in Betracht; ferner bei Seiden- und Wollfärbungen eine Trübung der Flotte durch Faserprodukte. Der erste Fehler läßt sich durch größere, konstante Säure- bzw. Alkalizuschläge eliminieren, der zweite durch hinreichend starkes Verdünnen der Flotten ausschalten. Wir erhielten z. B. identische Resultate, wenn gleiche Farbstoffmengen einmal mit reinem Wasser, ein zweites Mal mit einem, den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Volumen eines Wassers verdünnt wurden, das mit Wolle gekocht war. Bei Verwendung von Baumwolle traten überhaupt keine Unregelmäßigkeiten auf. Es wurde des weiteren die colorimetrische Methode mit der von Knecht (Chem. Ztg. 12, 857 [1888]) vorgeschlagenen Titrationsmethode mittelst Picrinsäure für Nachtblau- und Krystallviolettfärbungen auf Wolle verglichen. Die Resultate waren innerhalb 5 % die gleichen. Weitere Versuche über den Vergleich der colorimetrischen Methode mit den Titrationsergebnissen mittelst Titantrichlorid (Knecht, Ber. 36, 1549 [1903]) hatten das gleiche günstige Ergebnis. Die Differenz beim Färben von Seide mit Orange II betrug im höchsten Falle 3,5 %.

Ammoniummolybdat. Die hier und im folgenden verwendeten Gespinstfasern sind zu Probefärbungen bestimmtes Material, für dessen Ueberlassung wir der Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation zu Dank verpflichtet sind.

Die erste Spalte der folgenden Tabellen enthält die Anfangsconcentration der Flotten in Procenten.

Die Spalte 2 die Endconcentration in Procenten;

Spalte 3 den hieraus berechneten durch Farbstoffabgabe an die Faser bewirkten Verlust der Anfangsconcentration;

Spalte 4 die von 1 gr Substrat aufgenommene Menge Farbstoff in gr. Die procentischen Angaben beziehen sich im folgenden sämtlich auf die Flotte und nicht, wie dies in der Praxis üblich ist, auf die Faser.

Molybdänblau gegen Seide.

Je 1 gr Seide, 150 ccm Flotte, 6.75 gr Ammoniummolybdat.

1	2	3	4
0.20	0.057	0.143	0.215
0.50	0.124	0.376	0.564
2.00	0.400	1.60	2.40
3.00	0.650	2.35	3.525
4.00	1.22	2.78	4.17.

Durch Zusatz von Elektrolyten wird ebenso, wie bei den substantiven Farbstoffen der Effekt gesteigert. Bei einem Färbeversuch, der mit einem Zuschlag von 10 % krystallisiertem Glaubersalz ausgeführt wurde, entsprachen einer Endconcentration von 0.24 % eine an die Faser abgegebene Menge von 0.759 % Farbstoff; unter gleichen Bedingungen ohne Salzzuschlag entsprachen einer gleichen Endconcentration nur 0.30 % Farbstoffverlust. Bei einem zweiten Versuch kam auf eine Endconcentration von 0.69 % mit Salzzuschlag ein Farbstoffverlust von 1.31 %, ohne Salzzuschlag ein solcher von 0.85 %.

Molybdänblau gegen Baumwolle.

Je 1 gr Baumwolle, 130 ccm Flotte, 5.85 gr Ammoniummolybdat, 13 gr kryst. Natriumsulfat.

1	2	3	4
0.50	0.081	0.419	0.545
2.00	0.40	1.60	2.08
3.00	0.80	2.20	2.86
4.00	1.70	2.30	2.99.

Beschwerte Seide nimmt nur wenig Farbstoff und zwar mit etwas veränderter, mehr grauer Farbe auf; die aus der verdünnten Lösung aufgenommene Menge war indessen auch hier relativ größer, als die concentrierteren entzogene. Durch Gelatine oder

Seife wird Molybdänblau vollständig als gelatineuse Masse gefällt; auf eine etwaige Herabminderung des Färbeeffektes durch Zusatz dieser Präparate zu prüfen, war also nicht thunlich.

2. Vanadinpentoxyd.

Zur Bereitung von Vanadinpentoxydlösungen wurden je 5 gr Ammoniumvanadat mit etwas mehr als der äquivalenten Menge Salzsäure — 35 ccm 10 % Säure — verrieben und das ausgeschiedene rotbraune Oxyd auf einem Filter mit kaltem Wasser so lange ausgewaschen, bis das anfänglich hellgelb ablaufende Waschwasser trübe und rot zu werden begann. Nunmehr wurde die ganze Masse einige Zeit mit reinem Wasser digeriert, bis eine rotbraune, völlig klare Lösung entstanden war, die durch Dialyse von Elektrolyt befreit wurde. Salzzuschlag fällt das Colloid aus; es war daher nicht möglich, Baumwolle unter den bei der substantiven Färbung üblichen Bedingungen auszufärben. Seide wird dagegen ohne weiteres je nach der Concentration hell- bis dunkelgelb gefärbt.

Sehr verdünnte Lösungen von Vanadinpentoxyd verändern sich an der Luft schnell; zum colorimetrischen Vergleich hat man daher die Verdünnungen erst unmittelbar vor dem Versuch vorzunehmen. In der Kochhitze schlägt die Farbe der Pentoxydlösungen in braun bis grünbraun um. Bei 50° bleibt indessen die Flüssigkeit lange Zeit unverändert. Für die Versuche wurde eine 0.23 % Stammlösung zweckmäßig verdünnt und unter häufigem Umschwenken des Kolbens bis zur Konstans gefärbt.

Vanadinpentoxyd gegen Seide.

Je 1 gr Seide, 250 ccm Flotte.

0.0288	0.0163	0.0125	0.0312
0.0375	0.0206	0.0169	0.0422
0.115	0.0815	0.0335	0.0837
0.173	0.135	0.0380	0.0950.

Es war beabsichtigt, ferner mit colloidalem Selen und colloidalem Silber quantitative Ausfärbeversuche anzustellen. Die Vorversuche mit Selen bestätigten die in der früheren Mitteilung beschriebenen Ergebnisse. Außer Seide ist auch Wolle und Baumwolle für das Colloid aufnahmefähig. Indessen wurden bei den anwendbaren Concentrationen die Lösungen nahezu vollkommen entmischt und so stark getrübt, daß ein colorimetrischer Vergleich unmöglich wurde. Goldlösungen und Sulfidlösungen verhalten sich, wie schon früher beobachtet, ähnlich; diese Colloide sind so unbeständig und, wenn einmal ausgefällt, nicht wieder löslich, daß außer

den von der Faser aufgenommenen Mengen noch weitere Teile sedimentiert und dem Färbevorgange entzogen werden. Zu diesen Colloiden gehört auch das Berliner Blau. Anorganische Colloide sind also zum quantitativen Vergleich mit organischen Farbstoffen nur dann brauchbar, wenn sie unter den obwaltenden Bedingungen reversibel sind

Ueber die Adsorptionserscheinungen bei colloidalem Silber wird in einem späteren Abschnitt berichtet.

3. Rutheniumammoniakoxychlorid.

Rutheniumammoniakoxychlorid, $Ru_2Cl_4(OH)_2(NH_3)_7 . 3H_2O$, ist zuerst von Joly[1]) beschrieben und als Farbstoff erkannt worden. Wie zu erwarten stand, repräsentieren die Lösungen dieses Präparates[2]) in Wasser nicht ein reines Colloid; bei Dialysierversuchen entwich viel Chlorid in das Aussenwasser, während sich das färbende Material fast völlig auf der Innenwand des Dialysierschlauches niederschlug. Wenn demnach auch die chemische Natur des eigentlich färbenden colloidalen Stoffes dahingestellt bleibt, so correspondieren doch die Ergebnisse derart mit den vorstehenden, daß sie als Ergänzung jener mitgeteilt werden mögen. Die Ausfärbungen lassen sich auf Baumwolle in der Kälte innerhalb $^1/_2$—1 Stunde ohne Schwierigkeit vornehmen, wenn zur Beschleunigung des Vorganges die Faser mit der Flotte innig durchgeschüttelt wird; eine störende Lichtempfindlichkeit des Präparates trat, wie Controllversuche ergaben, nicht zu Tage; ein Ausfärben bei höherer Temperatur verbot sich indessen bei der Unbeständigkeit des Farbstoffes in der Hitze.

Rutheniumammoniakoxychlorid gegen Baumwolle.

Je 2.5 gr Baumwolle; 50 ccm Flotte.

0.0050	—	0.0050	0.0010
0.0100	0.0003	0.0097	0.00194
0.0130	0.00095	0.01205	0.00240
0.0150	0.0019	0.0131	0.00262
0.0180	0.0034	0.0146	0.00292
0.0200	0.0052	0.0148	0.00296.

4. Benzopurpurin.

Ueber die Verteilung von substantiven Farbstoffen zwischen Flotte und Baumwolle hat v. Georgievics[3]) in jüngster Zeit eine

1) Joly C. R. 115, 1299 [1892]. Ueber die Verwendung des „Ruthenrotes" als Färbemittel in der Pflanzenanatomie vgl. Mangin C. R. 116, 653.

2) Präparat von Heräus, Hanau.

3) Z. f. Farben- und Textilchemie. 2, Heft 13 [1903].

Reihe von Versuchen veröffentlicht. Er arbeitete mit Benzopurpurin 4B, Benzazurin, Geranin G, Mikadogelb und Benzobraun G; in allen Fällen wurde die Beziehung: $\frac{C^2_{Faser}}{C_{Flotte}} = K.$ bestätigt. Die Resultate sind zum Vergleich mit den vorstehenden unmittelbar geeignet. Wir haben indessen unabhängig, um insbesondere den Einfluß von Salzzuschlägen zu prüfen, Färbeversuche mit Benzopurpurin angestellt. Das benutzte Handelspräparat war, wie ein besonderer Versuch ergab, ein fast vollständig reines Colloid. Bei einem Dialysierversuch dialysierten nach 6, 12 und 24 Stunden jedesmal nur minimale Farbstoffmengen; das Außenwasser reagierte neutral und war sulfatfrei und nur ganz schwach chloridhaltig. Benzopurpurin gehört zu den ultramikroskopisch nicht auflösbaren Colloiden: Man beobachtet in 0.001 % Lösungen einen deutlichen Lichtkegel, aber stets eine nur unwesentliche Anzahl von Einzelteilchen. Ein Kochsalzzusatz bis zu 0.1 %, etwa der Beständigkeitsgrenze, verändert das Bild nicht.

Benzopurpurin gegen Baumwolle[1]).

A. Je 1 gr Baumwolle, 100 ccm Flotte, 0.1 % Natriumchlorid.

0.010	0.0025	0.0075	0.0075
0.025	0.0129	0.0121	0.0121
0.050	0.0360	0.0140	0.0140.

B. Je 1 gr Baumwolle, 150 ccm Flotte, 0.066 % Natriumchlorid.

Noch bei extremer Verdünnung der Flotte (0.0005 %) ließ sich colorimetrisch ein Farbstoffrückstand feststellen; ein völliges Ausziehen des Färbebades findet nicht statt.

0.0050	0.0026	0.0024	0.00360
0.0075	0.0040	0.0035	0.00525
0.0150	0.0094	0.0056	0.00840
0.0200	0.0139	0.0061	0.00915
0.0250	0.0188	0.0062	0.0093
0.0500	0.0430	0.0070	0.0105.

Zum Vergleich der verschieden starken Beeinflussung durch Salz wurden aus den aufgenommenen Farbstoffmengen der Serie A

1) Es wurde gelegentlich geprüft, ob der Endzustand beim Ausfärben mit Benzopurpurin auf Baumwolle ein anderer wird, wenn auf bereits schwach angefärbtem, getrockneten Material in concentrierterer Flotte weiter gefärbt wird (fraktionierte Adsorption), als wenn sofort in die concentrierte Flotte eingegangen wird; es zeigte sich, daß dies nicht der Fall ist.

diejenigen für die Endconcentrationen der Serie B graphisch interpoliert:

Endconc.	Aufgenommener Farbstoff in gr NaCl = 0.1 %	Aufgenommener Farbstoff in gr NaCl = 0.066 %
0.0026	0.0076	0.0036
0.0040	0.0086	0.0052
0.0094	0.011	0.0084
0.0139	0.012	0.00915
0.0188	0.013	0.0093
0.0430	0.014	0.0105.

Einer Verminderung der Salzmenge entspricht demnach eine stark bemerkbare Verminderung der Farbstoffabgabe. Bemerkenswert ist, daß unsere Zahlen für Benzopurpurin im Gegensatze zu den Resultaten von v. Georgievics sich nicht der Verteilungsformel mit dem Exponenten 2 fügen.

Man kann Benzopurpurin auch als substantiven Farbstoff auf Seide fixieren. Indessen ließ sich der Vorgang nicht messen, da die Flotten zu stark getrübt erschienen.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind in der Figur 1 dargestellt [1]). Wie ersichtlich, existiert zwischen diesen anorganischen und dem organischen Farbstoffe kein wesentlicher Unterschied.

Ebensowenig zeigt sich ein solcher zwischen den Ausfärbungen auf Seide und auf Baumwolle. Die Zusammensetzung der gefärbten Faser ist bei gegebener Temperatur in ausgesprochenem Maße von den Färbebedingungen: der Concentration des Farbstoffes und der Zuschläge abhängig. Die Curven entsprechen ihrer Gestalt nach vollkommen den Adsorptionscurven, wie sie van Bemmelen z. B. für die Aufnahme von Elektrolyten durch Hydrogele beobachtete.

Daß anorganische Stoffe, wie Glas, Thon u. s. w. angefärbt werden können, ist aus den Arbeiten von v. Georgievics [2]), Heidenhain [3]) und Suida [4]) bekannt. Die folgenden quantita-

1) Die Curve für die Verteilung des Rutheniumpräparates ist der Uebersichtlichkeit halber fortgelassen.

2) Chem. Ztg. **19**, 426 [1895].

3) Encyclopädie der mikroskopischen Technik. I, 335. 1903.

4) W. M. 25, 1107 [1904].

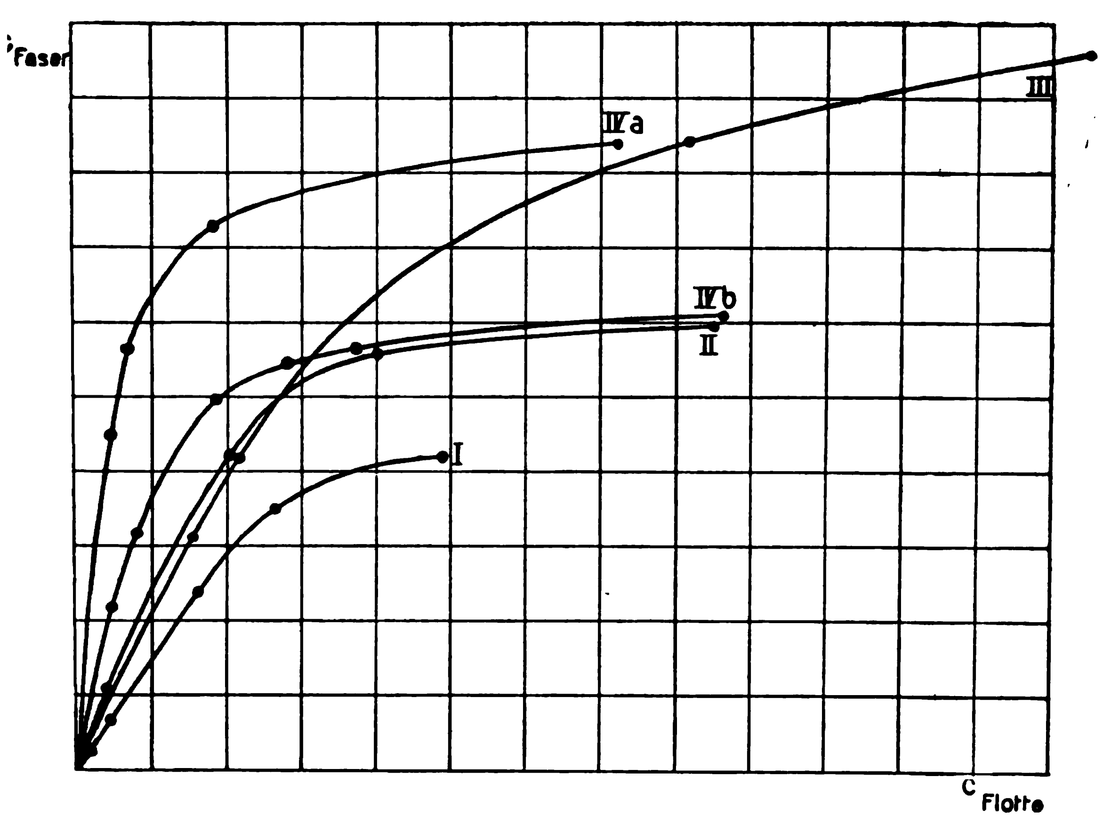


Fig. 1.

C_{Flotte} = Procente Farbstoff in der Flotte.

C_{Faser} = gr Farbstoff in 1 gr Faser.

Im Interesse der übersichtlichen Darstellung sind für die verschiedenen Curven diese Werte in den verschiedenen nachstehend verzeichneten Maßstäben eingetragen worden:

I	Molybdänblau gegen Seide	$C_{Flotte} \times 4$	$C_{Faser} \times 1$
II	Molybdänblau gegen Baumwolle	$C_{Flotte} \times 5$	$C_{Faser} \times 2$
III	Vanadinpentoxyd gegen Seide	$C_{Flotte} \times 100$	$C_{Faser} \times 100$
IVa	Benzopurpurin gegen Baumwolle	$C_{Flotte} \times 200$	$C_{Faser} \times 600$
IVb	„ „ „	$C_{Flotte} \times 200$	$C_{Faser} \times 600$

Anmerkung. Der vorletzte Punkt auf Curve IV a liegt irrtümlicherweise etwas zu hoch.

tiven Versuche wurden mit Molybdänblau, Collargol und Benzopurpurin angestellt. Als anorganisches Substrat wurde das Hydrogel des Aluminiumoxyds verwendet. Die Versuchstechnik war im ganzen die gleiche wie bei dem Färben von Fasern.

1. Molybdänblau.

Es wurde jeweils die gleiche Menge (5 ccm) frisch gefällten Hydrogels mit einem Gehalte von 0.1046 gr Al_2O_3 angefärbt. Die Dosierung des Hydrogels in Pipetten ist völlig exact; der mitgeteilte Analysenwert ist das Mittel der drei nachstehenden zu verschiedenen Zeiten erhaltenen: 0.1043, 0.1046, 0.1048. Das gefärbte Aluminiumoxyd setzte sich nach dem Ausfärben meist sehr schnell ab. Nur die verdünnten Lösungen bedurften bis zu 12 Stunden zur hinreichenden Klärung.

Molybdänblau gegen Aluminiumoxyd.

A. Je 150 ccm, 6.75 gr Ammoniummolybdat.

0.50	0.122	0.378	5.42
2.00	0.465	1.535	22.0
3.00	0.74	2.26	32.4
4.00	1.29	2.71	38.9.

B. Mit Zusatz von 10 % kryst. Natriumsulfat.

Endconc.	Aufgenommener Farbstoff in gr	Aufgenommener Farbstoff in gr; interpoliert aus A
0.197	11.5	9
0.375	23.3	18.

Die Verhältnisse liegen hier demnach genau so, wie bei der Faserfärbung.

Adsorptionsversuche auf Kieselsäure oder Zinnsäure konnten nicht ausgeführt werden, da in beiden Fällen Entfärbung eintrat.

2. Silber.

Ein reversibles, colloidales Silber liegt in dem käuflichen Collargol vor, einem Silbercolloid allerdings, das durch Zusatz geringer Mengen von Schutzcolloid wasserlöslich gemacht ist; irreversible Colloide, wie Selen, entsprechen, wie bereits betont, insofern nicht völlig den substantiven organischen Farbstoffen, als ihre Lösungen entweder gar nicht oder vollständig bei dem Färbeprocesse erschöpft werden, in keinem Falle aber ein Gleichgewichtszustand, der ja durch die Conkurrenz zwischen der Lösungstendenz des Farbstoffes in Wasser und dem Adsorptionsvermögen des Substrates bedingt ist, erzielt werden kann.

Baumwolle wird durch Collargol nur bei Salzzuschlag schwach angefärbt; da durch diesen, sowie auch durch Digerieren mit tannierter Baumwolle und beschwerter und unbeschwerter Seide eine Farbänderung des restierenden Farbstoffes verursacht wird, verbot sich die Anwendung des organischen Materials.

Das Hydrogel des Aluminiumoxyds läßt sich bei 40° ohne Störung innerhalb 60 Min. bis zum Gleichgewicht anfärben.

Collargol gegen Aluminiumoxyd.

Je 3.161 ccm Hydrogel = 0.0741 gr Al_2O_3, 125 ccm Flotte.

0.25	0.140	0.110	1.86
0.30	0.174	0.126	2.125
0.40	0.255	0.145	2.44
0.50	0.353	0.147	2.48
0.60	0.450	0.150	2.53.

3. Benzopurpurin.

Benzopurpurin gegen Aluminiumoxyd.

A. Je 5 ccm Hydrogel = 0.0744 gr Al_2O_3, 500 ccm Flotte. Bei extremer Verdünnung der Flotte (0.00025 %) läßt sich nach Eintritt des Gleichgewichtes noch ein Rückstand in der Flotte nachweisen.

0.0175	0.0021	0.0154	1.035
0.0300	0.0094	0.0206	1.385
0.0400	0.0158	0.0242	1.63
0.0600	0.0330	0.0270	1.81
0.100	0.0710	0.0290	1.95.

B. Je 4.95 ccm Hydrogel = 0.079 gr Al_2O_3[1]), 200 ccm Flotte.

0.025	0.00014	0.0249	0.630
0.040	0.00222	0.0378	0.957
0.060	0.00975	0.0502	1.27
0.150	0.0975	0.0525	1.33.

Aus der graphischen Darstellung dieser Resultate in Fig. 2 folgt, daß für die verwendeten Farbstoffe die Faser durch ein anorganisches Hydrogel ersetzt werden kann, ohne daß der quantitative Verlauf des Adsorptionsvorganges geändert wird. Auf Grund der nunmehr vollständigen Nachbildung eines Färbevorganges mit rein anorganischem Material scheint die Frage nach der Natur des Ausfärbeprocesses mit Stoffen vom Typus des Benzopurpurins, wollte man sich nicht zu ganz ungewöhnlichen Anschauungen über die Reaktionsfähigkeit einfach zusammengesetzter anorganischer Stoffe entschließen, demnach zu einem gewissen Abschlusse gelangt und zu Gunsten der Adsorptionstheorie entschieden zu sein.

1) Anderes Präparat, als bei A.

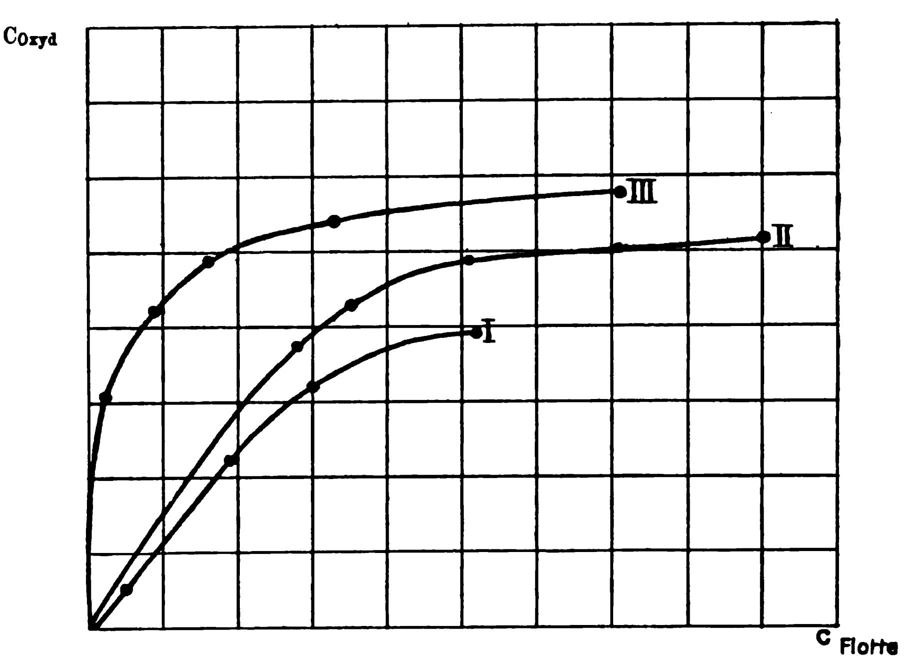


Fig. 2.

C_{Flotte} = Procente Farbstoff in der Flotte
C_{Oxyd} = gr Farbstoff in 1 gr wasserfreien Oxyds.
Die Maßstäbe sind die folgenden:

I Molybdänblau	$C_{Flotte} \times 4$	$C_{Oxyd} \times 0.1$
II Silber	$C_{Flotte} \times 20$	$C_{Oxyd} \times 2$
III Benzopurpurin	$C_{Flotte} \times 100$	$C_{Oxyd} \times 3.$

II.

Ueber die Zustandsaffinität einiger Schwefelfarbstoffe.

(Gemeinschaftlich mit Paul Behre.)

Die Schwefelfarbstoffe stehen in färbereitechnischer Hinsicht den substantiven Farbstoffen nahe, insofern sie, wie diese, als solche, ohne eine Spaltung zu erleiden, unter der Einwirkung aussalzender Zuschläge der Faser einverleibt werden. Eine Orientierung über das Verhalten dieser Stoffe, soweit es in das Gebiet der Colloidchemie fällt, schien einigen Nutzen zu versprechen, zumal sich bei der Mangelhaftigkeit unserer Kenntnisse über die Constitution dieser Körper von rein chemischen Gesichtspunkten in dieser Hinsicht kaum etwas Zusammenhängendes aussagen, geschweige denn prognostizieren läßt. In ihrem Verhalten als Colloide, besonders in ihrer Fähigkeit, Adsorptionsverbindungen zu

liefern, schließen sich indessen, wie im folgenden gezeigt wird, die Schwefelfarbstoffe den sonstigen bisher untersuchten Colloiden an. Die für die Fähigkeit jener, spezifische Colloidreaktionen unter Bildung von Adsorptionsverbindungen zu liefern, empfohlene Bezeichnung „Zustandsaffinität"[1]) dürfte daher in ihrer Anwendung auf diese zugleich am prägnantesten die Zugehörigkeit der Schwefelfarbstoffe zu der genannten Körperklasse kennzeichnen.

Zur Untersuchung wurden einige der sog. Immedialfarben, die wohl als typische Vertreter der Schwefelfarbstoffe gelten können, gewählt; wir sind für die Ueberlassung dieser Farbstoffe der Fabrik von Leopold Cassella u. Co., Frankfurt a. Main, zu Dank verpflichtet.

1. Dialyse der Lösungen von Immedialfarben. Unterwirft man Lösungen von Immedialfarbstoffen in Schwefelalkalilaugen der Dialyse, so gelingt es, reine colloidale Lösungen dieser Stoffe zu erhalten. Es wurden folgende Lösungen von nachstehendem Gehalt pro Liter angewandt.

	Farbstoff:	Soda kalc.:	Natriumsulfid kryst.:
Immedialdirektblau B pat.	7 gr	1 gr	8 gr
Immedialbordeaux G conc.	6 „	3 „	6 „
Immedialschwarz N N conc.	6 „	5 „	8 „
Immedialgelb D pat.	6 „	3 „	6 „

Diese Konzentrationen, welche etwa den von der Fabrik empfohlenen Rezepten entsprechen, mögen als technisch normale bezeichnet werden. Während der ersten 5 bis 6 Tage der Dialyse war bei täglich 3maligem, später 2maligem Wechsel des Außenwassers das Dialysat stark gefärbt. Von da an war die Färbung schwach genug, daß man mit Phenolphtalein auf Alkalität prüfen konnte. Immedialdirektblau lieferte nach 10 Tagen ein alkalifreies Dialysat, die übrigen erst nach 12 bis 14 Tagen. Die dialysierten Lösungen waren, abgesehen von dem stark getrübten Immedialgelb, klar und zum Teil über ein halbes Jahr haltbar. Zur Gehaltsbestimmung wurden je 100 ccm auf dem Wasserbade eingedampft und der bei 100° getrocknete Rückstand gewogen. Es enthielten:

100 ccm Immedialdirektblau: 0.096 gr.
„ „ Immedialbordeaux: 0.076 „
„ „ Immedialschwarz: 0.109 „

1) Vergl. hierzu und zu dem folgenden: Ber. 37, 1095 [1904].

2. Ultramikroskopische Prüfung. Die isolierten colloidalen Lösungen unterschieden sich makroskopisch nicht von gewöhnlichen Lösungen. Ultramikroskopisch bemerkte man in verdünnten Lösungen einen mehr oder minder deutlichen Lichtkegel. Einzelteilchen waren nur in ganz unwesentlichen Mengen vorhanden; technische, also salzhaltige Lösungen von Blau und Schwarz boten dasselbe Bild; in einer derartigen 1:250 verdünnten Bordeaux-Lösung waren indessen zahlreiche Teilchen in deutlicher Bewegung und von nahezu gleicher Größe und gelblich-weißer, nicht besonders charakteristischer Farbe ihrer Beugungsscheibchen erkennbar.

3. Einwirkung von Elektrolyt. Reine colloidale Lösungen von Immedialfarben zeigen gegen Elektrolyte die gleiche Empfindlichkeit, wie andere Lösungen dieser Art: Die Fällungskraft des Elektrolyten wächst mit der Valenz des Kations; Nitrate fällen weniger stark als Chloride. In der folgenden Tabelle sind die Resultate verzeichnet, die erhalten wurden, als je 5 ccm der dialysierten Farbstofflösungen mit je 0.2 ccm $^1/_2$ äquivalentnormaler Elektrolytlösungen gemischt und einige Stunden sich selbst überlassen worden waren. Kürzere Zeiten und größere Salzmengen gaben weniger differente Ergebnisse: Es bedeutet:

+ Trübung,
++ beginnende Flockung; langsames Absetzen,
+++ völlige Flockung; völliges Absetzen.

Ein geklammertes Zeichen bedeutet denselben Effekt in abgeschwächtem Maße.

	Immedial-direktblau	-bordeaux	-schwarz
$NaCl$	+	(+)	(+)
KCl	++	++	+
$BaCl_2$	+++	+++	+++
$AlCl_3$	+++	+++	+++
KNO_3	+	(+)	(+).

4. Konvektionsversuche. Colloidale Lösungen von Immedialfarben sind, wie alle colloidalen Lösungen, in elektrolytischem Sinne gesprochen, nahezu Isolatoren; dagegen erleiden sie unter dem Einflusse des elektrischen Stromes eine konvektive Ueberführung infolge einer Potentialdifferenz zwischen Colloidteilchen und Lösungsmittel. Um dies zu zeigen, wurden in einem 250 ccm fassenden Ueberführungsapparat, der eine getrennte Entnahme von Kathoden- und Anodenflüssigkeit gestattete, die auf das 10fache verdünnten elektrolytfreien Lösungen während 22—24 Stunden zwischen Platinblechelektroden der Einwirkung eines Starkstromes

von 110 Volt unterworfen und die Verschiebung des Farbstoffgehaltes kolorimetrisch ermittelt.

	+ Flüssigkeit:	— Flüssigkeit:	Mittel:	urspr. Gehalt:
Immedialdirektblau:	0.0133 %	0.0050 %	0.0092 %	0.0096 %
Immedialbordeaux:	0.0097 „	0.0044 „	0.0071 „	0.0076 „
Immedialschwarz:	0.0156 „	0.0062 „	0.0109 „	0.0109 „

Makroskopischer Betrachtung zufolge waren die Anodenflüssigkeiten durchweg stärker gefärbt, als die Kathodenflüssigkeiten. Ultramikroskopisch war der Lichtkegel in den ersten deutlicher, als in den zweiten; auch war die jeweils vorhandene sehr geringe Anzahl von Staub (?)-Teilchen am + Pol stärker als am — Pol. Die colloidal gelösten Farbstoffteilchen sind demnach, wie die Mehrzahl der Colloide, negativ gegen das Lösungswasser geladen; da das Mittel von Anoden- und Kathodenwert ziemlich nahe an den ursprünglichen Gehalt der Lösungen herankommt, so dürften elektrolytische Oxydations- und Reduktionswirkungen auf den Farbstoff nicht oder nur in ganz untergeordnetem Maße eingetreten sein. Auch konnte eine deutliche Gasentwickelung während der Dauer der Versuche nicht wahrgenommen werden.

5. Einwirkung von Hydrosolen. Nach diesem Befunde stand zu erwarten, daß positiv geladene Colloide die Immedialfarben aus ihren dialysierten Lösungen fällen, negative sie intakt lassen würden. Aus den Resultaten der nachstehenden Tabelle ersieht man, daß, abgesehen von der eigenartigen Wirkung des sehr empfindlichen Vanadinpentoxyds — die Mischungen erstarrten alsbald zu einer durchsichtigen Gallerte — diese Erwartung scharf erfüllt wird. Bei der Ausführung der Versuche verwandte man je 2 ccm Farbstofflösung und wechselte, um die günstigen Fällungsbedingungen nicht zu übersehen, die Menge des zuzusetzenden Colloids nach Bedarf.

		Immedial-direktblau	-bordeaux:	-schwarz:
Fe_2O_3	+ Colloide	+ +	+ +	+
ZrO_2		+ + +	+ + +	+ +
ThO_2		(+ +)	+ +	+
Cr_2O_3		+ + +	+ + +	+ +
Al_2O_3		+ +	(+ + +)	+
Pt	— Colloide	0	0	0
Sb_2S_3		0	0	0
Berliner Blau		0	0	0
Vd_2O_5		Gelatine	Gelatine	0
SnO_2		0	0	0

Der Eintritt der völligen gegenseitigen Ausfällung entgegengesetzt geladener Colloide ist an ein bestimmtes günstiges Mengenverhältnis der Reagentien geknüpft. Derartige **Fällungsoptima** wurden für die Kombinationen: Immedial-direktblau: ZrO_2 und -bordeaux: ZrO_2 aufgesucht.

ZrO_2 in ccm	Immedial-direktblau	-bordeaux
0.2	(+)	+
0.4	+	(+ +)
1.0	+ +	+ +
2.0	+ + +	+ + +
5.0	(+ +)	+ +
2.0 [1]	(+)	+

6. **Ausfärbeversuche.** Die Adsorptionsverbindungen von Immedialfarben und Baumwolle mußten nach den in dem ersten Capitel dieser Mitteilung niedergelegten Erfahrungen in ihrer Zusammensetzung abhängig von der Konzentration der Färbeflotte sein. Es wurden, um dies zu prüfen, mit verschieden konzentrierten Farbstofflösungen quantitative Ausfärbeversuche ausgeführt, bei welchen der Zuschlag an Natriumkarbonat, Natriumsulfid und Natriumchlorid dem Farbstoffgehalt proportional gehalten wurde. Den technisch normalen Farbkonzentrationen von Immedialdirektblau entspricht ein Kochsalzzuschlag von 0.7 %, den Normallösungen von Immedialschwarz N N conc. ein solcher von 1.7 %. Verdünnte Lösungen von Immedialfarben mit den für konzentrierte Lösungen berechneten Zuschlagmengen sind nicht kochbeständig. Es scheint im allgemeinen gleichgültig zu sein, ob nach erfolgter Ausfärbung die Probe zum kolorimetrischen Vergleich aus der heißen Flotte, aus der erkalteten Flotte, oder aus der 20 Stunden mit der Faser in Berührung gelassenen Flotte entnommen wird; von den erhaltenen Zahlen sollen nur die durch zahlreiche Versuche belegten mitgeteilt werden.

Immedialdirektblau gegen Baumwolle.

Je 4 gr Baumwolle, je 200 ccm Flotte.

Techn. Normalität	Gr Farbstoff	Gr zurückgeblieben	Gr aufgen.
0.2	0.28	0.21	0.07
0.8	1.12	0.82	0.30
1.0	1.40	1.04	0.36.

1) einer 10fach stärkeren Konzentration.

Immedialschwarz N N conc. gegen Baumwolle.

Je 4 gr Baumwolle, je 200 ccm Flotte.

Techn. Normalität	Gr Farbstoff	Gr zurückgebl.	Gr aufgen.
0.05	0.060	0.030	0.030
0.25	0.30	0.142	0.158
0.50	0.60	0.267	0.333.

Qualitative Versuche zeigten, daß die Hydrogele von Al_2O_3, ZrO_2, Fe_2O_3, SnO_2 in den Adsorptionsversuchen die Faser substituieren können, und zwar wird der Farbstoff im allgemeinen in der Kälte vollständiger als in der Kochhitze niedergeschlagen. Technische Lösungen und dialysierte Lösungen zeigten bei diesen Orientierungsversuchen kaum Unterschiede. Dagegen wurde bei quantitativen Ausfärbevergleichen von dialysierten mit technischen Lösungen auf Baumwolle deutlich, daß jene, da sie ja frei von Zuschlägen Lösungen eines irreversiblen Colloids darstellen, entweder in reinem Zustande kaum färben, oder schon bei geringem Kochsalzzusatz vollkommen sedimentieren, daß also hierin diese Farbstofflösungen wiederum weitgehende Analogie mit den irreversiblen anorganischen Colloiden aufweisen.

Ueber die Dissociation der Kohlensäure.

(Mit 2 Figuren.)

Von

W. Nernst und H. v. Wartenberg.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

Die in vieler Hinsicht wichtige Frage nach der Dissociation der Kohlensäure wurde zuerst von Deville und später von Le Chatelier[1]) in Angriff genommen. Die von letzterem Forscher gegebenen Zahlen sind sowohl von ihm selber wie auch später von andern Autoren zu wichtigen Schlußfolgerungen benutzt worden. Die der thermodynamischen Rechnung von Le Chatelier zu Grunde liegenden experimentellen Daten sind, hauptsächlich weil man Temperaturen von über 1000° früher einigermaßen genau zu bestimmen kaum in der Lage war, ziemlich unsicher, sodaß eine Neubestimmung ein Bedürfnis erscheint. Es zeigte sich übrigens, daß an der thermodynamischen Berechnung von Le Chatelier insofern eine Correctur anzubringen ist, als die Wärmetönung gemäß der Gleichung

$$2\,CO_2 = 2\,CO + O_2$$

für zwei Moleküle Kohlensäure einzuführen ist, während Le Chatelier nur den halben Wert in die Formel einsetzt.

1. Versuchsmethode.

Methode und Apparatur lehnt sich durchaus an das von uns bei der Bestimmung der Dissociation des Wasserdampfes benutzte Verfahren an; es wurde also möglichst reine Kohlensäure durch

1) Zeitschr. physikal. Chem. 2 782 (1888).

ein auf hoher Temperatur erhaltenes pipettenartiges Gefäß geleitet und die austretende Menge Kohlenoxydknallgas bestimmt.

Die Kohlensäure wurde nach Meyer und Langen[1]) aus Natriumbikarbonat durch Zutröpfeln verdünnter Schwefelsäure gewonnen. In einer 10 Liter Flasche wurde 1 kg Natriumbikarbonat in 9,5 Liter ausgekochten Wassers gelöst. Die Flasche war mit einem dreifach durchbohrten Gummistopsen verschlossen. Durch ein Rohr konnte die entwickelte Kohlensäure abgeleitet werden, durch ein zweites 1 m langes mit Hahntrichter versehenes Rohr verdünnte Schwefelsäure zugetröpfelt werden und durch ein drittes bis auf den Boden reichendes Hahnrohr Flüssigkeit herausgedrückt werden. Die Flasche war absichtlich fast gefüllt worden, damit die Kohlensäure möglichst wenig Luft zu verdrängen hatte. Durch die Schwefelsäure im Trichter perlte ein Kohlensäurestrom aus einem mit Marmor und Salzsäure gefüllten Apparat, um die Schwefelsäure gesättigt zu halten und die Luft aus ihr zu verdrängen. Jeder Tropfen der einfallenden Schwefelsäure erzeugte an der Oberfläche der Lösung ein paar Gasblasen, sank dann als Schliere zu Boden und entwickelte erst hier an den festen Wänden eine Fülle kleiner Blasen, sodaß der Strom höchst gleichmäßig war. Durch ein Rohr, dessen einer Schenkel in Quecksilber tauchte und als Druckregulator diente, trat die Kohlensäure in eine mit konzentrierter Schwefelsäure beschickte Winklersche Schlange, die an einem Ende mit einem Glashahn zur Regulierung der Geschwindigkeit des Stromes versehen war, am anderen Ende mit einer Glaskugel, in die zwei Platindrähte mit 3 mm Abstand eingeschmolzen waren. (Bei den letzten Versuchen wurde zur weiteren Trocknung noch ein 30 cm langes Phosphorsäurerohr eingeschaltet). Zwischen diesen Drähten konnte ein mit Induktorium und Leydener Flasche erzeugtes Funkenspiel unterhalten werden. Ließ man Funken überschlagen, so wurde die passierende Kohlensäure bis zu 8 % mit Kohlenoxydknallgas vermengt. Aus der Schlange trat die Kohlensäure in den Erhitzungsapparat und aus diesem in den zur Analyse dienenden Absorptionsapparat. Die so erzeugte Kohlensäure enthielt nachdem der Apparat 24 Stunden in mäßiger Thätigkeit gewesen war, nur ca. $^1/_{10}$ promille Luft; bei weiterer Benutzung sank dieser Betrag noch erheblich. Alle Verbindungen der Glasteile übrigens waren womöglich verschmolzen, sonst Glas an Glas gesetzt und mit dicken, mit Marineleim bestrichenen, Gummischlauchstücken überzogen.

1) Langen u. Meyer, Pyrochemische Untersuchungen (1885) 15.

Der in Fig. 1 abgebildete Absorptionsapparat bestand aus einer 30 ccm fassenden Glaskugel, an die unten ein scharf nach oben gebogenes offenes 6 mm weites Rohr angesetzt war, das mit Quecksilber gefüllt wurde. Oben an der Kugel war ein 3 ccm fassendes in 0,02 ccm geteiltes Eudiometer angesetzt. Um den Apparat hinstellen zu können, waren noch drei Glasbeine an die Kugel geschmolzen. Der Apparat wurde bis auf das untere offene Rohr mit 40 %tiger Kalilauge gefüllt, in die durch das Quecksilber des unteren Rohres die Kohlensäure mit einer Glaskapillare eingeleitet werden konnte. Hierbei wurde die Kohlensäure (ca. 3 l) absorbiert, während das Knallgas in das Eudiometer stieg, wo es explodiert werden konnte. In der konzentrierten Kalilauge ist die Absorption des Kohlenoxydknallgases kaum merkbar. Es wurde aber stets 12 Stunden vor einer Versuchsreihe eine große Blase Kohlenoxydknallgas in die Glaskugel gebracht und so die Flüssigkeit gesättigt. Der Apparat wurde vor und nach dem Versuch auf Centigramme genau gewogen (Gewicht gefüllt ca. 150 g). Die Differenz ergab die absorbierte Kohlensäuremenge bis auf 5 ccm genau, da 5 ccm CO_2 = 0,01 g sind. Zur Gasmessung wurde das Quecksilberniveau auf beiden Seiten des Rohres gleich gemacht, abgelesen, der Apparat in eine große Quecksilberwanne bis über die Oeffnung des unteren Rohres getaucht, explodiert und nach Gleichstellung des Niveaus wieder abgelesen. Correktionen wegen Barometerstand und Wasserdampftension (letztere ist über der konz. Kalilauge doch nur minimal) wurden nicht angebracht. Das Knallgas war bis auf Spuren von Stickstoff rein.

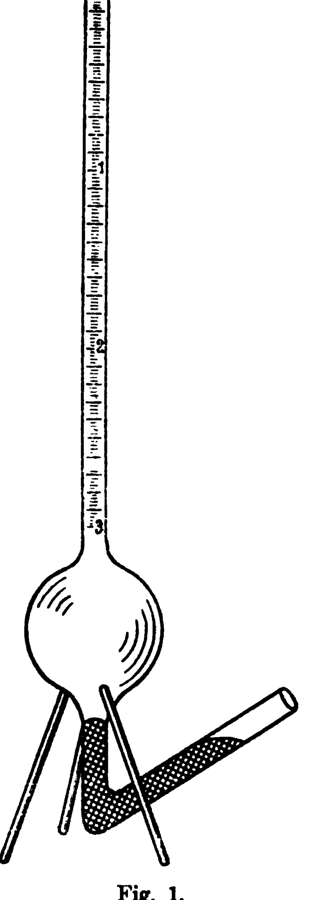


Fig. 1.

Aehnlich wie bei der Bestimmung der Dissociation des Wasserdampfes waren auch in unserem Falle manche Schwierigkeiten zu überwinden und viele Vorversuche anzustellen, bis eine zuverlässige Bestimmung gelang. Der eine von uns (v. W.) wird darüber an anderer Stelle berichten; hier seien zunächst nur folgende Bestimmungen mitgeteilt:

Tabelle I.

No.	Zeit in min.	ccm CO_2	ccm Knallgas	x%	ccm CO_2 pro min.	Temperatur		Bemerkung
1	20	870	0,13	0,01	43	1150		Die CO_2 geht nur durch konz. Schwefelsäure in gewöhnlicher Waschflasche. Bei langsamer Strömungsgeschwindigkeit geht das Gleichgewicht zurück.
	15	640	0,40	0,041	43	"	gefunkt	
	60	970	0,09	0,0062	16	"		
	40	680	0,15	0,015	16	"	gefunkt	
2	10	550	0,36	0,043	55	1130		Trocknung der CO_2 wie bei No. 1. Ueber die Porzellankapillare war ein wassergekühltes Kupferrohr geschoben. Dies kühlt offenbar aucht die Hinterwand des Gefäßes, weshalb die Temperatur im Innern wahrscheinlich höher ist als angegeben. Das Gleichgewicht verschiebt sich bei 1130° immer noch beim Austritt.
	5	350	0,40	0,077	69	"	gefunkt	
	30	550	0,30	0,036	18	"		
	27	490	0,27	0,037	18	"	gefunkt	
3	15	780	0,11	0,0093	52	1060		
	15	700	0,13	0,0124	47	"	gefunkt	
	60	840	0,13	0,0104	14	"		
	60	690	0,09	0,0187	11,5	"	gefunkt	
4	22	1325	0,07	0,0035	61	1100		Trocknung der CO_2 wie bei 1. Als Ausstömungsrohr fungiert eine 1 mm weite Quarzkapillare. Thermoelement unbedeckt, daher katalytische Beeinflussung des Gleichgewichts, das sich von beiden Seiten einstellt, aber des weiten Ausströmungsrohres halber wieder verschiebt, was die viel zu kleinen x-Werte anzeigen.
	22	1460	0,07	0,0032	66	"	gefunkt	
	15	1300	0,07	0,0036	87	"		
	15	1415	0,06	0,0928	94	"	gefunkt	
5	20	475	0,09	0,012	24	1120		Trocknung der CO_2 mit H_2SO_4 und P_2O_5. Altes Porzellanrohr. Es treten große CO-Mengen mit dem Knallgas auf, weshalb die an und für sich vertrauenerweckenden x-Werte unsicher werden.
	13	340	0,27	0,059	26	"	gefunkt	
	10	480	0,04	0,0056	48	"		
	8	470	0,72	0,100	58	"	gefunkt	

Die obigen Bestimmungen, bei denen also teils reine Kohlensäure, teils Kohlensäure, die durch einen Funkenstrom zwischen Platinspitzen kurz vor dem Eintritt in den Erhitzungsraum mit etwa 4 %

Kohlenoxydknallgas beladen war, zur Verwendung gelangte, können wir folgende Schlüsse ziehen. 1. Bei verschiedenen Röhren tritt in sehr verschiedenem Maße eine katalytische Wirkung der Austrittskapilare ein; das Temperaturgebiet, in welchem einerseits die Dissociation bereits hinreichend groß ist, um eine zuverlässige Analyse zu gestatten, und andererseits die Reaktionsgeschwindigkeit in der Austrittskapillare hinreichend klein bleibt, um keine nachträgliche Verschiebung des Gleichgewichts befürchten zu müssen, ist bei der Kohlensäure ziemlich klein, ja es ist ein wenig Glücksache, ein Porzellangefäß zu finden, welches überhaupt zuverlässige Messungen anzustellen erlaubt. 2. Die Austrittskapillare muß dementsprechend möglichst eng sein und außerdem durch Kühlung einen möglichst raschen Temperaturabfall erhalten. 3. Wegen der starken katalytischen Wirkung der Feuchtigkeit, deren nähere Gesetze klarzustellen nicht ohne Interesse sein wird, muß schließlich für äußerst energische Trocknung der Kohlensäure gesorgt werden.

Aus den vorstehend mitgeteilten Vorversuchen ist immerhin zu schließen, daß bei 1120° die Dissociation der Kohlensäure zwischen 0,01 und 0,03 % liegt.

2. Definitive Versuche.

Um die Analyse sicherer zu gestalten, wurden die definitiven Versuche bei etwas höherer Temperatur angestellt und dazu ein neues noch nicht gebrauchtes Porzellangefäß verwandt. Tabelle 2 enthält die so gewonnenen Resultate: Als Beispiel sei der Versuch No. 5 eingehender erläutert.

Der Kaliapparat wog vor resp. nach dem Versuch 221,20 g resp. 221,69 g d. h. es waren 0,49 g CO_2 absorbiert, oder da 1 l CO_2 bei 0° und 760 mm 1,965 g wiegt, 250 ccm CO_2. An Knallgas wurden 0,10 ccm gefunden. Der 0,06 ccm betragende Gasrest wurde mit H_2 und O_2 geprüft ohne Verpuffung, er war also N_2. Der Barometerstand war 750 mm, die hängende Kalilaugensäule 32 cm, oder da die Lauge das spez. Gew. 1,7 hatte, $\frac{1,7}{13,6} \cdot 32 = 4$ cm Quecksilber, der Druck also 710 mm, abgesehen von der doch nur minimalen Dampfspannung der konz. Kalilauge. Die Temperatur war 20° C. Als reduziertes Knallgas mal $^2/_3$ war also anzusetzen:

$$0,10 \cdot \frac{710}{760.1,07} \cdot {}^2/_3 = 0,058.$$

Dieser Wert durch die ccm $CO_2 = 250$ dividiert, ergab mit 100 multipliziert x % $= 0,0232$. Die reciproke Strömungsgeschwindig-

keit, oder die Zeit die 1 ccm CO_2 zum Durchstreichen brauchte (abgesehen von der bei gleicher Temperatur constanten thermischen Ausdehnung des Gases im glühenden Rohr) resultierte schließlich durch Division der Zeit = 61 mit den ccm CO_2 = 250 zu 0,248. Das Millivoltmeter zeigt 11,6 M. V. mit Korrektur für Zimmertemperatur der anderen Lötstelle. Da der Goldschmelzpunkt vorher zu 9,92 M. V., nachher zu 9,95 M. V. gefunden war, anstatt 10,20 M. V. so mußten, prozentual korrigiert, 0,27 · 1,16 M. V. oder 0,31 M. V. addiert werden, was 11,9 M. V. ausmacht oder 1205° C.

Zu bemerken ist noch, daß die letzten Versuche 7 und 8 schon das Auftreten von Spuren CO erkennen lassen, d. h. daß das Rohr anfängt, angegriffen zu werden.

Tabelle 2.

No. der Versuches	Zeit in min.	ccm CO_2	ccm Knallgas	ccm andere Gase	ccm Knallgas reduziert mal $^2/_3$	x %	reziproke Strömungsgeschwindigkeit = t	Temperatur ° C	Millivolt	Bemerkung
5	61	250	0,10	0,06 N_2	0,058	0,0232	0,248	1205	11.6	
6	30	110	0,09	0,07 N_2	0,052	0,0465	0,268	„	„	gefunkt
7	44	590	0,09	0,02 CO 0,08 N_2	0,062	0,0105	0,0745	„	„	
8	15	200	0,41	0,06 CO 0,02 N_2	0,260	0,130	0,075	„	„	gefunkt
1	30	535	0,11	0,05 N_2	0,063	0,0118	0,056	„	„	
2	9	175	0,40	0,07 N_2	0,230	0,131	0,0515	„	„	gefunkt
3	24	950	0,09	0,09 N_2	0,052	0,0055	0,0252	„	„	
4	6	250	0,94	0,08 N_2	0,550	0,220	0,0240	„	„	gefunkt

Die graphische Darstellung der Resultate zeigt Figur 2; an den einzelnen Punkten ist die Versuchsnummer bemerkt. Einen Nährungswert können wir durch die graphische Darstellung als Schnittpunkt der beiden Kurven zu 0,035 annehmen.

Einen wohl zuverlässigeren Wert liefert folgende Ueberlegung. Die obere Kurve, die der Bildung von Kohlensäure entspricht, sollte, wenigstens in ihrem ersten Teile, woselbst die entgegen-

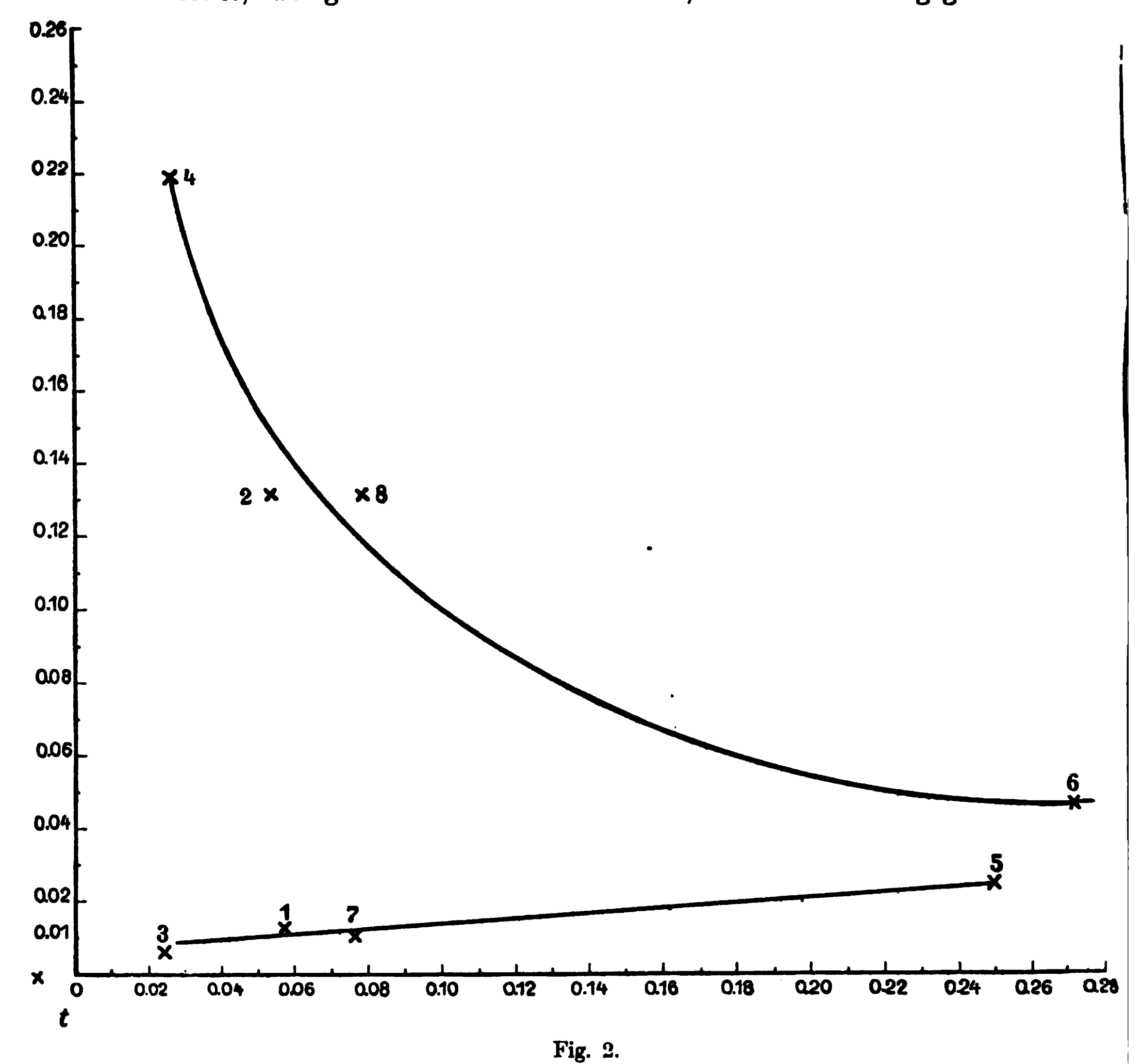


Fig. 2.

gesetzte Reaktionsgeschwindigkeit verschwindet, eine trimolekulare Reaktion sein. Thatsächlich konnten wir auch bei andern, hier nicht mitgeteilten Vorversuchen, eine solche mit Sicherheit nachweisen. Bei der hier vorliegenden Versuchsserie zeigt die nähere Berechnung jedoch, daß über den trimolekularen Verlauf sich, offenbar infolge katalytischer Einflüsse eine unimolekulare Reaktion

superponiert, die in der Nähe des Gleichgewichts, und zwar in gleicher Weise auch bei der unteren Kurve, die einen bimolekularen Verlauf zeigen sollte, immer mehr in den Vordergrund tritt und aus einfachen algebraischen Gründen ja auch in den Vordergrund treten muß. Unter diesen Umständen erschien es am sichersten, die Kurven nach folgenden Gleichungen zu extrapolieren. Wir setzen x_0 für den Gleichgewichtswert, a für den Anfangswert und für den jeweiligen Wert der CO-Mengen, so haben wir für die Knallgasvereinigung (unimolekular aufgefaßt)

$$-\frac{dx}{dt} = k(a-x) - x'$$

und da

$$x_0 = \frac{k'}{k} \tag{1}$$

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{a - x_0}{a - x_0 - x} \tag{2}$$

entsprechend für die Knallgasbildung:

$$-\frac{dx}{dt} = k' - kx$$

$$k' = \frac{x_0}{t} \ln \frac{x_0}{x_0 - x}. \tag{3}$$

Durch Probieren ergab sich für x_0 0,029; in der That folgt dann aus

x	t
0,130	0,070
0,0465	0,268

$$k = \frac{1}{0{,}264 - 0{,}070} \ln \frac{0{,}130 - 0{,}029}{0{,}130 - 0{,}029 - 0{,}0465} = 6{,}6$$

und ferner aus

x	t
0,0112	0,065
0,0232	0,248

$$k' = \frac{0{,}029}{0{,}248 - 0{,}065} \ln \frac{0{,}029}{0{,}029 - 0{,}0232} = 0{,}189$$

$$x_0 = \frac{0{,}189}{6{,}6} = 0{,}029.$$

3. Indirekte Bestimmung der Dissociation der Kohlensäure.

Ein weiterer und wohl sehr sicherer Wert läßt sich durch die Kombination der Untersuchung von Hahn[1]) über das Gleich-

1) Hahn, Zeitschr. phys. Chem. 44. 513 (1903).

gewicht zwischen Wasserdampf, Kohlensäure, Wasserstoff und Kohlenoxyd mit unseren Werten über die Dissociation des Wasserdampfes ableiten. Es gilt nämlich für das von Hahn[1]) untersuchte Gleichgewicht

$$K_1 = \frac{[CO][H_2O]}{[H_2][CO_2]};$$

ferner gilt für Kohlensäure und Wasserdampf

$$K_2 = \frac{[CO]^2[H_2]}{[CO_2]^2} \text{ und } K_3 = \frac{[H_2]^2[O_2]}{[H_2O]^2},$$

woraus schließlich, wenn wir mit y den Dissociationsgrad des Wasserdampfes bei Atmosphärendruck bezeichnen,

$$x = y K_1^{\frac{2}{3}}$$

sich ergiebt.

Die Werte von Hahn stimmen bei höheren Temperaturen nicht mit dem von der Thermodynamik geforderten Verlaufe überein; auf Grund unserer Erfahrungen möchten wir annehmen, daß höchstwahrscheinlich sich bei den Versuchen bei höheren Temperaturen das Gleichgewicht in der Austrittskapillare merklich verschoben hat. Indem wir daher nur die bei niederen Temperaturen erhaltenen Werte von Hahn für zuverlässig ansehen können, wählen wir zur Berechnung den Wert von

$$K_1 = 1{,}70$$

der aus der theoretischen Formel für $T = 1300$ folgt[2]); dieser Wert dürfte, weil die theoretische Formel die für niedere Temperaturen gefundenen Zahlen gut wiedergiebt, genauer als eine einzelne der direkten Beobachtungen. Somit folgt ($y = 0{,}00293\,\%$)[3]).

$$x = 0{,}00293 \cdot 1{,}70^{\frac{2}{3}} = 0{,}00419\,\% \text{ für } T = 1300^0.$$

4. Thermodynamiche Berechnung.

Dieselbe ist in genau der gleichen Weise, wie früher[4]) für Wasserdampf durchzuführen; wir setzen nach Langen[5]) für die mittlere Molekularwärme der Kohlensäure:

$$C_v = 6{,}7 + 0{,}0026\,t$$

---

1) Hahn, Zeitschr. phys. Chem. 44 513 (1903).
2) Ibid, 48 737 (1904).
3) l. c. S. 10.
4) Vergl. diese Nachrichten. Februar 1905. S. 8.
5) Langen, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure. 47 637 (1903).

welche Zahl neuerdings durch Holborn und Austin[1]) eine sehr gute Bestätigung gefunden hat; ferner für die Dissociationsprodukte:

$$C_v = 4{,}8 + 0{,}0006\,t.$$

Für die Verbrennungswärme von Kohlenoxyd bei konstantem Druck setzen wir[2]) 68000 cal. Die Wärmetönung der Reaktion

$$2\,CO_2 = 2\,CO + O_2$$

wird somit, bezogen auf konstantes Volum:

$$-q = 135100 + 1{,}9\,T - 0{,}0034\,T^2$$

und daher

$$\log K = \log K_0 - 29560\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + 1{,}97 \log \frac{T}{T_0} - 0{,}00074(T - T_0)$$

oder, wenn x den Dissociationsgrad in Prozenten ausdrückt und wir für $x_0 = 0{,}0000212$ und $T_0 = 1000$ setzen:

$$\log \frac{2x^3}{\left(2 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2}$$

$$= 9{,}54 - \frac{29560}{T} + 2{,}97 \log \frac{T}{1000} - 0{,}00074\,(T - 1000).$$

In folgender Tabelle finden sich die nach dieser Gleichung berechneten Werte von x bei Atmosphärendruck für eine Reihe von Temperaturen:

T	t	x (in Prozenten)
1000	727	$0{,}212.10^{-4}$
1100	827	$0{,}168.10^{-3}$
1200	927	$0{,}935.10^{-3}$
1300	1027	$0{,}400.10^{-2}$
1400	1127	$0{,}138.10^{-1}$
1500	1227	$0{,}401.10^{-1}$
1600	1327	0,102
1700	1427	0,230
1800	1527	0,474
1900	1627	0,902
2000	1727	1,59
2200	1927	4,17
2400	2127	9,00
2600	2327	16,8.

1) Holborn und Austin. Ber. Berl. Akademie. 1905. 2. Februar.

2) Ostwald. Allgemeine Chemie II. I. 173. (1893).

Daß die obige Formel unsere Zahlen gut wiedergiebt, zeigt nachfolgende Zusammenstellung:

T	x ber.	x gef.	Bemerkung
1300	0,00400	0,00419	vgl. S. 9
1400	0,0138	0,01–0,03	„ „ 5
1478	0,032	0,029	„ „ 8.

Die von Trevor und Kortright [1]) aus den Daten von Le Chatelier berechneten Zahlen sind etwa 2 mal so groß, als die unsrigen, eine in Anbetracht der Unsicherheit jener Daten ausreichende Uebereinstimmung.

Bei der Ausführung der vorstehenden Versuche standen uns, wie auch hier dankbar erwähnt sei, Mittel aus der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie zur Verfügung.

1) Trevor und Kortright. Ann. Chem. Journ. **16** (1894.) 623; in dieser Arbeit ist übrigens bereits, wie wir nachträglich fanden, mit dem richtigen Werte der Wärmetönung (vgl. S. 1) gerechnet.

Göttingen, Februar 1905.

Institut für physikalische Chemie.

Bemerkungen zur Bewegung der Elektronen bei Ueberlichtgeschwindigkeit.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

1. Vorwort. Die Theorie der Elektrodynamik, ergiebt für einen elektrisirten Körper, der sich mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegt, selbst dann eine hemmende mechanische Kraft elektrodynamischen Ursprungs, wenn die Bewegung geradlinig und gleichmäßig vor sich geht. Es ist hiernach bei Ueberlichtgeschwindigkeit eine von außen einwirkende mechanische Kraft erforderlich, wenn die Geschwindigkeit erhalten bleiben soll; die so vom Körper empfangene Energie wird als elektrische Erregung wieder in den Raum ausgestrahlt. A. Sommerfeld[1]) hat in bedeutungsvollen Arbeiten vor kurzem gezeigt, wie man die hemmende Kraft für ein kugelförmiges Elektron berechnen kann. Er findet bei gleichförmiger Verteilung der elektrischen Ladung:

$$\mathfrak{F} = \frac{9}{4}\frac{E^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right),$$

wenn $\mathfrak{F}$ die mechanische Kraft, E die elektrostatische gemessene Ladung, a den Radius, c die Lichtgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit des Elektrons bedeutet. — Wir werden schließen dürfen, daß eine Veränderung der Bewegung eintritt, wenn die äußere Kraft beseitigt wird; es ist aber in dieser Hinsicht bisher nur

1) Diese Nachrichten 1904, S. 99 und S. 363, K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 1904, p. 346.

wenig bekannt geworden. Unter solchen Umständen mag es erlaubt sein, im Folgenden darauf hinzuweisen, daß in einigen besonderen Fällen der Elektrizitätsverteilung schon mit Hülfe des Gauß'schen Satzes über die Flächenintegrale der elektrischen Kraft sowohl die bei stationärer Bewegung notwendige treibende Kraft, als auch die Verzögerung der Bewegung bei Beseitigung der treibenden Kraft beurteilt werden kann.

2. Gauß'scher Satz. Wird die elektrische Kraft mit $\mathfrak{E}$, die in einem beliebig abgegrenzten Raum enthaltene Elektrizitätsmenge mit e bezeichnet, so gilt nach dem Gauß'schen Satz für das Oberflächenintegral der elektrischen Kraft bei Benutzung des gewöhnlichen elektrostatischen Maßsystemes die Formel:

$$\int \mathfrak{E}_\nu d\sigma = 4\pi e. \tag{2}$$

Betrachten wir nun zunächst einen beliebig gestalteten elektrisirten Körper, der sich in beliebiger Weise mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegt. Da die Störung des elektrodynamischen Feldes infolge der Bewegung sich von jeder Stelle des Körpers in jedem Augenblick mit Lichtgeschwindigkeit als Kugelwelle ausbreitet, so wird das gestörte Gebiet dem Körper in Form eines Schweifes folgen, den Sommerfeld „Bewegungsschatten“ nennt. Legen wir eine geschlossene Fläche, welche den Bewegungsschatten in dem irgend wie gestalteten Querschnitt Σ schneidet, so in den Raum, daß sie in einem bestimmten Zeitmoment den Körper vollständig umschließt, so hat auf ihr die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ nur im Querschnitt Σ von Null verschiedene Werte. Der Gauß'sche Satz liefert uns also den Satz, daß das Flächenintegral der elektrischen Kraft über jeden Querschnitt des Bewegungsschattens, der ganz außerhalb des elektrischen Körpers verläuft, 4π mal der Gesamtladung ist. — Schneidet der Querschnitt den elektrischen Körper, so tritt anstelle der Gesamtladung die Ladung des **vor** dem Querschnitt liegenden Teiles des elektrischen Körpers.

Da die Felderregungen, welche die einzelnen Teile des elektrischen Körpers verursachen, sich auch bei beliebiger Bewegung einfach superponiren, so kann man sich den Bewegungsschatten des ganzen Körpers entstanden denken durch Ueberlagerung der Schatten seiner Teile bei beliebiger Zerlegung. Unsere Sätze über die Flächenintegrale der elektrischen Kraft gelten dann un-

verändert auch für die Querschnitte der Teilschatten.

3. Betrachten wir nun die geradlinige Bewegung. Die Geschwindigkeit mag in beliebiger Weise veränderlich sein, jedoch soll ein gewisser über der Lichtgeschwindigkeit liegender Wert v_0 niemals unterschritten werden:

$$v > v_0 > c. \tag{3}$$

Parallel der Bewegungsrichtung werde die x-Axe eines Koordinatensystemes gelegt. Dann wird der Bewegungsschatten jedes unendlich kleinen Teilchens de als eine Rotationsfläche erscheinen, deren Axe parallel x liegt. Der Schatten beginnt mit einer Spitze bei dem Teilchen und erweitert sich nach hinten ins Unendliche. Die Tangentialebenen in der Spitze bilden mit der x-Axe sämtlich den Winkel α bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin\alpha = \frac{c}{v}, \tag{4}$$

wobei v den augenblicklichen Wert der Geschwindigkeit bezeichnet. Nach unserer Annahme über v ist α stets kleiner als der zu v_0 gehörige, also durch

$$\sin\alpha_0 = \frac{c}{v_0} \tag{5}$$

bestimmte Wert α_0. Legen wir an de einen geraden Kreiskegel mit dem Winkel α_0, so muß in dessen Innern der ganze Bewegungsschatten liegen. Hieraus folgt, daß der Bewegungsschatten des ganzen elektrischen Körpers innerhalb eines Raumes liegt, der abgegrenzt wird, wenn eine Ebene, welche mit der x-Richtung den Winkel α_0 bildet, um den Körper gerollt wird.

Für den Schattenkegel des unendlich kleinen Elementes de bildet jeder ebene Querschnitt ⊥ zur Bewegungsrichtung eine Kreisfläche, deren Radius kleiner ist als $p \operatorname{tg}\alpha_0$, wenn p die Entfernung des Schnittes von de bedeutet. Nach den Erörterungen des Abschnittes 2 hat das Flächenintegral der elektrischen Kraft über den Querschnitt den Wert $4\pi de$:

$$\int \mathfrak{E}_\nu d\sigma = \int \mathfrak{E}_{-x} d\sigma = 4\pi de. \tag{6}$$

Wir wollen nun annehmen, daß der betrachtete Querschnitt ganz im Innern des Körpers liegt, und daß im Bereich seiner ganzen Fläche die elektrische Raumdichte, die wir mit ϱ bezeichnen wollen, konstant ist. Dann erfährt infolge der Felderregung

durch das Element de eine Schicht des Körpers von der Dicke dp bei dem Querschnitt im Ganzen eine hemmende Kraft:

$$(7) \qquad d\mathfrak{F} = \int \mathfrak{E}_p \varrho dp d\sigma = \varrho dp \int \mathfrak{E}_p d\sigma = 4\pi \varrho de dp.$$

Liegt der ganze Schatten von de ab bis zur Enfernung p innerhalb des Körpers und variirt die Dichte ϱ nur in der Bewegungsrichtung x des Körpers, so hat die durch de verursachte Erregung bis zu der rückwärts in der Entfernung p gelegenen Ebene $\perp x$ eine hemmende Kraft zur Folge im Betrage von:

$$(8) \qquad d\mathfrak{F} = 4\pi de \,.\int_0^p \varrho\, dp.$$

Man wird bemerken, daß $d\mathfrak{F}$ garnicht von der Geschwindigkeit v und ihrer Aenderung, sondern allein von der Beschaffenheit des Körpers abhängt.

4. Körper besonderer Form I. Art. Es ist sofort ersichtlich, wie wir von diesen Sätzen Nutzen ziehen können, um Körper zu konstruiren, bei welchen sich die elektromagnetische Hemmung in einfachster Weise angeben läßt. Indem wir geradlinige Bewegung gemäß der Bedingung (2) annehmen, werden wir dies in zwei Arten erreichen. Hier zunächst setzen wir fest: Auf Ebenen senkrecht zur Bewegungsrichtung sei die elektrische Dichte ϱ konstant. Der Körper (genauer gesprochen, seine Elektrisirung) sei hinten durch eine ebene Fläche Σ begrenzt, deren Randkurve mit Λ bezeichnet werden mag. Die ganze Ladung liege innerhalb eines Raumes, begrenzt durch die ebene Fläche Σ und eine Kegelfläche Λ_0, die entsteht, wenn längst Λ eine Ebene rollt, die mit der Bewegungrichtung den Winkel α_0 bildet. Im Falle der Körper nicht den ganzen Raum Σ, Λ_0 ausfüllt, soll er vorn so begrenzt sein, daß seine Tangentenebenen mit der Bewegungsrichtung Winkel bilden, die gleich oder grösser sind als α_0.

Unter diesen Bedingungen wird der Bewegungsschatten jedes Elementes de bis zur Grenzebene Σ ganz im Innern des Körpers liegen, sodaß wir durchweg (7) anwenden können. Ist ξ die Entfernung von der hinteren Grenzebene Σ und ersetzen wir in (8) das Integral rechts durch

$$(9) \qquad \varepsilon_\xi = \int_0^\xi \varrho_\xi d\xi,$$

so erhalten wir in

$$d\mathfrak{F} = 4\pi d e \varepsilon_{\mathfrak{x}} \tag{10}$$

die gesamte hemmende Kraft, welche der Körper infolge der Felderregung durch de erfährt. $\varrho_{\mathfrak{x}}$ bedeutet dabei die zu $\mathfrak{x}$ gehörige Dichte, $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ die Elektrizitätsmenge, welche zu der Flächeneinheit einer unendlich ausgedehnten Platte zwischen der hinteren Grenzfläche und einer parallelen Ebene im Abstand $\mathfrak{x}$ gehören würde, wenn die Verteilung der Elektrizität dieselbe wäre wie in dem betrachteten Körper.

Wir wollen dabei bemerken, daß

$$\varrho_{\mathfrak{x}} = \frac{d\varepsilon_{\mathfrak{x}}}{d\mathfrak{x}} \tag{9'}$$

ist. — Durch Summation der $d\mathfrak{F}$ für alle Elemente de ergiebt sich für die hemmende Kraft $\mathfrak{F}$, welche der Körper im Ganzen erfährt:

$$\mathfrak{F} = 4\pi \int d\mathfrak{x}\, Q_{\mathfrak{x}} \varrho_{\mathfrak{x}} \varepsilon_{\mathfrak{x}} = 2\pi \int Q_{\mathfrak{x}} d\varepsilon_{\mathfrak{x}}^2, \tag{11}$$

wobei $Q_{\mathfrak{x}}$ den Inhalt des Querschnittes in der Entfernung $\mathfrak{x}$ von der hinteren Grenzfläche bezeichnet.

Für den speziellen Fall konstanter Dichte ist:

$$\varepsilon_{\mathfrak{x}} = \varrho \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{F} = 4\pi\varrho^2 \int d\mathfrak{x}\, Q_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}. \tag{12}$$

Bildet der Körper überdies einen geraden Kreiskegel mit dem Oeffnungswinkel α_0 und der Höhe Ξ, sodaß die hintere Grenzfläche Σ ein Kreis mit dem Radius $\Xi \operatorname{tg} \alpha_0$ wird, so erhalten wir

$$Q_{\mathfrak{x}} = \pi (\Xi - \mathfrak{x})^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0, \tag{13}$$

und daher:

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi^2}{3} \varrho^2 \Xi^4 \operatorname{tg}^2 \alpha_0 = \frac{3E^2}{\Xi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = \frac{3E^2}{P^2}. \tag{14}$$

E bezeichnet die Gesamtladung des Körpers, P den Radius der hinteren Grenzfläche.

4. Körper besonderer Form II. Art. Die angekündigten Körper II. Art stellen Spiegelbilder der Körper I. Art in Bezug auf Ebenen $\perp$ zur Bewegungsrichtung dar. Die elektrische Dichte ist also in ihnen wiederum auf Ebenen zur Bewegungsrichtung konstant; die ebene Begrenzungsfläche liegt aber nun vorn und die kegelförmige oder abge-

rundete Begrenzung hinten. — Das für uns Wesentliche bei Körpern dieser Art ist, daß für jedes elektrische Teilchen de alle diejenigen Stellen des Raumes bis zur vorderen Grenzebene, von denen Schattenkegel de treffen könnten, auch wirklich elektrische Masse enthalten, also zur Geltung kommen. Bei der Symmetrie der elementaren Schattenkegel folgt hieraus unmittelbar, daß die elektrische Kraft im ganzen Innern des elektrischen Körpers parallel oder entgegengesetzt der Bewegungsrichtung liegen und auf Ebenen senkrecht zur Bewegungsrichtung konstant sein muß. $\mathfrak{E}$ erscheint also hier als Funktion des Abstandes von der vorderen Grenzebene. Wir können sie mit Hülfe des Gauß'schen Satzes sogleich bestimmen. Zu dem Zweck legen wir in dem Abstand $\mathfrak{x}$ von der vorderen Grenzebene durch den Körper eine parallele Ebene ($\mathfrak{x}$), grenzen in dieser, und zwar innerhalb des Körpers, eine Fläche von dem beliebigen Inhalt q ab, konstruiren durch die begrenzende Kurve nach vorne hin einen Cylinder parallel der Bewegungsrichtung und schließen ihn außerhalb des Körpers durch eine beliebige Fläche ab. Der so abgegrenzte Körper enthält die Elektrizitätsmenge $q\varepsilon_{\mathfrak{x}}$, wenn wiederum wie in der Gleichung (9) durch:

$$5)\qquad \varepsilon_{\mathfrak{x}} = \int_0^{\mathfrak{x}} \varrho_{\mathfrak{x}} d\mathfrak{x}; \quad \varrho_{\mathfrak{x}} = \frac{d\varepsilon_{\mathfrak{x}}}{d\mathfrak{x}}$$

$\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ definirt wird. Auf der Oberfläche ist $\mathfrak{E}_v$ nur in ($\mathfrak{x}$) von Null verschieden und hat hier überall den Wert $\mathfrak{E}_{\mathfrak{x}}$. Hieraus folgt nach dem Gauß'schen Satz (2): $q\mathfrak{E}_{\mathfrak{x}} = 4\pi q \varepsilon_{\mathfrak{x}}$, also

$$(16)\qquad \mathfrak{E}_{\mathfrak{x}} = 4\pi\varepsilon_{\mathfrak{x}}.$$

Der Widerstand elektrodynamischen Ursprungs, welchen der Körper im Ganzen erfährt, ist hiernach

$$(17)\qquad \mathfrak{F} = \int de\,\mathfrak{E}_{\mathfrak{x}} = 4\pi\int d\mathfrak{x}\, Q_{\mathfrak{x}} \varrho_{\mathfrak{x}} \varepsilon_{\mathfrak{x}} = 2\pi\int Q_{\mathfrak{x}}\, d\varepsilon_{\mathfrak{x}}^2.$$

Vergleichen wir hiermit (11), so ist ersichtlich, daß ein Körper der zweiten Art eben denselben Widerstand erfährt, wie der spiegelbildlich gleiche Körper der ersten Art. Insbesondere in den Fällen konstanter Dichte und eines Kreiskegels gelten also wiederum die Formeln (12) und (14).

5. Plattenförmige Körper. Unsere Formeln umfassen ohne Weiteres den Fall von planparallelen Platten, vorausgesetzt, daß die Ränder gemäß dem Winkel α_0 (oder auch stärker) nach der einen oder der anderen Seite abgeschrägt sind. Besonderes

Interesse beansprucht der Fall der dünnen Platte. Der Querschnitt Q_ξ variirt dann nur wenig und um so weniger je dünner die Platte ist. Näherungsweise gilt deshalb nach (11) und (17) die Formel:

$$\mathfrak{F} = 2\pi Q\varepsilon^2, \tag{18}$$

wobei Q die Flächenausdehnung der Platte und ε die Gesamtelektrisirung der Flächeneinheit bedeutet. Ist ε von Null verschieden, so wird diese Formel um so genauer, je dünner die Platte bei gleicher Elektrisirung gegenüber ihrer Ausdehnung wird, weil dann der Einfluß der Randteile mehr und mehr zurücktritt. Durch hinreichende Verringerung der Dicke kann jede beliebige Genauigkeit erreicht werden.

Ist $\varepsilon = 0$, wechseln also innerhalb der Platte positive und negative Schichten so miteinander ab, daß im Ganzen genommen die Flächenelektrisirung verschwindet, so ergiebt (18): $\mathfrak{F} = 0$, d. h. die Platte zeigt, abgesehen von den Randteilen überhaupt keinen elektrodyamischen Widerstand. Der Einfluß der Randteile bleibt hier allein übrig und darf daher nicht vernachlässigt werden. Wiederum aber gilt, daß die Randteile bei gleicher Anhäufung von freier Elektrizität innerhalb der Platte um so mehr an Einfluß verlieren, je kleiner die Dicke wird. Die Platte kann also bei beliebig großen Anhäufungen von freier Elektrizität in ihrem Innern dennoch einen beliebig kleinen elektrodynamischen Widerstand zeigen.

6. Schlußfolgerungen. Blicken wir nun auf die drei letzten Abschnitte zurück, so finden wir als charakteristisch für das Verhalten der untersuchten elektrischen Körper, daß die hemmende mechanische Kraft elektromagnetischen Ursprungs vollständig unabhängig ist, sowohl von der Geschwindigkeit als auch von ihrer Veränderung, sofern nur die Bedingung

$$v > v_0 > c \tag{3}$$

erfüllt wird. So haben wir denn hier einen Fall, wo es durchaus unmöglich scheint, von einer durch die elektrische Ladung verursachten „Trägheit“ zu sprechen; ein konstanter Widerstand ist vorhanden, weiter nichts. Sollte keine andere Ursache zu einer Trägheit vorhanden sein, so müßte die Geschwindigkeit momentan unter v_0 herabsinken oder über jede Grenze hinaus wachsen, wenn die treibende mechanische Kraft im geringsten kleiner oder größer wäre als $\mathfrak{F}$.

Der zweite Fall würde z. B. eintreten, wenn der elektrisirte Körper sich in einem homogenen elektrischen Felde von einer größeren Intensität als

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{F}}{E} \tag{19}$$

bewegte. E bezeichnet wiederum die Gesamtladung. — Es ist nach (11), (17), (9), (15):

$$\mathfrak{F} = 4\pi \int \varepsilon_{\mathfrak{x}} Q_{\mathfrak{x}} d\mathfrak{x}; \quad E = \int Q_{\mathfrak{x}} d\varepsilon_{\mathfrak{x}}.$$

Es folgt hieraus, daß bei hinreichend klein gewählter Dichte schon beliebig kleine elektrische Felder genügen würden, um bei Abwesenheit einer Trägheit von anderem als elektrodynamischen Ursprung unendlich große Geschwindigkeiten zu ergeben.

Zum Schluß mag noch bemerkt werden, daß $\mathfrak{F}$ stets positiv ist, also immer einen wirklichen Widerstand und niemals eine treibende Kraft anzeigt, wie auch immer die elektrische Verteilung in dem Körper sein mag. Es folgt dieses sogleich aus unseren Formeln, wenn beachtet wird, daß $Q_{\mathfrak{x}}$ mit wachsendem $\mathfrak{x}$ nicht zunehmen kann.

Ueber das allgemeine Problem der Variationsrechnung.

Von

Constantin Carathéodory.

Vorgelegt von D. Hilbert am 25. 2. 1905.

Es gibt zwei Methoden mit welchen man die Variationsrechnung begründen kann. Lagrange und Weierstraß haben die bekannteste von ihnen aufgestellt, die auf ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Extremums führt. Die andere ist viel älter, da sie schon gelegentlich von Joh. Bernoulli benutzt wurde und in der Jacobi-Hamiltonschen Theorie enthalten ist[1]; mit ihrer Hülfe wird das Variationsproblem auf ein Problem der gewöhnlichen Maxima und Minima reduziert.

Ich möchte in dieser Mitteilung kurz skizzieren, wie man für das allgemeine Variationsproblem — mit Differentialgleichungen als Nebenbedingungen — auf diesem letzten Wege, die Lagrangeschen Differentialgleichungen ableiten kann. Ein System von hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Extremums wird sich zugleich ergeben.

Ich beschränke mich hier auf den Fall, wo das Integral

$$J = \int f(x, y, z, p, q)\, dx, \tag{1}$$

das zu einem Minimum gemacht werden soll, längs einer Kurve genommen wird, die zwei gegebene Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 verbindet und die Differentialgleichung

$$g(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

1) Joh. Bernoulli Opera (Lausanne 1742) Vol. II pag. 266. Vgl. auch meine Dissert. „Ueber diskontinuirliche Lösungen“ (Göttingen 1904) pag. 63 ff.

erfüllt; in den Formeln (1) und (2) sind $\frac{dy}{dx}$ mit p, $\frac{dz}{dx}$ mit q bezeichnet. Ich habe aber die Rechnungen im folgendem derart gestaltet, daß eine Uebertragung auf den allgemeinen Fall ohne weiteres zu vollziehen ist.

§ 1. Die geodätisch äquidistanten Flächen.

Man betrachte im Raume der x, y, z eine einparametrige Schar von Flächen

$$\varphi(x, y, z) = \mu. \tag{3}$$

Der Wert des unbestimmten Integrals (1) längs einer willkürlichen Kurve genommen, welche der Differentialgleichung (2) genügt, ist dann eine Funktion von μ und es besteht die Gleichung

$$\frac{dJ}{d\mu} = \frac{f}{\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z}. \tag{4}$$

Man suche jetzt in jedem Punkte des Raumes diejenige Richtung p, q, die, der Differentialgleichung (2) genügend, den Ausdruck (4) zu einem Minimum macht. Dieses ist ein Problem der gewöhnlichen Maxima und Minima; es müssen die partiellen Ableitungen nach p und q der Größe

$$\mathfrak{F}(p, q) = \frac{f}{\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z} + \nu g \tag{5}$$

verschwinden, wo ν eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet.

So erhält man das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{(\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z) f_p - f\cdot\varphi_y}{(\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z)^2} + \nu g_p &= 0 \\ \frac{(\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z) f_q - f\cdot\varphi_z}{(\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z)^2} + \nu g_p &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die Größen ν, p, q werden aus diesen Gleichungen und aus der Gleichung (2) als Funktionen von $x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ bestimmt. Wir wollen jetzt fordern, daß für die so bestimmten Richtungen, die Größe $\frac{dJ}{d\mu}$ auf jeder Fläche der Schar (3) einen konstanten Wert besitze. Die Flächen einer Schar bei welcher diese letzte Bedingung erfüllt ist, wollen wir **geodätisch äquidistant** nennen. Man kann, bei einer solchen Schar von Flächen, den Parameter μ immer derart wählen, daß die Größe $\frac{dJ}{d\mu}$, in jedem Punkte eines gewissen räumlichen Gebietes, gleich eins sei.

Wenn also die Schar (3) aus geodätisch äquidistanten Flächen besteht, so muß (wegen (4)) die Gleichung

$$f = \varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z \tag{7}$$

gleichzeitig mit den Gleichungen (6) stattfinden[1]). Dann reduzieren sich aber die Gleichungen (6) auf

$$f_p - \varphi_y + \nu f g_p = 0,$$
$$f_q - \varphi_z + \nu f g_q = 0;$$

oder, wenn man $\lambda = \nu f$ setzt, auf

$$f_p + \lambda g_p = \varphi_y, \tag{8}$$
$$f_q + \lambda g_q = \varphi_z. \tag{9}$$

Im Falle wo man p, q und λ aus (2), (7), (8), (9) eliminieren kann, erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Psi(x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0 \tag{10}$$

für die Scharen von geodätisch äquidistanten Flächen. Eine hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser Elimination ist, daß die Funktionatdeterminante von (8), (9) und (2) nach p, q, λ, d. h. die Größe

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{pp} + \lambda g_{pp} & f_{pq} + \lambda g_{pq} & g_p \\ f_{pq} + \lambda g_{pq} & f_{qq} + \lambda g_{qq} & g_q \\ g_p & g_q & 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

von null verschieden sei. Dann läßt sich auch die Gleichung (10) nach φ_x auflösen, was notwendig ist, um das allgemeine Existenztheorem der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung anwenden zu können.

§ 2. Die Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Im Falle wo die obige Bedingung erfüllt ist, kann man in der Umgebung einer beliebig vorgeschriebenen Anfangsfläche $\varphi_1(x, y, z) = 0$ eine Flächenschar konstruieren, die der Differentialgleichung (10) genügt. Wir wollen diejenige Kurven untersuchen, die auf den Flächen dieser Schar transversal stehen, d. h. für welche $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = q$ den Gleichungen (2), (8) und (9) ge-

1) Da wir stillschweigend die Voraussetzung machten daß die Flächen φ regulär sind, so können $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ nicht gleichzeitig verschwinden. Es muß nun auch ferner f, für die betrachteten Richtungen, aus naheliegenden Gründen von null verschieden sein.

nügen. Diese Kurven bilden, wie man aus unseren Betrachtungen leicht erkennt, ein Feld von Extremalen des Variationsproblems.

Durch Differentiation nach y von (2) und (7) erhält man:

$$g_y + g_p p_y + g_q q_y = 0 \tag{12}$$

$$f_y + (f_p - \varphi_y) p_y + (f_q - \varphi_z) q_y = \varphi_{xy} + p\varphi_{yy} + q\varphi_{yz}. \tag{13}$$

Die Gleichung (13) reduziert sich mit Hülfe von (8), (9) und (12) auf

$$f_y + \lambda g_y = \varphi_{xy} + p\varphi_{yy} + q\varphi_{yz}; \tag{13}$$

auf ähnlicher Weise erhält man

$$f_z + \lambda g_z = \varphi_{xz} + p\varphi_{yz} + q\varphi_{zz}. \tag{14}$$

Wenn man jetzt (8) und (9) längs einer Extremalen des Feldes differentiiert, so kommt

$$\frac{d}{dx}(f_p + \lambda g_p) = \varphi_{xy} + p\varphi_{yy} + q\varphi_{yz}$$

$$\frac{d}{dx}(f_q + \lambda g_q) = \varphi_{xz} + p\varphi_{yz} + q\varphi_{zz}.$$

Man erhält endlich, durch einsetzen dieser Werte in (13) und (14), die Lagrangeschen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f_p + \lambda g_p) &= f_y + \lambda g_y, \\ \frac{d}{dx}(f_q + \lambda g_q) &= f_z + \lambda g_z. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Diese Gleichungen liefern mit (2) ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung von y, z, λ als Funktionen von x.

§ 3. Die Legendresche Bedingung.

Um jetzt zu erkennen, ob die durch (2) und (15) erhaltenen Extremalen wirklich ein Minimum liefern, muß man untersuchen, ob, längs einer dieser Kurven, die Größe

$$\frac{dJ}{d\mu} = \frac{f}{\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z}$$

für die Werte von p und q, die den Gleichungen (2), (8) und (9) genügen, ihren kleinsten Wert erreicht. Eine hierfür hinreichende Bedingung ist (auch im allgemeinen Falle) ziemlich einfach abzuleiten.

Man betrachtet die Funktion (5)

$$\mathfrak{F}(p,q) = \frac{f(p,q)}{\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z} + \nu g(p,q)$$

und entwickelt $\mathfrak{F}(p+h, q+k)$ in eine Potenzreihe nach h und k, indem man den Größen p, q, ν diejenigen Werte erteilt, welche die Gleichungen (2) und (6) befriedigen. In dieser Entwickelung fehlen die linearen Glieder in h und k, und es wird sicher in der Umgebung von p, q ein Minimum dann stattfinden, wenn die quadratischen Glieder der Entwickelung d. h.

$$\mathfrak{F}_{pp} h^2 + 2\mathfrak{F}_{pq} hk + \mathfrak{F}_{qq} k^2 \tag{16}$$

für alle diejenigen (von null verschiedenen) Werte von h, k positiv bleibt, welche die Gleichung

$$g(p+h,\, q+k) = 0$$

oder einfacher die lineare Gleichung

$$g_p h + g_q k = 0 \tag{17}$$

befriedigen.

Hier nimmt (16), nach leichten Umformungen, die Form an

$$\frac{f_{pp} h^2 + 2f_{pq} hk + f_{qq} k^2}{\varphi_x + p\varphi_y + q\varphi_z} + \nu(g_{pp} h^2 + 2g_{pq} hk + g_{qq} k^2).$$

Unsere Bedingung kann also mit Rücksicht auf (7) und (17) geschrieben werden

$$\frac{(f_{pp} + \lambda g_{pp}) g_q^2 - 2(f_{pq} + \lambda g_{pq}) g_p g_q + (f_{qq} + \lambda g_{qq}) g_p^2}{f} > 0. \tag{18}$$

Der Zähler des Bruches (18) ist identisch mit der Determinante (11) wenn man diese mit negativem Vorzeichen nimmt.

Eine Bedingung für die Existenz eines starken Minimums, die der Weierstraßschen analog wäre, würde man mit gleicher Leichtigkeit erhalten können.

§ 4. Zusammenhang mit der Jacobi-Hamiltonschen Theorie.

Die Differentialgleichung (10) für die Fläschenschar $\varphi(x, y, z) = \mu$ ist identisch mit der Differentialgleichung der allgemeinen Wellenfläche in der geometrischen Optik. Sie ist zuerst von Hamilton für die Behandlung des räumlichen Variationsproblems ohne Nebenbedingungen aufgestellt worden [1]).

1) On Systems of Rays, third supplement, Irish Transations Bd. XVI (1837) pag. 1 u. ff.

Die Anfangswerte $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, \lambda_1$ bestimmen im allgemeinen eine Extremale; sie sind gegeben, jedesmal wo man die Stellung der Tangentialebene der Fläche φ_1 im Punkte x_1, y_1, z_1 kennt. Umgekehrt ist dann aber auch die Stellung der Tangentialebenen der zu φ_1 geodätisch äquidistanten Flächen in jedem Punkte dieser Extremalen bestimmt. Die Ersetzung einer beliebigen Fläche des Raumes durch eine Parallelfläche von gegebener geodätischer Entfernung, ist also eine Berührungstransformation, die der Lieschen Dilatation analog ist, und in der geometrischen Optik auf das sogenannte Huygens'sche Princip führt.

Hierdurch sieht man leicht, wie man, auch in unserem Falle, von einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung (10), durch Differentiation, die Integrale der Lagrangeschen Gleichung ableiten kann.

§ 5. Ausnahmefälle.

Um die hinreichenden Bedingungen eines Minimums zwischen zwei festen Punkten P_1 und P_2 einer Extremalen aufzustellen, genügt es nicht ein Feld im obigen Sinne konstruiert zu haben, d. h. eine Schicht von geodätisch-äquidistanten Flächen zu kennen, welche die Extremale $P_1 P_2$ transversal schneiden, und den Raum in der Umgebung dieser Kurve eindeutig ausfüllen. Man muß vielmehr noch die Sicherheit haben, daß es in der Umgebung der zu untersuchenden Extremalen noch andere Kurven gibt, die P_1 mit P_2 verbinden und der Differentialgleichung (2) genügen[1]).

Hinreichend dafür ist, daß die Extremalen des Extremalenbüschels durch P_1, nicht alle auf einer und derselben Fläche liegen, sondern einen Raum erfüllen und daß die zu untersuchende Extremale, mindestens teilweise, im Innern dieses Raumes verläuft.

Dieses findet (mindestens für kontinuierliche Extremalen) jedesmal dann nicht statt, wenn man zwischen den Gleichungen (2) und (15) die Größe λ eliminieren kann. Dann wird jede Lösung des Variationsproblems, wenn eine solche existiert, mindestens einen Knickpunkt enthalten müssen[2]).

Andere Probleme sind noch spezieller: das sind diejenigen für welche der Wert des zu untersuchenden Integrals unabhängig vom Integrationswege ist. Dieses findet z. B. für

$$(19) \qquad \begin{cases} J = \int q\,dx, \\ g(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

1) Dieses wurde zuerst von G. v. Escherich betont. Vgl. für die Litteratur Math. Encykl. Bd. II A 8a pag. 634.

2) Siehe meine Diss. pag. 45 ff.

statt. Die Lagrangeschen Differentialgleichungen (15) nehmen hier die Form an

$$
(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\left(\frac{dg_p}{dx}-g_y\right)+g_p\frac{d\lambda}{dx} = 0,\\ &\lambda\left(\frac{dg_q}{dx}-g_z\right)+g_q\frac{d\lambda}{dx} = 0. \end{aligned}\right.
$$

Für $\lambda = 0$ verschwinden die Gleichungen (20) identisch und die gesuchte Kurve ist an keine andere Bedingung als $g = 0$ gebunden, was zu erwarten war.

Wenn man aber die Fragestellung modifiziert und nach derjenigen Kurve sucht, die für gegebene x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 die Größe z_2 zu einem Maximum oder Minimum macht, so zeigt unsere Betrachtung der geodätisch-äquidistanten Flächen, daß $\lambda \neq 0$ sein muß. Also ist wegen (20) die Determinante

$$
(21)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dg_p}{dx}-g_y & g_p \\ \frac{dg_q}{dx}-g_z & g_q \end{vmatrix} = 0.
$$

Die Kurven, welche durch die Gleichungen (2) und (21) bestimmt werden, sind die Charakteristiken derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Mongesche Kurven der Gleichung $g = 0$ genügen, wie Herr Hilbert gezeigt hat.

Im Falle wo g die Form

$$
g = q-\bar{g}(x,y,p)
$$

annimmt, reduziert sich unser letztes Problem auf das einfachste Variationsproblem ohne Nebenbedingung.

Die Kurven die durch (2) und (21) geliefert werden sind, in der Regel, singuläre Extremalen des allgemeinen Problems das wir zu Anfang betrachteten. Sie bilden im Allgemeinen die Grenze des räumlichen Gebietes, das durch die Extremalen, die durch einen Punkt gehen, erfüllt wird. Um dies zu zeigen, kann man in den Gleichungen (15) die Größe λ durch $\frac{1}{\varrho}$ ersetzen. Dann erhält man

$$
(22)\qquad \varrho^2\left(\frac{df_p}{dx}-f_y\right)+\varrho\left(\frac{dg_p}{dx}-g_y\right) = g_p\frac{d\varrho}{dx},
$$

$$
(23)\qquad \varrho^2\left(\frac{df_q}{dx}-f_z\right)+\varrho\left(\frac{dg_q}{dx}-g_z\right) = g\,\frac{d\varrho}{dx}.
$$

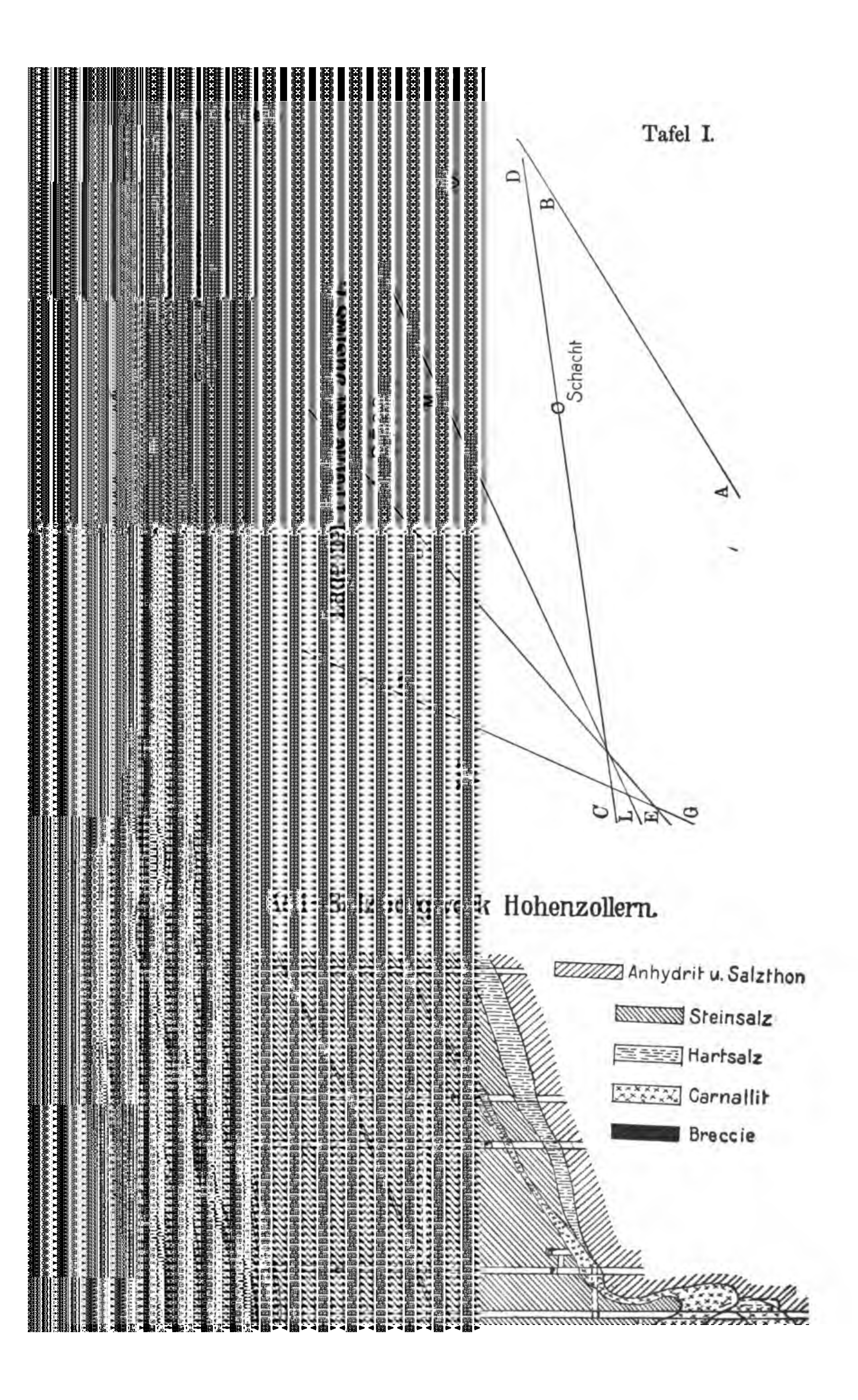
Eine dieser Gleichungen kann durch

$$(24)\quad \varrho\left[g_q\left(\frac{df_p}{dx}-f_q\right)-g_p\left(\frac{df_q}{dx}-f_z\right)\right]+\left[g_q\left(\frac{dg_p}{dx}-g_y\right)-g_p\left(\frac{dg_q}{dx}-g_z\right)\right]=0$$

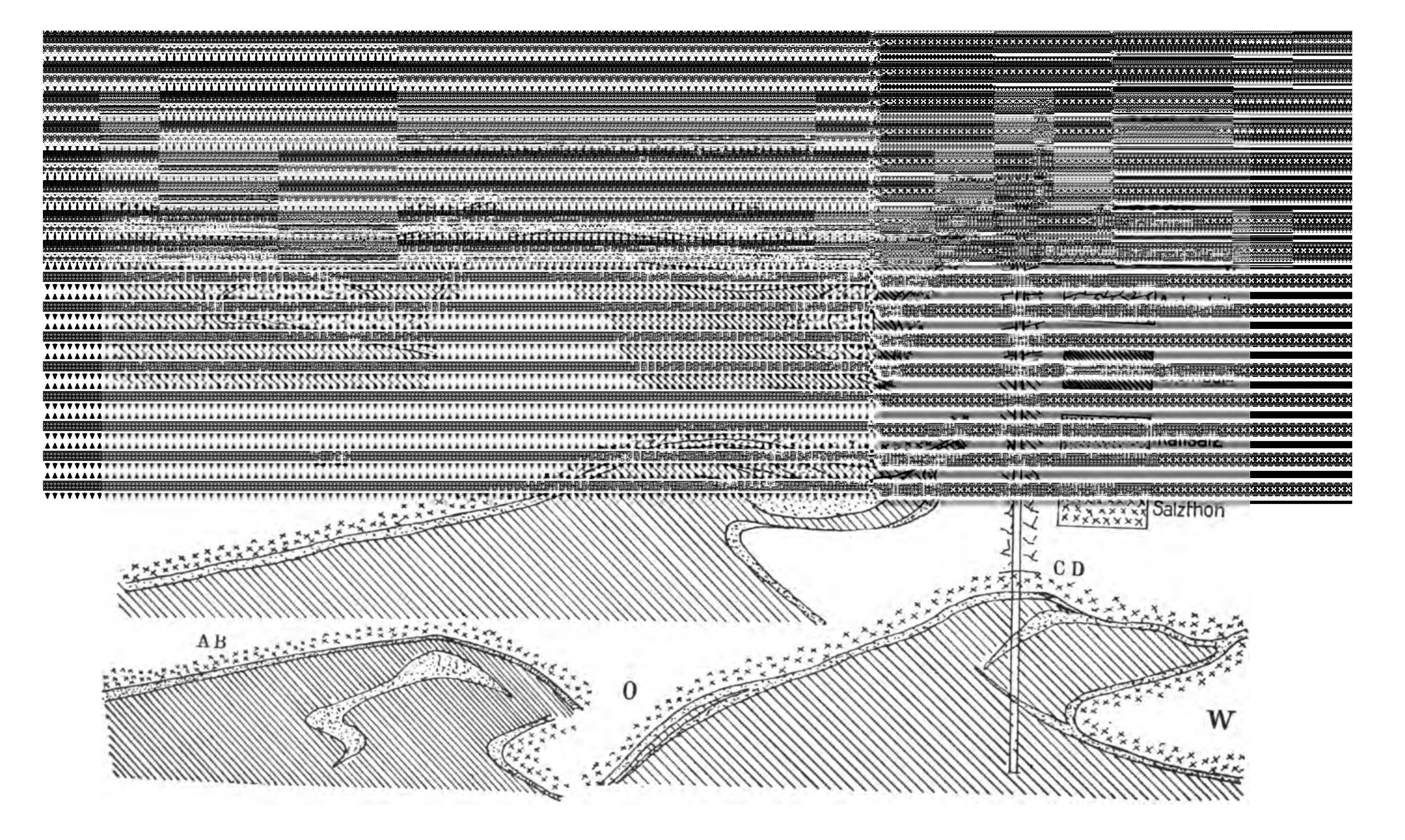
ersetzt werden.

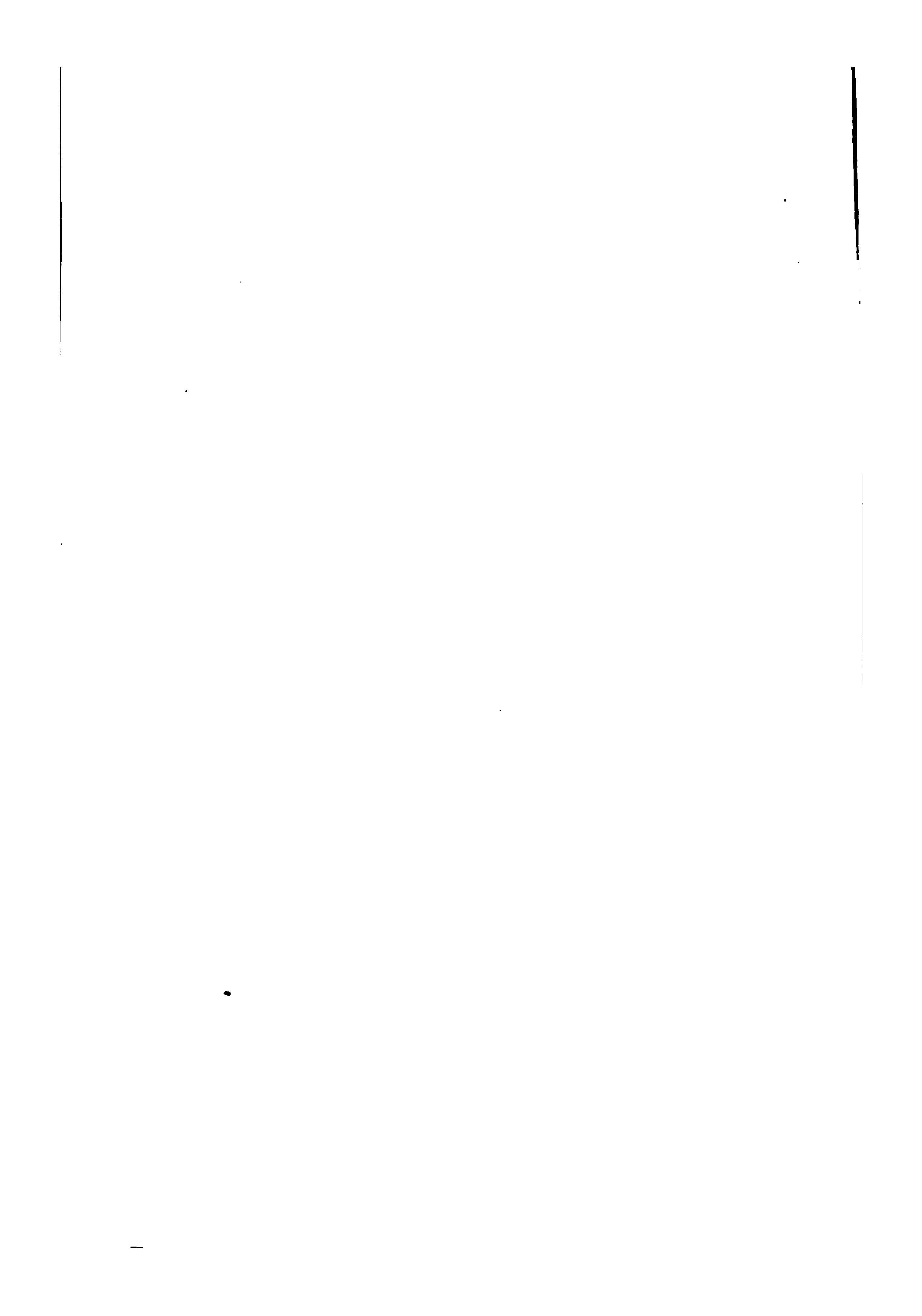
Die Lösungen des Gleichungssystems (22) oder (23) und (24), die dem Anfangswerte $\varrho_1 = 0$ entsprechen sind aber gerade die durch (2) und (21) erhaltene Kurven.

Tafel I.



D
B
Schacht
A
C
L
E
G
Hohenzollern.
Anhydrit u. Salzthon
Steinsalz
Hartsalz
Carnallit
Breccie


Salzthon
C D
A B
O
W



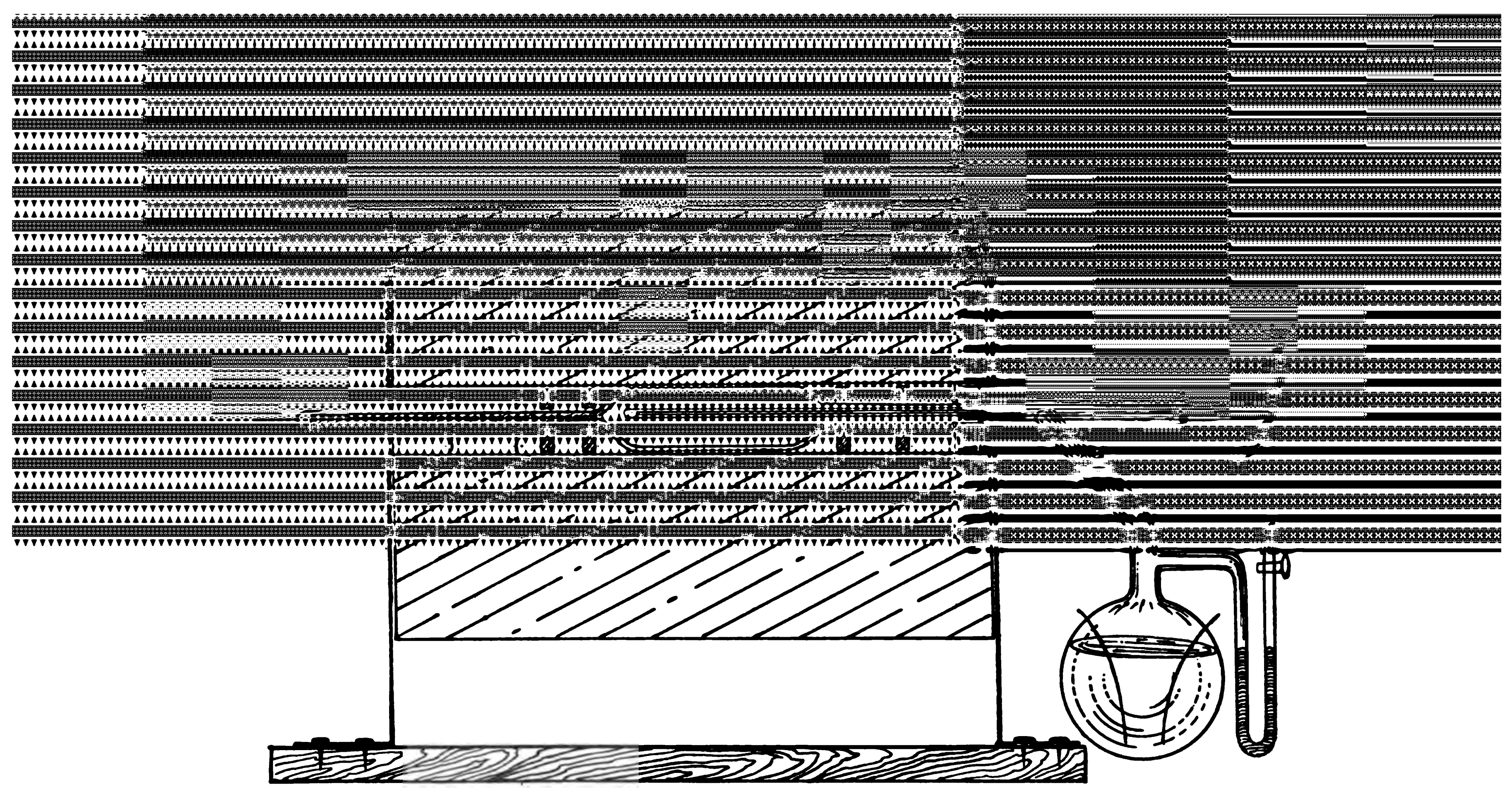
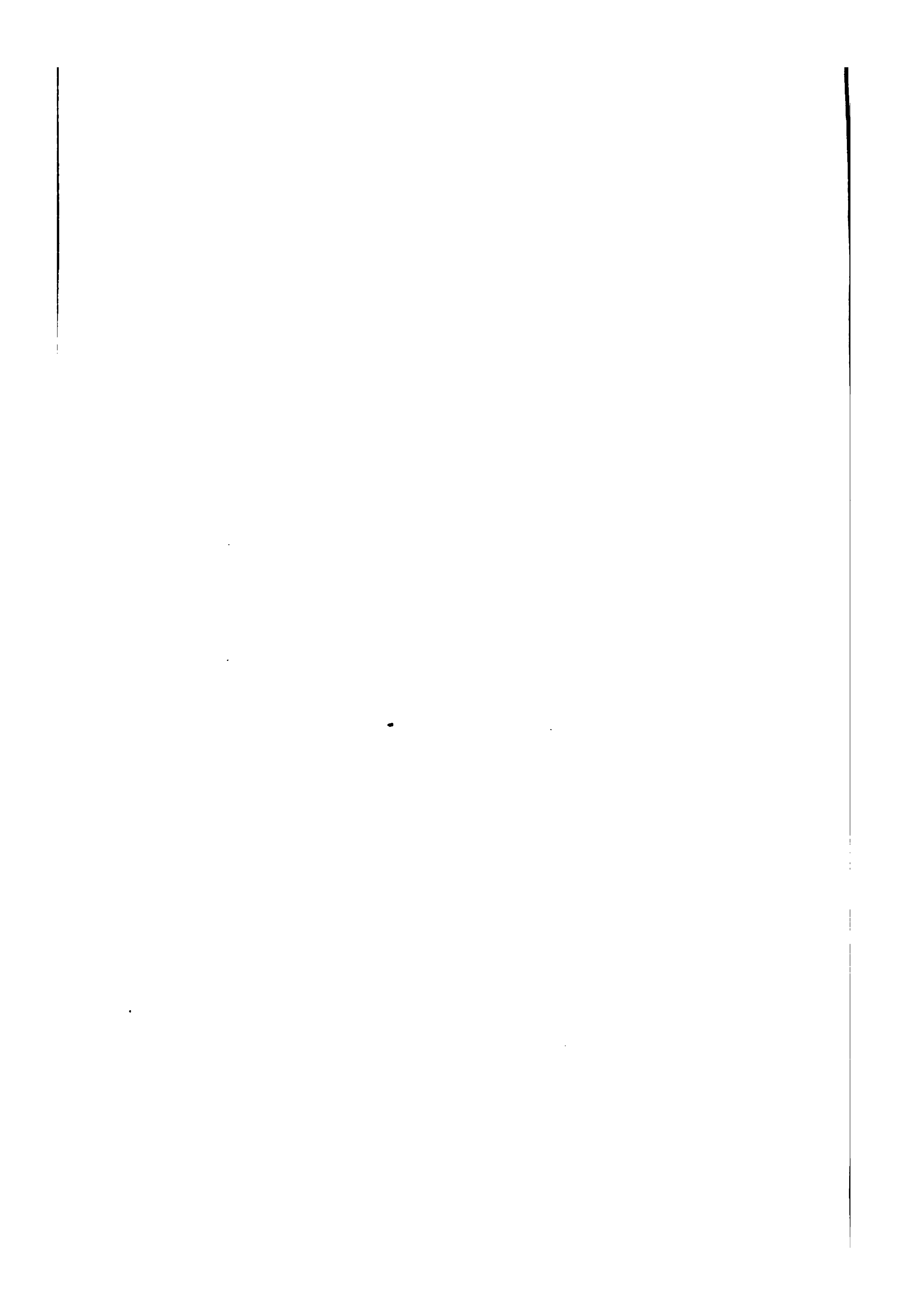


Fig. 1 ($^1/_5$ nat. Grösse).



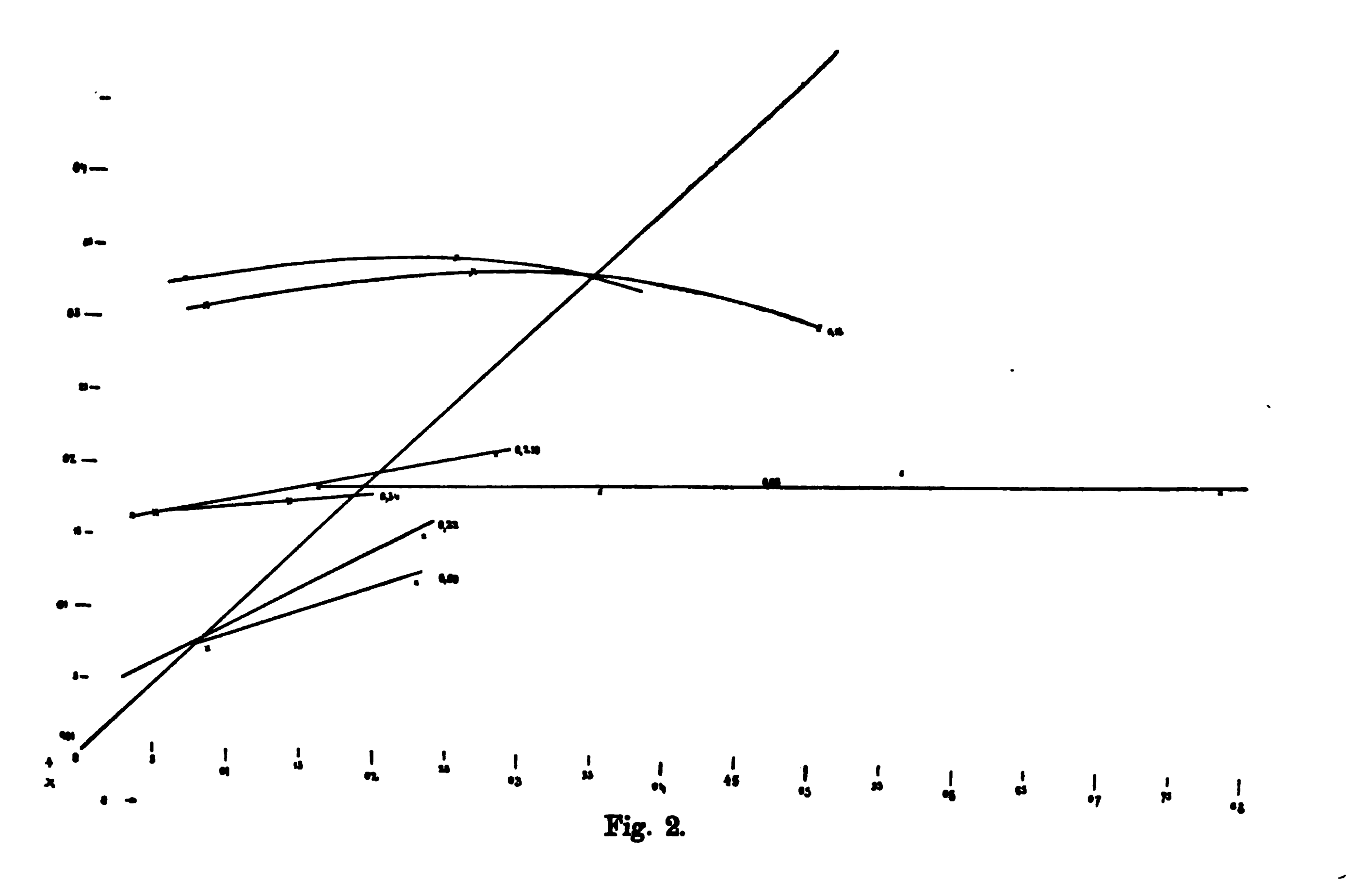


Fig. 2.

Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik.

Von

L. Maurer.

Vorgelegt von D. Hilbert am 25. 2. 1905.

Die vorliegende Untersuchung ist durch die Diskussion über die Frage veranlaßt worden, ob das Hamiltonsche Prinzip im Fall nicht holonomer Bedingungsgleichungen seine Geltung behält oder nicht. Um den Kernpunkt der Frage in Kürze klarzustellen, beschränke ich mich auf den einfachen Fall, daß die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes zu bestimmen ist. Der Einfachheit wegen nehme ich an, daß auf den Punkt keine Kraft wirkt, dagegen soll die Bewegungsfreiheit durch eine Bedingungsgleichung beschränkt sein.

Nehmen wir zunächst an, die Bedingungsgleichung enthalte nur die Koordinaten des Punktes, aber nicht die Geschwindigkeitskomponenten, sie habe also die Form

$$f(x\,y\,z) = 0 \tag{1}$$

Das Hamiltonsche Prinzip auf diesen Fall angewendet, verlangt, daß die Variation des Integrals

$$\Omega = \int_{t_1}^{t_2} \tfrac{1}{2}\, m(x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dt$$

für alle die Variationen $\delta x\, \delta y\, \delta z$ verschwinde, die mit der Bedingungsgleichung (1) verträglich sind, und für $t = t_1$ und $t = t_2$ den Wert Null annehmen. Hieraus ergeben sich für die Koordinaten die Differentialgleichungen

$$m\frac{dx'}{dt} = \varrho\frac{\partial f}{\partial x} \qquad m\frac{dy'}{dt} = \varrho\frac{\partial f}{\partial y} \qquad m\frac{dz'}{dt} = \varrho\frac{\partial f}{\partial z}$$

Lassen wir nun an Stelle der „holonomen" Bedingungsgleichung (1) die „nichtholonome" Bedingungsgleichung

$$\varphi x' + \psi y' + \chi z' = 0 \tag{2}$$

treten; hier bedeuten $\varphi\,\psi\,\chi$ Funktionen von $x\,y\,z$, die keiner Gleichung der Form

$$\varphi : \psi : \chi = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

genügen, so daß die Gleichung (2) nicht unbeschränkt integrabel ist.

Man schreibt die Bedingungsgleichung (2) auch häufig in der Form

$$\varphi dx + \psi dy + \chi dz = 0 \tag{2a}$$

Die beiden Formen (2) und (2a) der Bedingungsgleichung entsprechen verschiedenen Auffassungsweisen: bei Benützung der Form (2a) betrachtet man $x\,y\,z$ als unabhängige Variable, bei Benützung der Gleichung (2) betrachtet man diese Größen als Funktionen von t.

Fordert man, daß die Variationen $\delta x\,\delta y\,\delta z$ der Gleichung (2) genügen, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\varphi\delta x' + \psi\delta y' + \chi\delta z' + x'\delta\varphi + y'\delta\psi + z'\delta\chi \\
&= \varphi\delta x' + \psi\delta y' + \chi\delta z' + x'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right) \\
&+ y'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right) + z'\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\chi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\chi}{\partial z}\delta z\right) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Damit die Variation $\delta\Omega$ für alle dieser Gleichung genügenden Variationen $\delta x\,\delta y\,\delta z$ verschwinde, sind bekanntlich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
m\frac{dx'}{dt} &= \frac{d\varrho\varphi}{dt} - \varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial x}y' + \frac{\partial\chi}{dx}z'\right) \\
m\frac{dy'}{dt} &= \frac{d\varrho\psi}{dt} - \varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}x' + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\chi}{\partial y}z'\right) \\
m\frac{dz'}{dt} &= \frac{d\varrho\chi}{dt} - \varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}x' + \frac{\partial\psi}{\partial z}y' + \frac{\partial\chi}{\partial z}z'\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

erforderlich und hinreichend.

Für die wirklich stattfindende Bewegung gelten aber nicht *diese* Differentialgleichungen, sondern die folgenden:

$$\frac{dx'}{dt} = \varrho\varphi \qquad \frac{dy'}{dt} = \varrho\psi \qquad \frac{dz'}{dt} = \varrho\chi$$

Zu diesen Differentialgleichungen gelangt man, wenn man fordert,

daß die Variation $\delta\Omega$ für alle die Variationen $\delta x\,\delta y\,\delta z$ verschwinde, die der Bedingung

$$\varphi\delta x + \psi\delta y + \chi\delta z = 0 \tag{6}$$

genügen[1]).

Hertz bezeichnet in seiner Mechanik die Bahn, die durch die Gleichungen (4) bestimmt ist als „geodätische" Bahn, die durch die Gleichungen (5) bestimmte dagegen als „geradeste" Bahn.

Daß die wirklich stattfindende Bewegung auf einer geradesten Bahn und nicht auf einer geodätischen Bahn erfolgt, muß als Erfahrungstatsache betrachtet werden, darüber kann kein Zweifel bestehen. Dagegen gehen darüber die Ansichten auseinander, ob diese Tatsache mit dem Hamiltonschen Prinzip in Einklang zu bringen sei oder ob die Geltung dieses Prinzips sich auf den Fall holonomer Bedingungsgleichungen beschränke. Hertz vertritt die letztere Ansicht[2]). Er stützt sich dabei darauf, daß nach den Prinzipien der Variationsrechnung im Fall einer nicht holonomen Bedingungsgleichung (2) die Variationen der Gleichung (3) und nicht der Gleichung (6) genügen müssen. Hölder stellt sich auf den entgegengesetzten Standpunkt. Er unterscheidet zwei Arten von Variationen, die mit der Bedingungsgleichung (2a) verträglich sind; sie sind durch die Gleichungen (3) und (6) charakterisiert. Nachdem diese Unterscheidung getroffen ist, kann man offenbar sagen: das Hamiltonsche Prinzip gilt auch für den Fall einer nichtholonomen Bedingungsgleichung, vorausgesetzt, daß die zulässigen virtuellen Verrückungen durch die Gleichung (6) definirt werden.

Hamel[3]) geht noch einen Schritt weiter: er betrachtet die Variationen, wie sie in der Variationsrechnung definirt werden, als speciellen Fall der virtuellen Verrückungen. Für die ersteren gelten die bekannten Relationen

$$\delta x' = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} \text{ u. s. w.}$$

für die letzteren gelten sie im Allgemeinen nicht. Es kommen also 6 von einander unabhängige Bestimmungsstücke einer virtuellen Verrückung in Betracht:

$$\delta x\;\delta y\;\delta z \quad \delta x'\;\delta y'\;\delta z'$$

1) s. Hölder: über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Göttinger Nachrichten 1896, S. 122.

2) Mechanik, S. 23.

3) Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen in der Mechanik, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 50 Heft 1. Ueber die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik, Math. Annalen Bd. 59 S. 416.

Um die virtuellen Verrückungen, die mit der nichtholonomen Bedingungsgleichung (2a) verträglich sind, zu definiren, verfährt Hamel folgendermaßen: er betrachtet zunächst den Punkt als frei und setzt

$$\varphi dx + \psi dy + \chi dz = d\vartheta$$

Wäre die linke Seite dieser Gleichung unbeschränkt integrabel, so wäre $d\vartheta$ das Differential einer Funktion ϑ. Obwohl dies nun nicht der Fall ist, so benützt Hamel doch das Symbol ϑ und bezeichnet es als generalisirte, nichtholonome Koordinate. Die virtuelle Aenderung dieser generalisirten Koordinate wird durch die Gleichung

$$\delta\vartheta = \varphi\delta x + \psi\delta y + \chi\delta z$$

definirt. Wäre ϑ eine eigentliche Koordinate, so würde aus der Gleichung $d\vartheta = 0$ für die zulässigen virtuellen Verrückungen die Bedingung $\delta\vartheta = 0$ folgen. Diese Bedingungsgleichung $\delta\vartheta = 0$ behält Hamel nun auch in dem Fall bei, daß ϑ generalisirte (uneigentliche) Koordinate ist. Er kommt also schließlich zu derselben Definition der zulässigen virtuellen Verrückung wie Hölder.

Ob man sich auf den Standpunkt von Hertz oder auf den von Hölder stellen will, steht frei, denn was man in einem gegebenen Fall unter „zulässiger“ Variation verstehen will, ist Sache der Definition. Sofern man sich aber dafür entscheidet die von Hölder eingeführte Erweiterung des Begriffs der Variation anzunehmen, so muß verlangt werden, daß abgesehen von jeder Anwendung auf Mechanik von einem prinzipiellen Gesichtspunkt aus festgesetzt wird, welche Arten von Variation als zulässig angesehen werden sollen und es muß ferner verlangt werden, daß die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen, zu denen die verschiedenen Arten von Variation führen, nachgewiesen werden.

Diesen Forderungen kann man genügen, indem man von einer naheliegenden Verallgemeinerung des Begriffs der singulären Lösung einer Differentialgleichung ausgeht. Dieser Begriff bietet aber für die vorliegende Frage noch mehr: auf ihn gestützt kann man die dynamischen Gleichungen für unfreie Systeme aufstellen, ohne von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen Gebrauch zu machen. Auf diesem Weg umgeht man alle Schwierigkeiten, die zu einer Diskussion Anlaß geben können.

I. Ueber die singulären Integrale eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Es sei ein System von m Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt.

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots n \tag{1}$$

Hier bedeuten $X_1 X_2 \cdots X_n$ einwertige Funktionen der unabhängigen Variabeln t und der abhängigen Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen sei

$$x_\nu = f_\nu (a_1 a_2 \cdots a_n / t) \qquad \nu = 1, 2, \cdots n \tag{2}$$

wo $a_1 a_2 \cdots a_n$ Integrationskonstante bedeuten.

Um zu singulären Integralen der Differentialgleichungen (1) zu gelangen, betrachten wir nun die verfügbaren Konstanten $a_1 a_2 \cdots a_n$ als Funktionen der unabhängigen Variabeln t.

Die Differentialquotienten, die dieser Voraussetzung entsprechen, bezeichnen wir mit $\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$; die Bezeichnung $\frac{dx_\nu}{dt}$ behalten wir für die Differentialquotienten bei, die unter der Voraussetzung, daß die Größen $a_1 a_2 \cdots a_n$ nicht von t abhängen, gebildet sind.

Es ist somit

$$\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = \frac{dx_\nu}{dt} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} \qquad \nu = 1, 2, \cdots n \tag{3}$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (1)

$$\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = X_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} \tag{4}$$

Wollten wir verlangen, daß diese Differentialgleichungen mit den Gleichungen (1) übereinstimmen, daß also die Annahme, die Größen $a_1 a_2 \cdots a_n$ seien Funktionen von t, keine Aenderung der Form der Differentialgleichungen bewirke, so müßten für $\nu = 1, 2, \cdots n$ die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} = 0$$

bestehen.

Da nun die Funktionaldeterminante $\frac{\partial (x_1 x_2 \cdots x_n)}{\partial (a_1 a_2 \cdots a_n}$ nicht verschwindet — denn anderenfalls würden die Gleichungen (2) nicht

die **allgemeine** Lösung der Differentialgleichungen (1) darstellen — so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{da_\mu}{dt} = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, \cdots n$$

d. h. die Größen a_μ sind von t unabhängig.

Wenn also zwischen den Größen a_μ und der unabhängigen Variabeln t eine Beziehung festgesetzt wird, so muß sich die Form wenigstens eines Teils der Gleichungen (1) ändern.

Wir teilen nun die n-Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_n$ in zwei Gruppen — die erste möge etwa die Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_m$, die andere die übrigen $n-m$-Variabeln umfassen — und fordern, daß die ersten m der Differentialgleichungen (1), die sich auf die Variabeln der ersten Gruppe beziehen, ihre Form behalten.

Diese Forderung erscheint durchaus willkürlich, solange wir auch die übrigen $n-m$-Differentialgleichungen, die ihre Form ändern, zur Bestimmung der n-Funktionen x heranziehen müssen. Aber die Sache gestaltet sich wesentlich anders, wenn zu diesem Zweck anderweitige Bedingungsgleichungen zur Verwendung kommen. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall: wir setzen die Variabeln der zweiten Gruppe sämtlich gleich Null. Die Variabeln der ersten Gruppe, über die nicht von vornherein verfügt ist, mögen zur Unterscheidung von den gleich Null gesetzten Variabeln als „freie" Variable bezeichnet werden.

Damit die m ersten der Gleichungen (4) dieselbe Form haben wie die m ersten der Gleichungen (1) ist erforderlich, daß

$$(5) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} = 0 \text{ ist für } \nu = 1, 2, \cdots m$$

Aus der Festsetzung, daß die Variabeln der zweiten Gruppe verschwinden sollen, ergeben sich für die Größen $a_1 a_2 \cdots a_n$ die Gleichungen

$$(6) \qquad x_\nu = f_\nu(a_1 a_2 \cdots a_n / t) = 0 \text{ für } \nu = m+1, m+2, \cdots n$$

Durch die Gleichungen (5) und (6) sind die Größen $a_1 a_2 \cdots a_n$ vollständig bestimmt, sobald noch für m dieser Größen die Anfangswerte gegeben sind. Ueber diese Anfangswerte kann der Art verfügt werden, daß die freien Variabeln vorgeschriebene Anfangswerte annehmen.

Die Gleichungen (4) zerfallen in zwei Gruppen: die erste Gruppe umfaßt die Gleichungen

$$(4\text{a}) \qquad \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = X_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots m$$

die zweite Gruppe besteht aus den partiellen Differentialgleichungen

$$(4\text{b}) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu \qquad \nu = m+1,\ m+2, \cdots n$$

Um die freien Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_m$ zu bestimmen, genügen die Gleichungen (4a), und es ist hierzu nicht nötig, die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) zu kennen oder die Gleichungen (4b) heranzuziehen.

Ein Integralsystem der Differentialgleichungen (4a) bezeichne ich als „singuläres Integralsystem" der Differentialgleichungen (1).

2. Die eben aufgestellte Definition eines singulären Integralsystems weicht von der üblichen Bezeichnungsweise etwas ab. Zu ihrer Rechtfertigung dient die folgende Ueberlegung: Aus den Gleichungen (1) und den Gleichungen, die sich durch Differentiation aus ihnen ableiten lassen, eliminiren wir die Variabeln $x_{m+1} x_{m+2} \cdots x_n$ und ihre Derivirten. Wir gelangen so zu einem System (S) von Differentialgleichungen höherer Ordnung, das die Differentialgleichungen (1), soweit es sich um die Bestimmung der Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_m$ handelt, vollständig ersetzt. Daher liefert das allgemeine Integralsystem (2) der Differentialgleichungen (1) auch das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (S) und das singuläre Integralsystem, das durch die Gleichungen (6) und (4a) bestimmt ist, ist auch ein singuläres Integralsystem der Differentialgleichungen (S).

3. Die oben aufgestellte Definition des singulären Integralsystems läßt sich leicht erweitern.

Zu dem Zweck führen wir in die Differentialgleichungen (1) an Stelle der Variabeln x_ν neue Variable

$$(7) \qquad y_\nu = \varphi_\nu(x_1 x_2 \cdots x_n) \qquad \nu = 1, 2 \cdots n$$

ein. An Stelle der Gleichungen (1) treten die Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{dy_\nu}{dt} = Y_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots n \text{ wo}$$

$$(9) \qquad Y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} X_\lambda \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\lambda} \text{ ist.}$$

Wir betrachten nun die Variabeln $y_1 y_2 \cdots y_m$ als freie Variable und setzen die Variabeln $y_{m+1} y_{m+2} \cdots y_n$ gleich Null. Das dieser Einteilung entsprechende singuläre Integralsystem ist durch die Gleichungen

$$(10) \qquad \left(\frac{dy_\nu}{dt}\right) = Y_\nu \qquad \nu = 1, 2, \cdots m \text{ und}$$

(11) $$y_{m+1} = 0 \quad y_{m+2} = 0 \ldots y_n = 0$$

bestimmt.

Da die Gleichungen (8) mit den Gleichungen (1) gleichbedeutend sind, wollen wir auch dieses Integralsystem als „singuläres Integralsystem der Differentialgleichungen (1)" bezeichnen.

Damit das singuläre Integralsystem bestimmt ist, müssen 1) die „Bedingungsgleichungen" $\varphi_{m+1} = 0 \ \varphi_{m+2} = 0 \ldots \varphi_n = 0$ und 2) die „freien Funktionen" $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$, bezüglich deren die ursprünglich vorgelegten Differentialgleichungen (1) unverändert in Geltung bleiben, gegeben sein.

Das singuläre Integralsystem bleibt selbstverständlich ungeändert, wenn wir an Stelle der $n-m$-Funktionen $\varphi_{m+1} \ \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n$ $n-m$-Funktionen dieser Funktionen treten lassen, denn dies bedeutet nur eine Umformung der Bedingungsgleichungen. Es ist aber leicht zu sehen, daß das singuläre Integralsystem auch dann im Wesentlichen unverändert bleibt, wenn wir die m freien Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ durch beliebig zu wählende Funktionen dieser Funktionen ersetzen. Damit das singuläre Integralsystem bestimmt ist, muß also nur das System der Bedingungsgleichungen und das System der freien Funktionen gegeben sein.

4. Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß die Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ von einander unabhängig sind, sofern die Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden.

Unter dieser Voraussetzung können auch die Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als Funktionen der Größen $y_1 y_2 \ldots y_n$ betrachtet werden.

Wir setzen

(12) $$x_\nu = \psi_\nu (y_1 y_2 \ldots y_n) \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß diese Auflösung der Gleichungen (8) auch dann noch in Geltung bleibe, wenn die Variabeln $y_{m+1} y_{m+2} \ldots y_n$ verschwinden. Mit anderen Worten: wir nehmen nicht nur an, daß die Funktionaldeterminante $\frac{\partial (y_1 y_2 \ldots y_n)}{\partial (x_1 x_2 \ldots x_n)}$ nicht identisch verschwinde, wenn die Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden, sondern wir nehmen überdies an, daß diese Determinante auch nicht für alle die Werte der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ verschwinde, die den Bedingungsgleichungen $\varphi_{m+1} = 0 \ \varphi_{m+1} = 0 \ldots \varphi_n = 0$ genügen.

Unter dieser Voraussetzung können wir die Differentialgleichungen (10) in bemerkenswerter Weise umformen.

Bezeichnen wir mit

(13) $$\bar{\psi}_\nu (y_1 y_2 \ldots y_m)$$

den Ausdruck, in den der Ausdruck $\psi_\nu(y_1 y_2 \dots y_n)$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (11) übergeht. Es ist offenbar

$$\frac{\partial \bar{\psi}_\nu}{\partial y_\mu} (\mu = 1, 2, \dots m; \ \nu = 1, 2, \dots n)$$

der Wert, den die Derivirte $\frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_\mu}$ bei Berücksichtigung dieser Gleichungen annimmt. Für den Wert, den die Derivirte $\frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_\lambda} (\lambda > m)$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (11) annimmt, führen wir die Bezeichnung

$$(14) \qquad \frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_\lambda} = p_{\lambda\nu} \quad (\lambda = m+1, m+2, \dots n; \ \nu = 1, 2, \dots n)$$

ein. Wenn die n-Funktionen $\bar{\psi}_\nu(y_1 y_2 \dots y_m)$ gegeben sind, so können die $n(n-m)$-Funktionen $p_{\lambda\nu}(y_1 y_2 \dots y_m)$ immer noch beliebig gewählt werden. Mit Rücksicht auf (10) bestehen die Gleichungen

$$(15) \qquad \frac{d\bar{\psi}_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \bar{\psi}_\nu}{\partial y_\mu} \left(\frac{dy_\mu}{dt}\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \bar{\psi}_\nu}{\partial y_\mu} Y_\mu \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen (9), wenn man die Größen $x_1 x_2 \dots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet, mit Rücksicht auf (12)

$$X_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\lambda} \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen (11) und bei Benutzung der Bezeichnungen (13) und (14) können wir diese Gleichungen in der Form schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \bar{\psi}_\nu}{\partial y_\mu} Y_\mu = X_\nu - \sum_{\lambda=m+1}^{n} Y_\lambda p_{\lambda\nu}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (15) ein, so erhalten wir

$$\frac{d\bar{\psi}_\nu}{dt} = X_\nu - \sum_{\lambda=m+1}^{n} Y_\lambda p_{\lambda\nu}$$

Da es sich nur um die Bestimmung der m-Funktionen

$$y_\mu = \varphi_\mu(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad \mu = 1, 2, \dots m$$

handelt, spielen die Größen $Y_\lambda = \frac{dy_\lambda}{dt}$ $(\lambda = m+1, m+2, \dots n)$ die Rolle von Parametern. Um dies äußerlich hervortreten zu lassen, setzen wir $Y_\lambda = Y_{m+\varkappa} = -\varrho_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n-m)$.

Ferner setzen wir in Uebereinstimmung mit der oben einge-

führten Bezeichnungsweise $\frac{d\psi_\nu}{dt} = \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$. Bei Benützung dieser Bezeichnungen erhalten die vorstehenden Gleichungen die Form

$$(16) \qquad \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) = X_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{n-m} \varrho_\varkappa p_{m+\varkappa,\nu} \qquad \nu = 1, 2 \ldots n$$

Diese n-Gleichungen in Verbindung mit den $n-m$-Bedingungsgleichungen $\varphi_{m+1} = 0$, $\varphi_{m+2} = 0 \ldots \varphi_n = 0$ genügen, um die n-Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ und die $n-m$-Parameter $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-m}$ zu bestimmen.

Die $n(n-m)$-Größen $p_{\lambda\nu}$ ($\lambda = m+1, m+2, \ldots n$; $\nu = 1, 2, \ldots n$) sind vollständig bestimmt, wenn außer den Bedingungsgleichungen auch noch die m freien Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ gegeben sind. Es gelten nämlich, wenn die n Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als unabhängig variabel betrachtet werden, die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \qquad \lambda, \nu = 1, 2, \ldots n$$

Berücksichtigen wir nun die Bedingungsgleichungen, so erhalten wir bei Benützung der Bezeichnungen (14)

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\mu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \delta_{\nu\lambda} \qquad \lambda = m+1, m+2, \ldots n; \; \nu = 1, 2, \ldots n$$

Umgekehrt ist das System der freien Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ bestimmt, wenn die $n(n-m)$-Größen $p_{\lambda\nu}$ gegeben sind; denn es gelten für sie die Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \lambda = m+1, m+2, \ldots n; \; \nu = 1, 2, \ldots m$$

Hierzu ist zu bemerken: die Größen $p_{\lambda\nu}$ dürfen als Funktionen der Größen $x_1 x_2 \ldots x_n$ nicht beliebig gewählt worden, sie müssen vielmehr der Bedingung genügen, daß die vorstehenden $n-m$ linearen partiellen Differentialgleichungen bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen ein vollständiges System bilden.

Im Vorausgehenden sind die singulären Integralsysteme nur für Differentialgleichungen erster Ordnung definirt werden. Diese Definition läßt sich aber unmittelbar auf ein System von Differentialgleichungen höherer Ordnung ausdehnen, da ja ein derartiges System durch Hinzunahme neuer Variabler in ein System erster Ordnung verwandelt werden kann. Sind beispielsweise die abhängigen Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ durch n Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt, so fügen wir zu diesen Gleichungen

die Gleichungen $\frac{dx_1}{dt} = x_1' \frac{dt_2}{dt} = x_2' \ldots \frac{dx_n}{dt} = x_n'$ hinzu und kommen so zu einem System von $2\,n$ Differentialgleichungen erster Ordnung mit $2\,n$ zu bestimmenden Funktionen.

II. Anwendung auf das Variationsproblem.

5. Nachdem der Begriff des singulären Integralsystems festgestellt ist, wenden wir uns zur Beantwortung der Eingangs gestellten Frage.

Es erscheint zweckmäßig mit einer kurzen Darstellung der in der Variationsrechnung üblichen Schlußweise zu beginnen.

Es sei das Integral

$$\Omega = \int_{t_1}^{t_2} F(t x_1 x_2 \ldots x_n x_1' x_2' \ldots x_n')\, dt \tag{1}$$

vorgelegt. Hier bedeutet F eine einwertige Funktion der unabhängigen Variabeln t, der n-Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ dieser Variabeln und ihrer ersten Derivirten $x_1' x_2' \ldots x_n'$. Die n-Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ seien den k-Bedingungsgleichungen

$$\Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = 0 \;\ldots\; \Phi_k = 0 \tag{2}$$

unterworfen. Wir nehmen an, daß unter den Bedingungsgleichungen auch „nicht-holonome“ auftreten, d. h. Gleichungen, in denen eine Anzahl der Derivirten $x_1' x_2' \ldots x_n'$ vorkommen, und die nicht unbeschränkt integrabel sind. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß unter den Bedingungsgleichungen keine vorkommt, die die Derivirten nicht enthält, und daß auch durch Umformung der Bedingungsgleichungen keine derartige Gleichung abgeleitet werden kann. Diese Annahme bedeutet keine wesentliche Beschränkung. Wenn nämlich etwa in dem Ausdruck Φ_1 die Derivirten nicht vorkommen, so können wir die Bedingungsgleichung $\Phi_1 = 0$ durch die Gleichung $\frac{d\Phi_1}{dt} =$ ersetzen.

Bei mechanischen Problemen kommen nur solche nicht-holonome Bedingungsgleichungen in Betracht, die in den Derivirten linear und homogen sind; für die hier durchzuführende allgemeine Untersuchung ist diese Beschränkung unnötig.

Wir variiren nun die Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$; dabei setzen wir voraus, für die Grenzwerte $t = t_1$ und $t = t_2$ seien die Funktionswerte gegeben, so daß also an den Grenzen die Variationen $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ verschwinden.

Aus (1) ergibt sich in bekannter Weise

$$\delta\Omega = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}\delta x'_\nu + \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\delta x_\nu\right] dt$$

und hieraus folgt bei Anwendung von partieller Integration:

$$(3) \qquad \delta\Omega = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{d\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x_\nu}\right\} \delta x_\nu\, dt$$

Es ist ferner

$$(4) \qquad \delta\Phi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}\delta x'_\nu + \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu\right]$$

Wir multiplizieren mit einer beliebig zu wählenden Funktion $\varrho_\varkappa$ der unabhängigen Variabeln t und integriren zwischen den Grenzen t_1 und t_2. Wir erhalten, indem wir auch hier partielle Integration anwenden

$$(5) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \varrho_\varkappa \delta\Phi_\varkappa\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{d\varrho_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \varrho_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\right\} \delta x_\nu\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{d\varrho_\varkappa}{dt}\frac{\partial \Phi_\varkappa}{dt} + \varrho_\varkappa\left(\frac{d\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}}{dt} - \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\right)\right\} \delta x_\nu\, dt$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt:
(A) die Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ so zu bestimmen, daß $\delta\Omega = 0$ ist für alle Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n$, die den Bedingungsgleichungen

$$\delta\Phi_1 = 0 \quad \delta\Phi_2 = 0 \ldots \delta\Phi_k = 0$$

genügen und für $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden.

Diese Aufgabe möge als allgemeines Variationsproblem bezeichnet werden. Aus den Gleichungen (3) und (5) folgt mit Rücksicht auf die gestellten Bedingungen

$$(6) \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{d\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{d\varrho_\varkappa}{dt}\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu} + \varrho_\varkappa \frac{d\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \varrho_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\right)\right\} \delta x_\nu\, dt = 0$$

Wir genügen also jedenfalls den gestellten Bedingungen, wenn wir

$$(7) \qquad \frac{d\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\delta F}{\delta x_\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{d\varrho_\varkappa}{dt}\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu} + \varrho_\varkappa \frac{d\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \varrho_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\right) = 0$$

setzen für $\nu = 1, 2, \ldots n$.

Diese n-Gleichungen in Verbindung mit den k-Bedingungsgleichungen (1) reichen aus, um die n-Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ und die k-Multiplikatoren $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_k$ zu bestimmen.

Daß die Gleichungen (7) nicht nur ausreichende, sondern auch notwendige Bedingungen für die Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ darstellen, davon überzeugt man sich durch die folgende Ueberlegung [1]): In den Gleichungen (4) verschwinden auf Grund der gestellten Bedingungen die linken Seiten. Bei Berücksichtigung der Gleichungen

$$\delta x'_\nu = \delta \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{d\delta x_\nu}{dt}$$

erhalten wir somit ein System von k-Differentialgleichungen für die n-Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n$. Es können somit $n-k$ von diesen Variationen — etwa die Variationen $\delta x_{k+1} \delta x_{k+2} \ldots \delta x_n$ beliebig angenommen werden. Bestimmen wir nun die zur Verfügung stehenden Multiplikatoren $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_k$ durch die ersten k der Gleichungen (7), wobei die Funktionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ als gegeben anzunehmen sind, so fallen aus dem Integral (6) die Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_k$ heraus und das Integral muß für beliebige Werte der übrig bleibenden Variationen verschwinden. Nun können diese Variationen so gewählt werden, daß sie alle bis auf eine überall gleich Null sind, während die eine nur in einem beliebig kleinen Teilintervall von Null verschieden ist. Daraus ist zu schließen, daß die Koeffizienten der einzelnen Variationen $\delta x_{k+1} \delta x_{k+2} \ldots \delta x_n$ verschwinden müssen; diese Koeffizienten sind aber nichts anderes als die linken Seiten der letzten n — k-Differentialgleichungen (7).

In den Differentialgleichungen (7) kommen zwei Gruppen von abhängigen Variabeln vor: einmal die Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ und ihre Derivirten $x'_1 x'_2 \ldots x'_n$ und dann die Multiplikatoren $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_k$. Die gestellte Aufgabe verlangt nur die Bestimmung der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$; die Multiplikatoren sind Parameter, die nur als Hilfsmittel der Rechnung eingeführt sind. Dieser Sachverhalt legt es nahe neben dem allgemeinen Integralsystem der Differentialgleichungen (7) auch diejenigen singulären Integralsysteme in Betracht zu ziehen, die durch Bedingungsgleichungen für die Parameter charakterisirt sind. Man überzeugt sich leicht, daß diese singulären Integralsysteme keine Lösung des allgemeinen Variationsproblems (A) sind. Aber es erhebt sich die Frage, ob sie nicht wenigstens als Lösungen von geeignet definirten „speziellen" Variationsproblemen betrachtet werden können. Es wird sofort

1) Bezüglich der Durchführung des Beweises s. A. Mayer Math. Annalen Bd. 27, S. 74.

gezeigt werden, daß dies wenigstens für einen Teil der singulären Integralsysteme zutrifft.

6. Wir erhalten ein singuläres Integralsystem der Differentialgleichungen (5), wenn wir die Variabeln $x_1 x_2 \dots x_n$; $x_1' x_2' \dots x_n'$ als freie Variabele betrachten und die Parameter $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k$ gleich Null setzen (s. Nr. 1). Wir haben unter dieser Annahme in die Gleichungen (5) einzusetzen:

$$\varrho_1 = 0 \;\; \varrho_2 = 0 \dots \varrho_k = 0 \;\; \frac{dx_\nu'}{dt} = \left(\frac{dx_\nu'}{dt}\right) \;\; \frac{dx_\nu}{dt} = x_\nu' = \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) \;\; \nu = 1, 2, \dots n$$

Die Größen $\frac{d\varrho_\varkappa}{dt}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots k)$ sind als Parameter zu betrachten.

Wir setzen $\frac{d\varrho_\varkappa}{dt} = \sigma_\varkappa$ und können dann bei den Differentialquotienten die Klammern weglassen, da sie nicht mehr zur Unterscheidung nötig sind. Wir erhalten

$$(8) \qquad \frac{d\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu'}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu'} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Wir multiplizieren mit δx_ν, addiren nach ν und integriren zwischen den Grenzen t_1 und t_2. Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung

$$(9) \qquad \vartheta \Phi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu'} \delta x_\nu$$

ein. Mit Rücksicht auf die Gleichung (3) folgt:

$$\delta \Omega = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\varkappa=1}^{k} \sigma_\varkappa \, \vartheta \Phi_\varkappa \, dt$$

Damit ist bewiesen:

(*B*) Die Gleichungen (8) stellen die ausreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Variation $\delta\Omega$ für alle die Werte der Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_n$ verschwindet, bei den Bedingungen

$$\vartheta \Phi_1 = 0 \;\; \vartheta \Phi_2 = 0 \;\dots\; \vartheta \Phi_k = 0$$

genügen und an den Grenzen $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden.

Die in der vorigen Nummer besprochene Schlußweise der Variationsrechnung zeigt, daß die angegebenen Bedingungen nicht nur ausreichend, sondern auch notwendig sind.

Die Gleichungen (8) stellen also die Lösung eines „speziellen" Variationsproblems dar. In dem Fall daß die Bedingungsgleichungen $\Phi_\varkappa = 0$ in den Derivirten $x_1' x_2' \dots x_n'$ linear und homogen sind, ist das Variationsproblem (*B*) nichts anderes als das Höldersche Variationsproblem.

Anstatt alle k Parameter gleich Null zu setzen, können wir auch einen Teil derselben — etwa die Parameter $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_i$ — zu den freien Variabeln rechnen und nur die letzten $k-i$ gleich Null setzen. Unter dieser Annahme haben wir in die Gleichungen (5) einzusetzen:

$$\varrho_{i+1} = 0 \quad \varrho_{i+2} = 0 \dots \varrho_k = 0 \quad \frac{d\varrho_1}{dt} = \left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right) \frac{d\varrho_2}{dt} = \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right) \dots \frac{d\varrho_i}{dt} = \left(\frac{d\varrho_i}{dt}\right)$$

$$\frac{dx'_\nu}{dt} = \left(\frac{dx'_\nu}{dt}\right) \quad \frac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu = \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Die Größen $\frac{d\varrho_{i+1}}{dt} \frac{d\varrho_{i+2}}{dt} \dots \frac{d\varrho_k}{dt}$ sind als Parameter zu betrachten.

Wir setzen $\frac{d\varrho_{i+\lambda}}{dt} = \sigma_\lambda \quad \lambda = 1, 2, \dots k-i$ und können dann wieder die Klammern bei den Differentialquotienten weglassen Wir erhalten:

$$(10) \quad \frac{d\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{i} \left(\frac{d\varrho_k}{dt} \frac{\partial \mathrm{m}_\varkappa}{\partial x'_\nu} + \varrho_\varkappa \frac{d\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \varrho_\varkappa \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu} \right) + \sum_{\lambda=1}^{k-i} \sigma_\lambda \frac{\partial \Phi_{i+\lambda}}{\partial x'_\nu} = 0 \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Wir multiplizieren wieder mit δx_ν, addieren nach ν und integriren zwischen den Grenzen t_1 und t_2. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichungen (3), (5) und (9):

$$\delta\Omega = -\sum_{\varkappa=1}^{i} \varrho_\varkappa \,\delta\Phi_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{k-i} \sigma_\lambda \,\vartheta\Phi_{i+\lambda}$$

Hieraus folgt:

(C) Die Gleichungen (10) stellen die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Variation $\delta\Omega$ für alle die Werte der Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_n$ verschwindet, die den Gleichungen

$$\delta\Phi_1 = 0 \;\; \delta\Phi_2 = 0 \dots \delta\Phi_i = 0 \;\; \vartheta\Phi_{i+1} = 0 \;\; \vartheta\Phi_{i+2} = 0 \dots \vartheta\Phi_k = 0$$

genügen und an den Grenzen t_1 und t_2 verschwinden.

Es sind somit auch die Gleichungen (10) als Lösung eines „speziellen“ Variationsproblems zu betrachten.

Das Variationsproblem (C) läßt sich leicht verallgemeinern. Zu dem Zweck führen wir an Stelle der Bedingungsgleichungen $\Phi_\varkappa = 0$ beliebige lineare Kombinationen derselben ein, in dem wir setzen:

$$\Phi_\varkappa = c_{\varkappa 1} \,\Psi_1 + c_{\varkappa 2} \,\Psi_2 \dots c_{\varkappa k} \,\Psi_k \qquad \varkappa = 1, 2, \dots k$$

Gleichzeitig führen wir an Stelle der Parameter $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k$ neue Parameter mittelst der Gleichungen

$$\tau_\varkappa = c_{1\varkappa}\varrho_1 + c_{2\varkappa}\varrho_2 \dots c_{k\varkappa}\varrho_k \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots k)$$

ein, so daß die Identität

$$\varrho_1 \Phi_1 + \varrho_2 \Phi_2 \dots + \varrho_k \Phi_k = \tau_1 \Psi_1 + \tau_2 \Psi_2 \dots \tau_k \Psi_k$$

besteht. Die $c_{\varkappa\lambda}$ bedeuten beliebig zu wählende Funktionen der Größen t; $x_1 x_2 \dots x_n$; $x'_1 x'_2 \dots x'_n$; sie unterliegen nur der Bedingung, daß ihre Determinante nicht verschwindet. Es ist ohne weiteres klar, daß die Gleichungen (5) gleichbedeutend mit den Gleichungen sind, in die sie übergehen, wenn man gleichzeitig die Funktionen $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_k$ durch die Funktionen $\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_k$ und die Parameter $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k$ durch die Parameter $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ ersetzt. Demnach entspricht das singuläre Integralsystem der Gleichungen (5), das durch die $k-i$-Gleichungen

$$\tau_\varkappa = c_{1\varkappa}\varrho_1 + c_{2\varkappa}\varrho_2 \dots + c_{k\varkappa}\varrho_k = 0 \qquad \varkappa = i+1,\ i+2, \dots k$$

charakterisirt ist, einem Variationsproblem, bei dem die zulässigen Variationen durch die Gleichungen

$$\delta\Psi_1 = 0 \quad \delta\Psi_2 = 0 \dots \delta\Psi_i = 0 \quad \vartheta\Psi_{i+1} = 0 \quad \vartheta\Psi_{i+2} = 0 \quad \vartheta\Psi_k = 0$$

definirt sind.

Da die Größen $c_{\lambda\varkappa}$ beliebig gewählt werden können, so folgt: Jedem singulären Integralsystem der Differentialgleichungen (5), das durch lineare und homogene Relationen zwischen den Parametern $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k$ charakterisirt ist, entspricht ein spezielles Variationsproblem.

7. Im Fall des allgemeinen Variationsproblems sind die zulässigen Variationen durch Gleichungen der Form

$$\delta\Phi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}\delta x'_\nu + \frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu\right] = 0 \tag{11}$$

bestimmt. Im Fall der speziellen Variationsprobleme treten entweder nur Gleichungen der Form

$$\vartheta\Phi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}\delta x_\nu = 0 \tag{12}$$

auf (Fall (B) der vorigen Nummer) oder es kommen die beiden Gleichungstypen neben einander vor (Fall (C)).

Wir wollen feststellen, unter welchen Bedingungen diese Gleichungen gleichbedeutend sind.

Da die Variationen $\delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_n$ für die Grenzwerte $t = t_1$

und $t = t_2$ verschwinden, so wird die Gleichung (12) vollständig durch die Gleichung $\frac{d\vartheta\Phi_\varkappa}{dt} = 0$ vertreten. Nun ist mit Rücksicht auf die Identität $\frac{d\delta x_\nu}{dt} = \delta x'_\nu$

$$\frac{d\vartheta\Phi_\varkappa}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{d\frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} + \frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}\delta x'_\nu\right)$$

folglich ist

$$\frac{\delta\vartheta\Phi_\varkappa}{dt} - \delta\Phi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{d\frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x_\nu}\right)\delta x_\nu.$$

Sollen die Gleichungen (11) und (12) dasselbe bedeuten, so müssen also die Gleichungen

$$\frac{d\frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x_\nu} = M\frac{\partial\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots n$$

bestehen, wo M eine beliebige Funktion der unabhängigen Variabeln t bedeutet. Diese Gleichungen erhalten, wenn wir $M = -\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ setzen, die Form

$$\frac{d\frac{\partial N\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial N\Phi_\varkappa}{\partial x_\nu} = \frac{\partial N\Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu} \tag{13}$$

Die Gleichungen müssen entweder identisch oder doch wenigstens mit Rücksicht auf die gegebenen Bedingungsgleichungen

$$\Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = 0 \quad \ldots \quad \Phi_k = 0$$

erfüllt sein. Sind sie identisch erfüllt, so läßt sich $N\Phi_\varkappa$ in der Form $N\Phi_\varkappa = \frac{d\Psi}{dt}$ darstellen, wo Ψ eine Funktion der Variabeln $tx_1\, x_2 \ldots x_n$ bedeutet. In diesem Fall ist die Bedingungsgleichung $\Phi_\varkappa = 0$ holonom. Gelten die Gleichungen (13) nur bei Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen, so ist die Gleichung $\Phi_\varkappa = 0$ wenigstens einer holonomen Gleichung äquivalent. In jedem anderen Fall haben die Gleichungen (11) und (12) verschiedene Bedeutung.

Sind die sämtlichen gegebenen Bedingungsgleichungen holonom, so ist eine jede Gleichung $\delta\Phi_\varkappa = 0$ mit der entsprechenden $\vartheta\Phi_\varkappa = 0$ gleichbedeutend und der Unterschied zwischen dem allgemeinen

und den speziellen Variationsproblemen fällt weg. In diesem Fall ist

$$\frac{d\frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu} = 0 \text{ für } \begin{matrix} \nu = 1, 2, \dots n \\ \varkappa = 1, 2, \dots k \end{matrix}$$

Es fallen somit die Größen $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k$ aus den Gleichungen (5) heraus und diese Gleichungen unterscheiden sich nur in der Bezeichnung der Multiplikatoren von den Gleichungen (8), die für das spezielle Variationsproblem (B) gelten. Wenn dagegen die Gleichungen $\Phi_\varkappa = 0$ nicht alle holonom und auch nicht einem System von lauter holonomen Gleichungen äquivalent sind, so sind die speziellen Variationsprobleme von den allgemeinen wesentlich verschieden.

8. Wir wollen die vorausgehenden allgemeinen Erörterungen durch ein Beispiel anschaulicher machen.

Es handle sich darum die Bewegung eines zweirädrigen Karrens zu bestimmen, der ohne zu gleiten, auf einer horizontalen Ebene rollt. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß sich der Schwerpunkt im Mittelpunkt der Achse befindet. Von Kräften können wir absehen, da die Wirkung der Schwere für die Bewegung nicht in Betracht kommt.

Wir legen die xy-Ebene horizontal durch die Achse und bezeichnen mit xy die Koordinaten des Schwerpunkts, mit ω den Winkel, den eine horizontale Normale zur Achse mit der Richtung der wachsenden x bildet, endlich mit M die Masse des Karrens und mit Ml^2 sein Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Vertikale. Die lebendige Kraft des Karrens ist

$$T = \tfrac{1}{2} M [x'^2 + y'^2 + l^2 \omega'^2]$$

Da der Karren rollen soll ohne zu gleiten, kann eine Translation nur senkrecht zur Richtung der Achse erfolgen. Es besteht somit die nicht-holonome Bedingungsgleichung

$$\cos\omega\, y' - \sin\omega\, x' = 0 \tag{1}$$

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Karrens ergeben sich aus der Bedingung:

$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$ für alle Variationen $\delta x\, \delta y\, \delta\omega$, die der Bedingung $\cos\omega\, \delta y - \sin\omega\, \delta x = 0$ genügen und die für $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden. Wir erhalten somit:

$$Mx'' = -\sigma \sin\omega \quad My'' = \sigma\cos\omega \quad \omega'' = 0 \tag{2}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\omega' = \gamma \quad \omega = \gamma(t - t_0)$$

und weiter mit Rücksicht auf (1):

$$x' x'' + y' y'' = 0 \quad \text{also} \quad x''^2 + y''^2 = c^2$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Rücksicht auf (1):

$$x' = c \cos \omega \quad y' = c \sin \omega$$

Es gelten somit für die Bewegung des Karrens die Gleichungen

$$x - x_0 = \frac{c}{\gamma} \sin \omega \quad y - y_0 = \frac{c}{\gamma}(1 - \cos \omega) \quad \omega = \gamma(t - t_0) \tag{3}$$

Bestimmen wir nun die Funktionen $xy\omega$ durch die Bedingungen des allgemeinen Variationsproblems:

$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$ für alle die Variationen $\delta x \, \delta y \, \delta \omega$, die der Bedingung

$$\cos \omega \, \delta y' - \sin \omega \, \delta x' - (\sin \omega \, \delta y' + \cos \omega \, \delta x') = 0$$

genügen und an den Grenzen verschwinden.

Wir erhalten in diesem Fall die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} Mx'' &= \varrho' \sin \omega + \varrho \cos \omega \\ My'' &= -\varrho' \cos \omega + \varrho \sin \omega \\ l^2 M \omega'' &= -\varrho(\sin \omega \, y' + \cos \omega \, x') \end{aligned} \tag{4}$$

Die Integration der beiden ersten Gleichungen gibt

$$Mx' = \varrho \sin \omega + a \cos \alpha \quad My' = -\varrho \cos \omega + a \sin \alpha$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (1)

$$\varrho = a \sin(\alpha - \omega) \quad M(x' \cos \omega + y' \sin \omega) = a \cos(\alpha - \omega).$$

Führt man diese Werte in die letzte der Gleichungen (4) ein, so erhält man

$$2l^2 M^2 \omega'' = -a^2 \sin 2(\alpha - \omega)$$

und hieraus folgt:

$$l^2 M^2 \omega'^2 = -\tfrac{1}{2} a^2 \cos 2(\alpha - \omega) + \text{Const.} = -\tfrac{1}{2} a^2 \cos 2(\alpha - \omega) + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)$$

also

$$\omega' = \frac{a}{klM} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\alpha - \omega)}$$

Durch Elimination des Zeitdifferentials ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{kl}{a} \frac{\varrho \sin\omega + a\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}} = kl\frac{\cos(\alpha-\omega)\cos\omega}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{kl}{a} \frac{-\varrho \cos\omega + a\sin\alpha}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}} = kl\frac{\cos(\alpha-\omega)\sin\omega}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}}$$

Wir erhalten also schließlich die Integralgleichungen

$$(5)\quad \begin{gathered} x-x_0 = kl\int_0^{\omega}\frac{\cos(\alpha-\omega)\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}} \quad y-y_0 = kl\int_0^{\omega}\frac{\cos(\alpha-\omega)\sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}} \\ t-t_0 = \frac{klM}{a}\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\alpha-\omega)}} \end{gathered}$$

Wir gelangen zu dem singulären Integralsystem der Differentialgleichungen (4), das durch die Bedingungsgleichung $\varrho = 0$ charakterisirt ist, wenn wir die Integrationskonstanten $a\, k\, x_0\, y_0$ nach wie vor als Konstante betrachten, dagegen die Integrationskonstante α durch die Gleichung $\alpha = \omega$ als Funktion der Zeit definiren. Es werden alsdann die Integralgleichungen (5) bis auf die Bezeichnung der Integrationskonstanten mit den Integralgleichungen (3) identisch.

III. Die dynamischen Gleichungen für unfreie Systeme.

9. Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß der Begriff des singulären Integralsystems zu einer neuen Auffassung der Bewegungsgleichungen für unfreie Systeme führt.

Zu dem Zweck gehen wir von der zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen für ein freies System aus:

$$(1)\quad \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_\nu} = X_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

Hier bedeuten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ allgemeine Koordinaten, die die Lage des Systems bestimmen; X_ν ist die Kraftkomponente, die die Koordinate x_ν zu vergrößern strebt; T bedeutet die lebendige Kraft des Systems.

Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten der quadratischen Form T und die Kraftkomponenten X_ν Funktionen der Koordinaten sind, aber die Zeit nicht explicite enthalten.

Wir betrachten neben den Koordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ auch die Geschwindigkeitskomponenten $x'_1\, x'_2 \ldots x'_n$ als selbständige abhängige Variable. Die beiden Variabelnsysteme sind durch die Relationen

$$(2) \qquad \frac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

mit einander verbunden. Nehmen wir nun an, das bisher als frei betrachtete System werde den Bedingungen

$$(3) \qquad x'_{m+1} = 0 \quad x'_{m+2} = 0 \quad \ldots \quad x'_n = 0$$

unterworfen. Die Bewegung dieses unfreien Systems wird durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{d\frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_\nu}}{dt} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_\nu} = X_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots m$$

in Verbindung mit den Gleichungen (2) und (3) bestimmt.

Hier bedeutet $\overline{T}$ den Ausdruck, in den die quadratische Form T übergeht, wenn man $x'_{m+1}\, x'_{m+2} \ldots x'_n$ gleich Null setzt.

Nehmen wir einen Augenblick an, in der quadratischen Form T kommen die Produkte der Variabeln $x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ mit den Variabeln $x'_{m+1}\, x'_{m+2} \ldots x'_n$ nicht vor, es sei also T die Summe einer quadratischen Form der m-Variabeln $x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ und einer quadratischen Form der $n-m$-Variabeln $x'_{m+1}\, x'_{m+2} \ldots x'_n$. Unter dieser Annahme ist offenbar

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_1} = \frac{\partial T}{\partial x'_1} \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_2} = \frac{\partial T}{\partial x'_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_m} = \frac{\partial T}{\partial x'_m}$$

In diesem Fall bestimmen demnach die Gleichungen (4) und (2) zusammen mit den Gleichungen (3) ein singuläres Integralsystem der Differentialgleichungen (1) und (2) und zwar sind die Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n;\; x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ als freie Variabeln zu betrachten (s. Nr. 1).

An dieser Beziehung zwischen den Bewegungsgleichungen für das freie und das unfreie System wird im Wesentlichen nichts geändert, wenn wir unsere Voraussetzung, daß sich die quadratische Form T aus zwei Formen zusammensetzt, fallen lassen, nur treten dann an Stelle der freien Variabeln $x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ lineare und homogene Funktionen der n Geschwindigkeitskomponenten als freie Funktionen (s. Nr. 3).

Wir haben im Vorausgehenden die Bedingungsgleichungen für das unfreie System als holonom vorausgesetzt: auch diese Annahme ist nicht wesentlich. Wenn nur die Bedingungsgleichungen linear und homogen in den Geschwindigkeitskomponenten sind, so sind immer die Integralgleichungen, die die Bewegung des unfreien Systems bestimmen, ein singuläres Integralsystem der für das freie System geltenden Differentialgleichungen.

Dem Beweis dieser Behauptung müssen wir einige Bemerkungen über die quadratische Form T vorausschicken.

10. Wenn man die Geschwindigkeitskomponenten als selbständige, mit den Koordinaten gleichberechtigte Variable auffaßt, so liegt es nahe, sie auch für sich, ohne Rücksicht auf die Koordinaten zu transformiren. Dabei wird man sich aber auf Transformationen beschränken, die in den Größen x'_ν linear und homogen sind, damit die charakteristische Ausdrucksform der lebendigen Kraft erhalten bleibt. Setzen wir

$$(5) \qquad u_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}\, x'_\mu \qquad \nu = 1, 2, \dots n.$$

Hier bedeuten die $p_{\nu\mu}$ Funktionen der Größen $x_1 x_2 \dots x_n$, die nur der Bedingung unterliegen, daß ihre Determinante nicht verschwindet. Die Größen u_ν bezeichnen wir als allgemeine Geschwindigkeitsparameter[1]). Es ist zweckmäßig neben den Geschwindigkeitsparametern x'_ν und u_ν auch die ihnen zugeordneten „Impulse"

$$\xi_\nu = \frac{\partial T}{\partial x'_\nu} \qquad \eta_\nu = \frac{\partial T}{\partial u_\nu}$$

einzuführen. Aus der Identität

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \dots + \xi_n x_n = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 \dots + \eta_n u_n$$

ergeben sich mit Rücksicht auf (5) die Gleichungen

$$(6) \qquad \xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu}\, \eta_\mu \qquad \nu = 1, 2, \dots n$$

Führen wir an Stelle der Variabeln $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ die Variabeln $u_1 u_2 \dots u_n$ in die quadratische Form T ein.

Man kann die Substitutionskoeffizienten so wählen, daß die transformirte Form in zwei Teile zerfällt, von denen der eine nur die Variabeln $u_1 u_2 \dots u_m$, der andere nur die übrigen Variabeln $u_{m+1} u_{m+2} \dots u_n$ enthält. In diesem Fall mögen die beiden Variabelnsysteme $u_1 u_2 \dots u_m$ und $u_{m+1} u_{m+2} \dots u_n$ als konjugirte Systeme von Geschwindigkeitsparametern bezeichnet werden.

Für das Folgende ist nun die Bemerkung wichtig: das eine

1) Die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit und der Drehungsgeschwindigkeit eines starren Körpers, bezogen auf ein im Körper festes Koordinatensystem sind als derartige „allgemeine Geschwindigkeitsparameter" zu betrachten. Die Transformation der Bewegungsgleichungen durch Einführung der allgemeinen Geschwindigkeitsparameter hat wohl Volterra zuerst vorgenommen (Atti di Torino Bd. 33; 1898).

der beiden konjugirten Systeme kann beliebig gewählt werden, das andere ist dann im Wesentlichen bestimmt.

Zum Beweis dieser Behauptung wollen wir die Transformationsgleichungen ausführlich hinschreiben. Es sei

$$T = \tfrac{1}{2}\sum a_{\lambda\mu}\, x'_\lambda\, x'_\mu = \tfrac{1}{2}\sum b_{\lambda\mu}\, u_\lambda\, u_\mu$$

Führen wir an Stelle der Geschwindigkeitsparameter die zugeordneten Impulse ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\sum \alpha_{\lambda\mu}\, \xi_\lambda\, \xi_\mu = \tfrac{1}{2}\sum \beta_{\lambda\mu}\, \eta_\lambda\, \eta_\mu$$

Ist $b_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \leqq m$ und $\mu > m$, so gelten auch für die adjungirte Form die entsprechenden Gleichungen $\beta_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \leqq m$ und $\mu > m$ und vice versa. Nun ist zufolge (6)

$$\beta_{\lambda\mu} = \sum_\varkappa \sum_\nu \alpha_{\varkappa\nu}\, p_{\varkappa\lambda}\, p_{\varkappa\mu}$$

Die Gleichungen

$$\sum_\varkappa \sum_\nu \alpha_{\varkappa\nu}\, p_{\varkappa\lambda}\, p_{\varkappa\mu} = 0 \quad \text{für } \lambda \leqq m \text{ und } \mu > m$$

liefern, wenn die Substitutionskoeffizienten

$$p_{\nu 1}\, p_{\nu 2} \ldots p_{\nu n} \qquad \nu = m+1, m+2, \ldots n$$

gegeben sind, ein System von $n-m$ linearen und homogenen Gleichungen, denen ein jedes der Größensysteme

$$p_{\varkappa 1}\, p_{\varkappa 2} \ldots p_{\varkappa n} \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

genügen muß. Dadurch sind zwar diese m Größensysteme und damit die Geschwindigkeitsparameter $u_1\, u_2 \ldots u_m$ nicht vollständig bestimmt, aber es ist wenigstens das System der m Größen $u_1\, u_2 \ldots u_m$ bestimmt: bezeichnen wir mit $\overline{u}_1\, \overline{u}_2 \ldots \overline{u}_m$ ein spezielles System dieser Größen, das der gestellten Forderung genügt, so läßt sich das allgemeinste in der Form

$$u_\mu = c_{\mu 1}\, \overline{u}_1 + c_{\mu 2}\, \overline{u}_2 \ldots + c_{\mu m}\, \overline{u}_m$$

darstellen.

11. Nunmehr können wir den am Schluß von Nr. 9 ausgesprochenen Satz genauer formuliren.

Die Bewegungsgleichungen für das unfreie System sind ein singuläres Integralsystem der Differentialgleichungen, die für das entsprechende freie System gelten und zwar sind als freie Funktionen die Koordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und diejenigen Geschwindigkeitsparameter zu betrachten, die zu den Geschwindigkeitsparametern, die infolge der Bedingungsgleichungen verschwinden, konjugirt sind.

Zum Beweis nehmen wir an, es seien die Bedingungsgleichungen

(7) $p_{\lambda 1} x'_1 + p_{\lambda 2} x'_2 \ldots + p_{\lambda n} x'_n = 0 \quad \lambda = m+1, m+2, \ldots n$[1])

gegeben, wo $p_{\lambda 1} p_{\lambda 2} \ldots p_{\lambda n}$ Funktionen der Koordinaten x_ν bedeuten. Wir sehen zunächst von diesen Bedingungsgleichungen ab, und führen in T durch die Substitution (5) die allgemeinen Geschwindigkeitsparameter $u_1 u_2 \ldots u_n$ ein. Die verfügbaren Koeffizienten

$$p_{\mu 1} p_{\mu 2} \ldots p_{\mu n} \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

wählen wir so, daß die Parametersysteme

$$u_1 u_2 \ldots u_m \text{ und } u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_n$$

konjugirt sind. Die Impulse $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_m$, die den Geschwindigkeitsparametern $u_1 u_2 \ldots u_m$ zugeordnet sind, hängen nur von diesen Parametern, aber nicht von $u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_n$ ab, dementsprechend hängen die Impulse $\eta_{m+1} \eta_{m+2} \ldots \eta_n$ nur von $u_{m+1} u_{m+2} \ldots u_n$ aber nicht von $u_1 u_2 \ldots u_m$ ab. Daraus folgt: Wir können die Bedingungsgleichungen (7), die wir auch in der Form

$$u_{m+1} = 0 \quad u_{m+2} = 0 \quad u_n = 0$$

schreiben können, durch die Gleichungen

$$\eta_{m+1} = 0 \quad \eta_{m+2} = 0 \quad \ldots \quad \eta_n = 0$$

ersetzen und als freie Funktionen können wir an Stelle der Geschwindigkeitsparameter $u_1 u_2 \ldots u_m$ die zugeordneten Impulse $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_m$ betrachten (vergl. Nr. 3 Schluß).

Die Gleichungen (1), die für das freie System gelten, erhalten, wenn wir an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten die Impulse einführen, die Form

$$\frac{d\xi_\nu}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_\nu} = X_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

Um das singuläre Integralsystem zu bestimmen, das die Bewegungsgleichungen für das unfreie System liefert, greifen wir auf die Ausführungen in Nr. 4 zurück.

An Stelle der n-Variabeln x_ν, die dort vorkommen, treten nun die $2n$-Variabeln

1) Eine Bedingungsgleichung $\varphi = 0$, in der nur die Koordinaten x_ν vorkommen, können wir durch die Gleichung $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und die Anfangsbedingung $\varphi = 0$ für $t = t_0$ ersetzen. Somit kommt die Annahme, die wir bezüglich der Form der Bedingungsgleichungen gemacht haben, darauf hinaus, daß dieselben die Geschwindigkeitskomponenten entweder gar nicht enthalten, oder daß sie in diesen Größen linear und homogen sind.

$$x_1\, x_2 \ldots x_n,\ \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$$

und an Stelle der n-Variabeln

$$y_1\, y_2 \cdots y_m;\ y_{m+1}\, y_{m+2} \cdots y_n$$

treten die Variabeln

$$x_1\, x_2 \ldots x_n,\ \eta_1\, \eta_2 \cdots \eta_m;\ \eta_{m+1}\, \eta_{m+2} \cdots \eta_n.$$

Die Gleichungen (14) in Nr. 4:

$$\frac{\partial \psi_\nu}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial x_\nu}{\partial y_\lambda} = p_{\lambda\nu} \quad (\lambda = m+1, m+2 \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots n)$$

sind mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) (Nr. 10) durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial \eta_\lambda} = 0 \quad \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \eta_\lambda} = p_{\lambda\nu} \quad (\lambda = m+1,\ m+2, \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots n)$$

zu ersetzen. An Stelle der Gleichungen (16) (Nr. 4) treten somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi_\nu}{dt}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_\nu} &= X_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{n-m} \varrho_\varkappa\, p_{m+\varkappa,\nu} \\ \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right) &= x'_\nu \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

und hier ist

$$\xi_\nu = \frac{\partial T}{\partial x'_\nu}$$

Die vorstehenden Gleichungen stimmen mit der zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen für das unfreie System überein. Damit ist unser Satz bewiesen.

Bezüglich der Bedingungsgleichungen haben wir zwei Voraussetzungen gemacht: daß sie in den Geschwindigkeitskomponenten linear und homogen sind, und daß sie die Zeit nicht enthalten.

Die letztere Voraussetzung haben wir nur der Einfachheit wegen gemacht, dagegen ist die erstere Voraussetzung wesentlich, denn auf ihr beruht die Möglichkeit die quadratische Form T in zwei Teile zu zerlegen (vergl. die Anmerkung zu (7)).

12. Anstatt den in der vorigen Nummer ausgesprochenen Satz mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen für das unfreie System zu beweisen, können wir offenbar auch den umgekehrten Weg einschlagen und diesen Satz als ein der Erfahrung entnommenes Prinzip ansehen. Mit Hilfe dieses Prinzips können wir dann die Lagrangeschen Gleichungen für das unfreie System und weiterhin

das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Hamiltonsche in der Fassung, die ihm Hölder gegeben hat, ableiten.

Das hier aufgestellte Prinzip hat vor dem von Lagrange benützten Prinzip der virtuellen Verrückungen den Vorzug, daß es sich nicht auf eine mathematische Hilfsvorstellung stützt, sondern nur von mechanisch wohldefinirten Größen Gebrauch macht. Es entbehrt auch nicht der Anschaulichkeit.

Nehmen wir beispielsweise an, ein Körper rolle auf einer festen Fläche ohne zu gleiten. Die Bewegung wird in jedem Zeitmoment dieselbe sein, wie die eines sich frei bewegenden Körpers, der in seiner Anfangslage die feste Fläche berührt und dem eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt ist, die eine Drehung um eine durch den Berührungspunkt gehende Axe bewirkt. Damit die Uebereinstimmung der wirklich erfolgenden Bewegung mit der fingirten freien Bewegung erhalten bleibt, müssen in jedem Zeitmoment die Anfangsgeschwindigkeiten, die die freie Bewegung bestimmen, geändert werden. Das heißt aber mathematisch ausgedrückt nichts anderes als: die Gleichungen, die die Bewegung des Körpers bestimmen, sind als singuläre Lösungen der Differentialgleichungen zu betrachten, die für die freie Bewegung gelten.

Tübingen, Februar 1905.

Ueber die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. II.

Von

M. Laue.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 25. Febr. 1905.

Als meine erste Arbeit über diese Frage erschienen war, hatte Herr Planck die Liebenswürdigkeit, mich brieflich darauf aufmerksam zu machen, daß sich gegen den Gang der Untersuchung ein Einwand, welcher das Resultat in Frage stellt, geltend machen läßt. Dort wird nämlich nur von einer ebenen Welle gesprochen; bei natürlicher Strahlung läßt sich eine solche aber nicht isolieren; vielmehr wird eine endliche Energie nur von einem Strahlenkegel von endlicher Oeffnung transportiert; und zwar sind die Strahlen dieses Kegels in ihrer Schwingungsform ganz unabhängig von einander. Das Zusammenwirken vieler unabhängiger Wellen scheint aber geeignet, in dem in § 3 meiner Arbeit besprochenen Fall „größerer" Dicke D der durchstrahlten Schicht die Ungeordnetheit, welche die einzelne Welle beim Fortschreiten verloren hat, im resultierenden Schwingungsvorgang wiederherzustellen. Dann wäre aber das Ergebnis des § 3, die Ungültigkeit des zweiten Hauptsatzes für diesen Fall, hinfällig. Um diesem Einwand zu begegnen, ist eine Abänderung des Beweisganges notwendig, welche im Folgenden gegeben werden soll. Zuvor aber sei es mir gestattet, einen physikalischen Grund anzugeben, welcher zeigt, daß diese Aenderung das Resultat nicht betrifft.

Wie im § 4 erörtert wurde, ist die Aenderung, welche die natürliche Strahlung beim Fortschreiten im dispergierenden Mittel erleidet, von gleicher Art, wie die, welche sie beim Durchgang durch einen Spektralapparat erfährt. Deshalb läßt sich der obige

Einwand auch gegen meine Behandlung des zweiten Problems erheben; jedes Spektroskop hat in der Tat endliche Spaltbreite, welche beim Prisma, Gitter und Stufengitter das Spektrum verunreinigt, dem Auflösungsvermögen also entgegenzuwirken und geeignet zu sein scheint, den zweiten Hauptsatz auch dann aufrecht zu erhalten, wenn zu großes Auflösungsvermögen ihn in Frage stellt. Daß es nicht so ist, beweist die Existenz eines Spektroskops, bei welchem die Spaltbreite ohne Einfluß auf das Aussehen des Spektrums ist, nämlich der planparallelen Platte, welche von Perot und Fabry einerseits, Lummer und Gehrcke anderseits in die Spektroskopie eingeführt ist. Bei dieser verändert sich mit wachsender Spaltbreite nur die Zahl der Interferenzstreifen, nicht die Energieverteilung in ihnen. Und auch bei den drei erstgenannten Spektroskopen ist der Einfluß der Spaltbreite nicht wesentlich; wie Herr Runge gezeigt hat[1]), läßt er sich rechnerisch eliminieren. Auf Grund der Wesensgleichheit der beiden hier besprochenen Fragen können wir hieraus in aller Strenge schließen, daß auch bei der Fortpflanzung der Strahlung die Berücksichtigung des Zusammenwirkens aller Strahlen eines Kegels nichts an den Schlüssen ändert, welche wir aus der Betrachtung einer ebenen Welle gezogen haben.

Um dies auch mathematisch nachzuweisen, beginnen wir mit der Bemerkung, daß zwischen einer Kugelwelle und einer ebenen kein prinzipieller Unterschied besteht. Man kann mit Hilfe geeigneter Reflexionen oder Brechungen die eine in die andere überführen, und in den Gleichungen der vorhergehenden Untersuchung lassen sich, ohne daß etwas Wesentliches geändert wird, die Faktoren hinzufügen, welche bei einer Kugelwelle die Abnahme von Amplitude und Intensität mit zunehmender Entfernung von der Lichtquelle ergeben. Wenn wir im Folgenden vorziehen, von Kugelwellen zu reden, so ist dies also eine unwesentliche Neuerung. Wesentlich hingegen ist, daß wir von jetzt an einen Strahlenkegel, und als Strahlungsquelle eine zu seiner Axe senkrechte, ebene Fläche s_1 betrachten, deren Dimensionen nach allen Richtungen hin von der gleichen Größenordnung sein sollen. Daß die speziellen Annahmen über die Lage und die Form der Fläche (ihre Ebenheit) die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigen, wird sich weiter unten zeigen. Wir bezeichnen mit σ_1 einen Querschnitt von s_1, mit

1) $$\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{r}$$

1) C. Runge, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 42, 205 1897.

den Winkel, unter welchem σ_1 von dem auf der Normalen von s_1 liegenden Punkt P gesehen wird, der den gegen σ_1 großen Abstand r von s_1 hat. Wir fragen zunächst, ob wir nicht doch unter gewissen Bedingungen auch jetzt noch die Strahlung als einzelne Welle behandeln können.

Der von einem Endpunkt von σ_1 nach P gelangende Strahl hat gegen den von der Mitte von σ_1 dorthin führenden den Gangunterschied

$$\frac{r}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} - r = \frac{1}{8} r \alpha_1^2 = \frac{1}{8} \frac{\sigma_1^2}{r}$$

Die Phasendifferenz, mit welcher sie fnterferieren, ist also Funktion von r. Die aus allen von s_1 ausgehenden Wellen resultierende Schwingungsform in einem entfernteren Punkt P' der Normalen steht demnach mit der in P in keinem Zusammenhang. Das ändert sich aber, wenn

$$2) \qquad r\alpha_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{r} \text{ klein gegen eine Lichtwellenlänge } \lambda$$

wird; von da ab sind die Aenderungen der Phasendifferenz mit noch weiter wachsendem r unbeträchtlich, wir haben dann genähert eine einzige Kugelwelle vor uns. Dies gilt nicht nur längs der Normalen; vielmehr kann die Richtung $s_1 P$ von dieser um den Winkel α_2 abweichen, ohne daß die Aenderung erheblich wird, wenn

$$3) \qquad \alpha_2 \text{ klein gegen } \frac{\lambda}{\sigma_1}$$

ist. Man beweist dies leicht durch eine der elementaren Behandlung der Beugung an einem Spalt nachgebildete Betrachtung. α_1 und α_2 sind übrigens von gleicher Größenordnung, denn nach 1) sagt 2) aus:

$$\alpha_1 \text{ klein gegen } \frac{\lambda}{\sigma_1}.$$

Ist nicht s_1 die Strahlungsquelle, sondern ein beliebig gestalteter Körper, so verstehen wir unter s_1 eine den obigen Bedingungen genügende, dicht vor ihm liegende, mathematische Fläche. Kohärente, in P und P' ankommende Strahlen gehen dann zwar nicht

mehr von demselben Punkt von s_1 aus, das hat aber infolge der Bedingungen 2) und 3) auf den Wellenvorgang keinen merklichen Einfluß.

Hiernach könnte es zunächst scheinen, als ob man sich in der Tat auch in der Strahlungstheorie auf einzelne Kugelwellen beschränken dürfte. Aber es erhebt sich noch die Frage, ob denn unter den Bedingungen 2) und 3) die Strahlung noch merkliche Energie mit sich führt. Ist nun s_1 ein Oberflächenstück eines schwarzen Körpers, so strahlt es in den Kegel von dem Oeffnungswinkel α_2 in der Sekunde die Energie $K s_1 \alpha_2^2$, welche nach 3) gegen $K\lambda^2$ klein ist; denn σ_1^2 und s_1 sind von derselben Ordnung. Der letztere Ausdruck ist aber nur Funktion der Temperatur des schwarzen Körpers, und diese ist zugleich die Temperatur der von ihm emittierten Strahlung. Nur oberhalb einer gewissen Mindesttemperatur kann man also natürliche Strahlung als einzelne Welle behandeln, nur unter dieser Voraussetzung ist der Beweisgang, der in der ersten Arbeit eingeschlagen wurde, zwingend.

Daß diese Mindesttemperatur recht hoch liegt, folgt aus der Bemerkung, daß $\pi K\lambda^2$ die Energie ist, welche der schwarze Körper in der Sekunde durch ein quadratisches Flächenstück emittiert, dessen Seite eine Lichtwellenlänge ist; und gegen dies Energiequantum ist das in Rede stehende noch klein.

Einen Hinweis auf die Art, in der die Untersuchung zu verallgemeinern ist, erhalten wir, wenn wir bedenken, daß der Elementarvorgang in der Strahlungstheorie der Energietransport von einer Fläche s_1 zu einer anderen, s_2, ist, welche beide zu ihrem Abstand r senkrecht sind, solange zur Berechnung der in der Zeit dt durch Strahlung von der Schwingungszahl ν übertragenen Energie der Ansatz

4) $$K_\nu \frac{s_1 s_2}{r^2} dt\, d\nu$$

ausreicht. Unter welchen Bedingungen genügt er?

Verschieben wir s_1 in seiner Ebene, bis sich die Richtung $s_1 s_2$ um den Winkel φ gedreht hat, so tritt zu 4) der Faktor $\cos^4 \varphi$. Denn erstens ist die Entfernung beider Flächen jetzt $\frac{r}{\cos\varphi}$; zweitens aber bildet ihr Abstand mit ihren Normalen den Winkel φ, sodaß sowohl s_1 als s_2 den Faktor $\cos\varphi$ bei Berechnung der zugestrahlten Energie erhalten. Soll 4) anwendbar sein, so muß der Faktor $\cos^4 \varphi$ für den Rand von s_1 von 1 nur unmerklich verschieden sein; d. h. es muß

5) α_1^2 klein gegen 1

sein. Infolge der Reziprozität zwischen s_1 und s_2 gilt diese und die folgenden Bedingungen auch für den Winkel α_2, unter dem ein Querschnitt σ_2 von s_2 von s_1 aus gesehen wird.

Absorbiert das Medium zwischen s_1 und s_2, so ist K_ν eine nach dem Exponentialgesetz $\left(e^{-2\varkappa_\nu r}\right)$ abnehmende Funktion von r. Nun sind die Lichtwege, welche von verschiedenen Punkten auf s_1 zu einem Punkt von s_2 führen, verschieden lang und es wird auf ihnen verschieden viel absorbiert. Wären diese Unterschiede in der Absorption merklich, so reichte der Ansatz 4) nicht mehr aus; denn es wäre dann z. B. wesentlich, ob der Rand oder die Mitte von s_1 stärker strahlt, und derartige Unterschiede bringt jener Ansatz nicht zum Ausdruck. Also muß

6) $\varkappa_\nu r \alpha_1^2$ klein gegen 1

sein.

Ist der Strahlungsvorgang zeitlich variabel, so kommt noch eine andere Abhängigkeit des K_ν von r hinzu; da sich die Strahlung mit endlicher Geschwindigkeit u_ν fortpflanzt, muß

$$K_\nu = e^{-2\varkappa_\nu r} f\left(t - \frac{r}{u_\nu}\right)$$

sein. Wären nun die Zeiten, in denen die Strahlung die verschieden langen Wege von verschiedenen Punkten auf s_1 zu einem auf s_2 gelegenen durchläuft, meßbar von einander verschieden, so wäre 4) wiederum nicht hinreichend. Bei plötzlichem Erlöschen der Strahlung von s_1 z. B. fände auf s_2 ein allmähliches, je nach der Entfernung r verschieden schnelles Abklingen der Strahlung statt. Deshalb muß

7) $\dfrac{r\alpha_1^2}{v}$ klein gegen die meßbare Zeit $\dfrac{1}{\mu}$

sein. Wir haben hier an die Stelle von u_ν die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, v, gesetzt, da beide von gleicher Ordnung sind.

Von Interesse ist hier noch der Vergleich von 5), 6), 7) mit den Bedingungen, welche erfüllt sein mußten, wenn der Strahlungsvorgang sich als einzelne Kugelwelle auffassen lassen sollte. Die Voraussetzungen 5) und 6) mußten wir stillschweigend auch dabei machen; und 7) entspricht der Bedingung 2). Schreiben wir die letztere in der Form:

$$\frac{r\,\alpha_1^2}{v} \text{ klein gegen eine Lichtperiode } \frac{1}{\nu},$$

so sieht man aber, wieviel weniger 7) einengt, als 2). Denn eine Lichtperiode liegt ja weit unter der kleinsten meßbaren Zeit. Aus diesem Grunde fällt auch die Beschränkung auf Temperaturen oberhalb einer gewissen Grenze fort, wenn wir des weiteren die Bedingungen 5), 6) und 7) zu Grunde legen.

Die Fläche s_1 teilen wir nun in Stücke, für deren jedes 2) erfüllt sein soll. Eins davon zeichnen wir durch die Ordnungszahl p aus. Die Richtung von ihm zu dem auf der Normalen von s_1 im Abstand r gelegenen Punkt P bilde mit der Normalen den Winkel φ_p. Von diesem Flächenstück rührt in P eine zu r senkrechte Feldstärke $Z^{(p)}$ her, welche bei Fortlassung eines Cosinusfaktors, die durch 5) gerechtfertigt wird, als Funktion von r durch die Gleichung

$$8)\qquad Z^{(p)} = \frac{1}{r}\int d\nu\, e^{-\frac{\varkappa_\nu r}{\cos\varphi_p}}\, C_\nu^{(p)}\, e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{r\,n_\nu}{v\cos\varphi_p}\right) - \vartheta_\nu^{(p)}\right]}$$

gegeben ist. Nach 6) können wir hier den Faktor $\frac{1}{\cos\varphi_p}$ in der Verbindung mit $\varkappa_\nu r$ mit 1 vertauschen. In dem Produkt $\frac{r n_\nu \nu}{v\cos\varphi_p}$ wäre dies aber nur dann zulässig, wenn wir für s_1 nicht nur 7), sondern auch 2) als gültig ansehen wollten.

Aus allen diesen Partialbewegungen resultiert die Feldstärke

$$Z = \sum\nolimits^p Z^{(p)}.$$

Da die $Z^{(p)}$ von einander völlig unabhängig sind, ist der Mittelwert Z^2 für die Zeit einer Messung

$$\overline{Z^2} = \sum\nolimits^p \overline{Z^{(p)2}};$$

denn die doppelten Produkte $Z^{(p)} Z^{(q)}$ verschwinden sowohl, wenn man die Summe über alle p und q bildet, als auch einzeln bei der Mittelwertbildung nach der Zeit. Aus ähnlichen Gründen äußern auch die Fehler ε_p, welche wir beim Ansetzen der nur genähert richtigen Gleichung 8) gemacht haben, keinen Einfluß trotz ihrer großen Zahl, welche ja mit der Zahl der Stücke, in die wir s_1 teilten, übereinstimmt. Denn $\sum\overline{\varepsilon_p^2}$ ist zu vernachlässigen, die Produkte $\varepsilon_p Z^{(q)}$ fallen aus denselben Gründen fort, wie $Z^{(p)} Z^{(q)}$; und auch die Produkte $\varepsilon_p Z^{(p)}$ können ebensowohl positiv als negativ sein, sodaß $\sum^p \varepsilon_p Z^{(p)}$ verschwindend klein ist. Die Gesamtintensitäten addieren sich also; und dies gilt natürlich ebenso für

die Intensitäten der Strahlung von der Schwingungszahl ν_0; demnach gilt im Punkt P in Analogie zu Gleichung 3) der ersten Arbeit:

$$J_e(t) = \frac{1}{r^2}\int d\mu\, (\mathfrak{B}^0_\mu - i\,\mathfrak{A}^0_\mu)\, e^{2\pi i\mu t},$$

$$\mathfrak{B}^0_\mu - i\,\mathfrak{A}^0_\mu = \frac{2}{\varrho\nu_0}\int d\nu \sin^2\delta_\nu\, C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})},$$

wenn wir unter Aufhebung der früheren Bedeutung von C_ν und ϑ_ν die **Definition** geben:

$$9)\quad \begin{aligned} C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} &= e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu})r} \times \\ &\times \sum\nolimits^p C^{(p)}_\nu C^{(p)}_{\nu+\mu}\, e^{i\left[\vartheta^{(p)}_\nu - \vartheta^{(p)}_{\nu+\mu} + \frac{2\pi r}{v\cos\varphi_p}\left(n_\nu\nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)\right]}. \end{aligned}$$

Daß hierbei ϑ_ν nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, bringt keinen Nachteil mit sich; C_ν ist eindeutig bestimmt, wenn man bedenkt, daß es stets positiv sein soll.

Jetzt führen wir die Bedingung 7) und die schon früher gemachte Annahme, daß n_ν langsam veränderlich ist, ein. Als monochromatisch ist die Strahlung zu betrachten, wenn in ihrer Integraldarstellung von der Form

$$\int d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

nur solche C_ν in Betracht kommen, für welche $\nu - \nu_0$ höchstens von der Größenordnung $\varrho\nu_0$ ist. Die Aenderungen, welche n_ν und ebenso $n_\nu\nu$ in einem Bereich von dieser Ausdehnung erleiden, sollen relativ klein sein. Nun ist nach Bedingung 5) der ersten Arbeit μ klein gegen $\varrho\nu_0$; also ist die Differenz $n_\nu\nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)$ jedenfalls nicht groß gegen μ. Nach 7) dürfen wir deshalb in 9) den Faktor $\frac{1}{\cos\varphi_p}$ fortlassen und erhalten so:

$$10)\quad \begin{aligned} C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} &= e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu})r} \cdot e^{\frac{2\pi i r}{v}\left(n_\nu\nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)} \times \\ &\times \sum\nolimits^p C^{(p)}_\nu C^{(p)}_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta^{(p)}_\nu - \vartheta^{(p)}_{\nu+\mu})}. \end{aligned}$$

Ebenso wie die Bedingungen 5), 6) und 2) die Folge hatten, daß $\cos\varphi_p$ bei der Berechnung der **Schwingungsform** in P nicht in Betracht kam, haben 5), 6) und 7) zur Folge, daß man bei Berechnung des **Spektrums** davon absehen kann. Deshalb läßt

sich die oben durchgeführte Betrachtung, durch die wir uns von den speziellen Annahmen über Lage und Form der Strahlungsquelle befreiten, auch hier anwenden. Da $\cos\varphi_\nu$ in 10) nicht auftritt, ist es gleichgültig, ob die kohärenten Strahlen, welche nach verschiedenen Punkten P und P' der Normalen von s_1 führen, von demselben oder von verschiedenen Punkten von s_1 ausgehen. Fügen wir noch hinzu, daß an 10) nichts geändert zu werden braucht, wenn die Richtung $s_1 P$ sich aus der zu s_1 senkrechten Lage um einen Winkel α_2 dreht, welcher ebenfalls den Bedingungen 5), 6), 7) genügt, so ist die Analogie zu der obigen Untersuchung, wann Strahlung als einzelne Kugelwelle aufzufassen ist, vollständig; und zugleich sieht man, daß die Gleichung 10) gerade so weit gültig ist wie der Ansatz 4).

Trifft die Hypothese der natürlichen Strahlung für das Verhalten aller Funktionen

$$C_\nu^{(\nu)} C_{\nu+\mu}^{(\nu)} e^{i(\vartheta_\nu^{(\nu)} - \vartheta_{\nu+\mu}^{(\nu)})}$$

zu, so gilt sie nach 10) auch für die resultierende Strahlung, wenn r noch den Bedingungen 6a) und 6b) der ersten Arbeit gehorcht, welche aussagen, daß die Funktion

$$e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu})r} \cdot e^{\frac{2\pi i r}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)}$$

mit ν langsam veränderlich ist. Wir nehmen dies im Folgenden an.

Für den Punkt P', welcher in dem Kegel vom Oeffnungswinkel α_2 im Abstand $r+D$ von s_1 liegt, gilt ebenso, wie in der ersten Arbeit:

$$J_0'(t) = \frac{1}{(r+D)^2}\int d\mu (\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{0\prime})\, e^{2\pi i \mu t}$$

$$\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{0\prime} = \frac{2}{\varrho v_0}\int d\nu \sin^2\vartheta_\nu C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')}$$

wenn, wie aus 10) unmittelbar hervorgeht, die Beziehung gilt:

$$C_\nu' C_{\nu+\mu}' e^{i(\vartheta_\nu' - \vartheta_{\nu+\mu}')} = e^{-(\varkappa_\nu + \varkappa_{\nu+\mu})D} e^{\frac{2\pi i D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)} \times$$
$$\times C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man Gleichnng 4) der ersten Arbeit. Die Gleichungen 3) und 4) der ersten Arbeit bleiben also erhalten, und damit auch alle Schlüsse, die wir aus ihnen gezogen haben.

Nur die im § 3 angewandte Ausdrucksweise trifft nicht mehr

ganz zu; denn die Funktionen C_ν und ϑ_ν stehen nicht mehr in so unmittelbarer Beziehung zur Schwingungsform, wie dort angenommen war. Setzen wir nämlich für den Punkt P

$$Z = \sum_p Z^{(p)} = \frac{1}{r}\int d\nu\, \Gamma_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \tau_\nu)},$$

also

$$\Gamma_\nu e^{i\tau_\nu} = e^{-\varkappa_\nu r} \sum_p C_\nu^{(p)} e^{i\left(\vartheta_\nu^{(p)} + \frac{2\pi r n_\nu \nu}{v\cos\varphi_p}\right)},$$

so sind C_ν und ϑ_ν nach ihrer Definition durch 10) nicht mit Γ_ν und τ_ν identisch. Nur die Mittelwerte

$$\frac{2}{\varrho\nu_0}\int d\nu \sin^2\delta_\nu\, C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} = \mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$$

und

$$\frac{2}{\varrho\nu_0}\int d\nu \sin^2\delta_\nu\, \Gamma_\nu \Gamma_{\nu+\mu}\, e^{i(\tau_\nu - \tau_{\nu+\mu})} = \mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$$

müssen übereinstimmen. Bei allen energetischen Untersuchungen aber läßt sich der wirkliche Strahlungsvorgang durch die Kugelwelle ersetzen, deren Schwingungsform durch C_ν und ϑ_ν bestimmt ist. Darin, daß dieser substituirte Vorgang nicht in höherem Maße ungeordnet ist, als eine wirkliche einzelne Welle, liegt der Grund, daß auch das Zusammenwirken aller Strahlen eines Kegels im Fall „größerer" Werte von D die Ungeordnetheit nicht wiederherstellt, auf welcher der zweite Hauptsatz der Thermodynamik allein beruht. —

Nun war aber im § 3 noch ein zweiter, von den Gleichungen 3) und 4) der ersten Arbeit unabhängiger Beweis gegeben. Der Vollständigkeit wegen müssen wir ihn auch abändern. Die Energie eines Resonators in P', dessen Dämpfungsdekrement σ so klein ist, daß $\sigma\nu_0$ nicht mehr wie $\varrho\nu_0$ groß gegen μ ist, ist nach Gleichung 9) der vorigen Arbeit

$$U_0' = \int d\mu\, (b_\mu' - i a_\mu')\, e^{2\pi i\mu t},$$

wobei

$$(b_\mu' - i a_\mu') = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\int d\nu \sin\gamma_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}\, \Gamma_\nu' \Gamma_{\nu+\mu}'\, e^{i(\tau_\nu' - \tau_{\nu+\mu}' + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+\mu})}$$

und

$$\operatorname{cotg}\gamma_\nu = 2\pi\frac{\nu_0 - \nu}{\sigma\nu_0}$$

ist. Gilt in P' die Hypothese der natürlichen Strahlung, so darf

$\Gamma'_\nu \Gamma'_{\nu+\mu} e^{i(\tau'_\nu - \tau'_{\nu+\mu})}$ durch seinen Mittelwert $\mathfrak{B}^{0\prime}_\mu - i\,\mathfrak{A}^{0\prime}_\mu$ ersetzt werden; dies ist aber auch der Mittelwert von $C'_\nu C'_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta'_\nu - \vartheta'_{\nu+\mu})}$, sodaß wir auch Γ'_ν und τ'_ν hier mit C'_ν und ϑ'_ν vertauschen können. Dann aber erhält die Gleichung für U''_0 dieselbe Gestalt, in welcher wir sie früher angewandt haben.

Das Resultat der ersten Arbeit bleibt also erhalten, wenn die Bedingungen 5), 6), 7) erfüllt sind. Aber auch ein Hinausgehen über diese scheint mir nicht geeignet, im Fall „größerer" Werte von D dem Strahlungsvorgang die für den zweiten Hauptsatz erforderliche, experimentellen Eingriffen unzugängliche Ungeordnetheit zu verleihen. Denn ist 5) nicht erfüllt, so dürfte sich ein Teil der Strahlung unschwer abblenden lassen; ist 6) nicht erfüllt, so ist die durch Absorption am wenigsten geschwächte Strahlung die ausschlaggebende, und wenn 7) nicht mehr zutrifft, so kommen die Wirkungen verschiedener Teile von s_1 bei variabelen Strahlungsvorgängen zu verschiedenen Zeiten an. Könnten wir also trotz der Absorption Wirkungen der Strahlung beobachten, wenn die Bedingungen 6a) und 6b) nicht erfüllt sind, so müßten uns diese als Spiel des Zufalls erscheinen, solange wir von der ursprünglichen Strahlung nur das Spektrum kennen.

Das folgende Beispiel soll veranschaulichen, wie natürliche Strahlung bei der Fortpflanzung durch ein selektiv absorbierendes Medium die ihr eigentümliche Ungeordnetheit verliert. Sein Absorptionskoefficient sei für die Schwingungszahl ν_0 ein Minimum. Ursprünglich habe die Strahlung ein kontinuirliches Spektrum, in welchem auch die Schwingungszahl ν_0 auftritt. Da bei der Fortpflanzung das Verhältnis

$$e^{-\varkappa_0 D} : e^{-\varkappa_\nu D} = e^{(\varkappa_\nu - \varkappa_0) D}$$

immer größer wird, wird aus ihr mehr und mehr monochromatische Strahlung von der Schwingungszahl ν_0. Stellen wir also den Strahlungsvorgang, den wir zunächst als einzelne Kugelwelle betrachten wollen, durch das Integral

$$\frac{1}{r}\int d\nu\, C_\nu\, e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

dar, so ist nach Zurücklegung der Strecke D

$$\frac{1}{r+D}\int d\nu\, e^{-\varkappa_\nu D}\, C_\nu\, e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{D n_\nu}{v}\right) - \vartheta_\nu\right]}$$

die Darstellung des Lichtvektors. Wegen des Faktors $e^{-\varkappa_\nu D}$ zieht sich der in Betracht kommende Integrationsbereich immer mehr auf die Umgebung von ν_0 zusammen. Ist er bis auf die Größenordnung $\varrho\nu_0$ zusammengeschrumpft, so ist aus dem ursprünglich kontinuirlichen Spektrum monochromatische Strahlung herausgeschält.

Aber dieser Verengerungsprozeß geht bei weiterer Fortpflanzung immer weiter. Der Integrationsbereich wird klein gegen $\varrho\nu_0$. Der durch das Integral dargestellte Schwingungsvorgang wird immer mehr ein langer Zug von Wellen von der Schwingungszahl ν_0, nähert sich also immer mehr der reinen Sinusschwingung; für die letztere aber gilt der zweite Hauptsatz schon aus dem Grunde nicht, weil zwei aus verschiedenen Quellen stammende Wellen dieser Art mit einander interferieren, während zu den Grundlagen der thermodynamischen Strahlungstheorie die Tatsache gehört, daß derartige Interferenzen nicht stattfinden. Man sieht auch leicht ein, daß das Zusammenwirken vieler Wellen, deren Fortpflanzungsrichtungen ein wenig gegen einander geneigt sind, nichts ändert; denn wenn Bedingung 6) erfüllt ist, ist der Verengerungsproceß in allen Strahlen gleich weit vorgeschritten. Aber natürlich nimmt, so klein auch $\varkappa_0$ sein mag, in dem Maaße, in welchem man sich der Sinusschwingung nähert, die Intensität des Vorgangs ab, sodaß er sich schon aus diesem Grunde der Beobachtung entzieht.

Bestimmung der piëzoelektrischen Konstanten von krystallisierter Weinsäure.

Von

T. Tamaru.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

Einleitung.

Die allgemeine Theorie der Piëzoelektrizität ist von Herrn Voigt[1]) aufgestellt worden, während diesbezügliche experimentelle Untersuchungen über die rhomboedrischen Krystalle, Turmalin und Quarz, von den Herren Riecke und Voigt[2]), weitere über den regulären Krystall Natriumchlorat, über Quarz und über den rhombischen Krystall Seignettesalz von Herrn F. Pockels[3]) vorliegen. Monokline Krystalle bieten wegen ihrer niedrigeren Symmetrie eine noch größere Mannigfaltigkeit im piëzoelektrischen Verhalten als die vorgenannten. Die nachstehende Untersuchung über den hemimorphisch monoklinen Krystall Rechtsweinsäure wurde auf Anregung von Herrn Voigt unternommen. Im Laufe der Untersuchung kamen die Eigenschaften des Krystalls in verschiedener unangenehmer Weise zur Geltung, — seine Weichheit, Sprödigkeit, Löslichkeit in Alkohol (beim Versuch, die Krystallflächen mit Schellack zu überziehen), und seine verhältnismäßig niedrige Schmelztemperatur (bei der Behandlung mit geschmolzenem Paraffin). Da die beobachteten Werte selbst bei derselben Lage desselben Präparates nicht immer gute Uebereinstimmung aufwiesen, so habe ich die verschiedenen Fehlerquellen untersucht,

1) Voigt, Abhandl. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, 36.
2) Riecke u. Voigt, Wied. Ann. 45.
3) F. Pockels, Abhandl. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, 39.

und bin zu dem Schluß gekommen, daß die Hauptfehlerquelle in der Ungleichmäßigkeit des Druckes zu suchen sei. Eine besondere Behandlungsweise, die ich in der Hoffnung, deren Einfluß zu vermeiden, anwandte, ergab nicht den gewünschten Erfolg. Dieser Punkt wird in späteren ähnlichen Untersuchungen noch einer Verbesserung bedürfen. Indessen dürften durch die vorliegende Untersuchung die dem Weinsäurekrystall angehörigen piëzoelektrischen Konstanten je nach ihrer Größe auf 10 bis 20% bestimmt und somit sein piëzoelektrisches Verhalten in seinen allgemeinen Zügen festgestellt sein.

---

1) Allgemeine Skizze der Theorie und der Beobachtungsmethode.

Bei einem Weinsäurekrystall, dessen zweizählige Symmetrieachse parallel der z-Axe ist, — die positive z-Richtung von dem antilogen nach dem analogen Pol hin, und x-Axe $\perp$ der Spaltfläche gerechnet — gilt für die Komponenten des erregten elektrischen Momentes nach Voigt

$$\begin{aligned} A &= \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad d_{14}Y_z + d_{15}Z_x \quad\quad . \;, \\ B &= \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad d_{24}Y_z + d_{25}Z_x \quad\quad . \;, \\ C &= d_{31}X_x + d_{32}Y_y + d_{33}Z_z + \quad . \quad\quad . \quad + d_{36}X_y. \end{aligned}$$

Wenn ein homogener Druck D in einer Richtung mit den Richtungscosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wirkt, und wenn die Spannung senkrecht dazu $= 0$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} A &= -D\{\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad d_{14}\alpha_2\alpha_3 + d_{15}\alpha_3\alpha_1 \quad\quad . \;\}, \\ B &= -D\{\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad d_{24}\alpha_2\alpha_3 + d_{25}\alpha_3\alpha_1 \quad\quad . \;\}, \\ C &= -D\{d_{31}\alpha_1^2 + d_{32}\alpha_2^2 + d_{33}\alpha_3^2 + \quad . \quad\quad . \quad + d_{36}\alpha_1\alpha_2\}. \end{aligned}$$

Das Moment in der Richtung $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ist dabei

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_\alpha = -D\{& d_{31}\alpha_1^2\beta_3 + d_{32}\alpha_2^2\beta_3 + d_{33}\alpha_3^2\beta_3 + d_{14}\alpha_2\alpha_3\beta_1 + d_{24}\alpha_2\alpha_3\beta_2 \\ & + d_{15}\alpha_3\alpha_1\beta_1 + d_{25}\alpha_3\alpha_1\beta_2 + d_{36}\alpha_1\alpha_2\beta_3\}. \end{aligned}$$

I. Mit einem Parallelepiped, dessen Flächennormalen

$$\xi(1, 0, 0), \quad \eta(0, 1, 0), \quad \zeta(0, 0, 1)$$

sind, kann man beobachten die Momente

$$\begin{aligned} \Xi_\xi = \Xi_\eta = \Xi_\zeta = 0, \quad & \mathrm{H}_\xi = \mathrm{H}_\eta = \mathrm{H}_\zeta = 0, \\ \mathrm{Z}_\xi = -D.d_{31}, \quad \mathrm{Z}_\eta = -D.d_{32}, \quad & \mathrm{Z}_\zeta = -D.d_{33}, \end{aligned}$$

wobei die Buchstaben die Richtung des Momentes, die Indices diejenigen des Druckes andeuten.

II. Mit einem Parallelepiped, dessen Flächennormalen

$$\xi\,(1, 0, 0), \quad \eta\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \zeta\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sind, beobachtet man

$$\Xi_\xi = 0, \qquad \mathrm{H}_\xi = -D\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{31},$$

$$\mathrm{Z}_\xi = -D\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{31},$$

$$\Xi_\eta = -D\cdot\frac{1}{2}\,d_{14}, \qquad \mathrm{H}_\eta = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{32}+d_{33}+d_{24}),$$

$$\mathrm{Z}_\eta = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{32}+d_{33}-d_{24}),$$

$$\Xi_\zeta = +D\cdot\frac{1}{2}\,d_{14}, \qquad \mathrm{H}_\zeta = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{32}+d_{33}-d_{24}),$$

$$\mathrm{Z}_\zeta = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{32}+d_{33}+d_{24}).$$

III. Mit einem Parallelepiped, dessen Flächennormalen

$$\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \eta\,(0, 1, 0), \quad \zeta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sind, beobachtet man

$$\Xi_\xi = +D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{31}+d_{33}+d_{15}), \qquad \mathrm{H}_\xi = +D\cdot\frac{1}{2}\,d_{25},$$

$$\mathrm{Z}_\xi = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{31}+d_{33}-d_{15}),$$

$$\Xi_\eta = +D\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{32}, \qquad \mathrm{H}_\eta = 0,$$

$$\mathrm{Z}_\eta = -D\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{32},$$

$$\Xi_\zeta = +D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{31}+d_{33}-d_{15}), \qquad \mathrm{H}_\zeta = -D\cdot\frac{1}{2}\,d_{25},$$

$$\mathrm{Z}_\zeta = -D\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,(d_{31}+d_{33}+d_{15}).$$

IV. Mit einem Parallelepiped, dessen Flächennormalen

$$\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \eta\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \zeta\,(0, 0, 1)$$

sind, beobachtet man

$$\Xi_\xi = \Xi_\eta = \Xi_\zeta = 0, \quad H_\xi = H_\eta = H_\zeta = 0$$

$$Z_\xi = -D \cdot \tfrac{1}{2}(d_{31} + d_{32} + d_{36}), \quad Z_\eta = -D \cdot \tfrac{1}{2}(d_{31} + d_{32} - d_{36}), \quad Z_\zeta = -D \cdot d_{33}.$$

Die zur Beobachtung benutzten Krystallpräparate waren in Form rechtwinkliger Parallelepipeda mit ungefähr gleich langen (ca. 7—8 mm) Kanten geschnitten. An die Druckflächen wurden mittels Paraffins zwei 7 mm dicke, quadratische, sorgfältig eben geschliffene Bernsteinstücke (Seitenlänge = 13 mm) angekittet. Das eine (obere) Bernsteinstück trug auf seiner oberen Fläche ein nach oben schneidenförmiges Eisenstück, welches in der Mitte der Schneide einen kleinen Schnitt hatte. Das ganze System wurde auf eine horizontale, von einem Tische seitwärts hervorragende Unterlage gelegt. Ueber die Schneide wurde ein rechtwinkliger Rahmen gehängt, so daß der markierte Mittelpunkt des oberen Rahmenrandes auf dem Schnitt ruhte, während vom Mittelpunkt des unteren Rahmenrandes die den Druck ausübenden Gewichte an Bindfaden herabhingen. Der Krystall wurde entlastet oder belastet, indem man zwei andere ebenfalls an die Gewichte befestigte Bindfäden, welche von da schief rechts und links nach festen Punkten des Tisches und darüber zur Beobachtungsstelle geführt wurden, zugleich zog oder losließ. Diese Einrichtung ließ das Schwingen der Gewichte fast ganz vermeiden, welches sonst auf den Krystall eine wechselnde horizontale Kraft ausgeübt und eine störende elektrische Erregung hervorgebracht hätte; die dabei noch übrigbleibende seitliche Bewegung der Gewichte wurde dadurch unterdrückt, daß das unterste Gewichtstück ganz in Oel getaucht wurde. Das wirkende Gewicht, also mit Abzug des Auftriebs des Oels, betrug 3,27 oder 2,27 kg, wovon 0,5 kg konstant hängen blieb.

Die Flächen, deren Ladungen untersucht werden sollten, wurden mittels Paraffins mit Stanniol belegt und mit federnden Metallstücken berührt, welche zur Erde resp. zu einem Quadrantenpaar des Elektrometers geleitet waren. Die anderen Quadranten wurden ein für allemal zur Erde abgeleitet, während die Nadel mit einer Akkumulatorenbatterie von 80 Elementen geladen blieb.

Die Kapazität des geladenen Systems wurde aus zwei Beobachtungen bestimmt, indem man es mit zwei verschiedenen bekannten Kapazitäten — nämlich mit einem Plattenkondensator (Durchmesser = 14,6 cm) von 1 resp. 2 mm Plattendistanz, — die sich nach Kirchhoffs Formel = 131,4 resp. 71,2 cm berech-

neten, verband und sonst in ganz denselben Umständen piëzoelektrische Messung vornahm. Die Kapazität des übrigen Teiles wurde in früheren Beobachtungen durchschnittlich = 47,9 in späteren (bei etwas geänderter Anordnung) = 57,8 cm gefunden. Die Hauptversuche wurden auch immer unter Hinzufügung einer der genannten Kondensatorkapazitäten ausgeführt. Die Elektrometerskala wurde mit einem Westonschen Normalelement kalibriert.

2) Die Druckvorrichtung und die piëzoelektrische Erregung.

Beim Druckänderungsverfahren wäre es notwendig, die folgenden Punkte besonders zu beachten:

a) Die Normalität des Druckes auf den gedrückten Flächen. Diese wurde einmal dadurch gesichert, daß der Druck direkt durch die Schwerkraft (ohne diese, wie zuerst versucht wurde, mittels eines Hebels zu übertragen), also sicher lotrecht angewandt wurde. Dann aber mußten die Flächen horizontal sein. Zu diesem Zwecke wurde beim Verfertigen des unteren Bernsteinstückes besonders für seine gleichförmige Dicke gesorgt, und der Krystall wurde mit ihm verkittet, indem man die beiden Teile, während noch das Paraffin flüssig war, fest gegen einander drückte und sie so hielt, bis das Paraffin fest war. Dann bliebe nur noch der Einfluß der Abweichung der Unterlage von der Horizontalen; dieser wurde dadurch eliminiert, daß man dieselbe Beobachtung zweimal direkt nach einander durchführte, das zweite Mal nach einer Drehung von 180^{0} des gekitteten Systems um die Vertikale, und den Mittelwert aus den beiden nahm.

b) Die Influenz wegen der Erregung an den anderen Flächen. Auf dem Staniolblatt selber ist zwar deren Gesamteffekt = 0. Da aber die Leitung durch das federnde Metallstück nach einer Seite von der Belegung stattfand, so mußte die fremde Erregung an dieser Seite influenzierend wirken. Wenn man aber bei der Messung der Erregung der anderen belegten (zuerst zur Erde abgeleiteten) Fläche in derselben Lage des Krystalls das Leitungsstück an derselben Seite wie vorher anbrächte, so wäre der Einfluß der Influenz auf den absoluten Wert entgegengesetzt. Der Mittelwert aus den beiden wäre also von diesem Einfluß frei.

c) Die Gleichmäßigkeit des Druckes. Diese ist sehr schwierig zu bewerkstelligen. Wie gut die Flächen auch geschliffen wären, so könnte man nicht etwa annehmen, daß bei bloßem Drauflegen der Kontakt mit den Bernsteinstücken auf der ganzen Fläche

stattfände, geschweige denn, daß der Druck gleichmäßig wäre. Ein Polster, etwa aus Kautschuk, dazwischen zu schalten, wurde sogleich als unzweckmäßig verworfen, wegen anscheinend durch Reibungselektrizität bewirkter Unregelmäßigkeiten. Schellack, womit zuerst die Isolierung der Flächen versucht wurde, hatte nur den Effekt, die Flächen zu verschlechtern, wegen der Löslichkeit der Weinsäure in Alkohol, wenn man auch mit kleinen Mengen von dicker Lösung verfuhr. Schließlich wurde Paraffinkitt als der Zweckmäßigste angenommen; er erwies sich genügend fest in der gewöhnlichen Temperatur und isolierte auch (wenigstens nicht sehr lange nach der Verfertigung) gut genug. Der Kitt war so fest, daß das Losmachen bloß mit dem Druck der Hand manchmal nicht gelang. Da das Paraffin in geschmolzenem Zustande den Zwischenraum ganz erfüllte und gleich darauf fest wurde, so konnte man wenigstens des Kontaktes über die ganze Fläche sicher sein. Es wurde deshalb vermutet, dass, wenn auch nicht die wirkliche Druckverteilung, so doch die Verteilung der Druckzunahme resp. -abnahme ziemlich gleichmäßig sein würde, vorausgesetzt eine zentrische Verkittung des Krystalls mit dem oberen Bernsteinstücke. Diese Annahme scheint indessen nicht ganz zutreffend zu sein, denn die beobachteten Werte für dieselbe Lage des Krystalls und der Belegung bei erneuerter Verkittung wiesen meistens viel größere Abweichungen von einander auf, als für Beobachtungsfehler gelten konnten. Beim Mangel einer besseren Methode in dieser Hinsicht mußte ich aber doch bei der genannten bleiben.

Wenn man nun die Verteilung der Druckzunahme und -abnahme bei einer zentrischen Kraftanwendung als gleichmäßig annehmen darf, so kann man die Verteilung bei einer wenig exzentrischen Anwendung der Kraft (d. h. wenn der Krystall und das obere Bernsteinstück nicht ganz konzentrisch gekittet wurden, was natürlich vorausgesetzt werden muß) als linear variierend annehmen, und in diesem Sinne wird jede der beiden Belegungen zwar nicht die richtige Ladung aufweisen, aber der Mittelwert der an beiden beobachteten Ladungen wird wenigstens in der ersten Annäherung vom Einfluß der Exzentrizität der Kraft frei sein.

Wenn die Staniolbelegungen an die Druckflächen angebracht werden sollten, habe ich auch erst nach dem oben Gesagten verfahren, dann die zusammengekitteten Teile auseinandergenommen und Staniolblättchen dazwischen gelegt, die in der Mitte zweier gegenüberstehender Seiten zum Zweck der Leitung je mit zwei

kleinen Zungen versehen wurden. Bei diesen Versuchen dürfte die Ungleichmäßigkeit der Druckverteilung einen kleineren Einfluß gehabt haben, als wenn die Belegungen an den Seiten wären, insofern als die Ladung von der Größe der Druckflächen unabhängig ist.

d) Berücksichtigung der Abweichung der Orientierung der Würfelflächen von der Beabsichtigten. Durch Abweichungen der Druckrichtung und der Belegflächennormalen wird eine Aenderung des Momentes verursacht

$$\begin{aligned} \delta B_\alpha = -D\{ & (2\alpha_1\beta_3 . d_{31} + \alpha_3\beta_1 . d_{15} + \alpha_3\beta_2 . d_{25} + \alpha_2\beta_3 . d_{36})\,\delta\alpha_1 \\ & + (2\alpha_2\beta_3 . d_{32} + \alpha_3\beta_1 . d_{14} + \alpha_3\beta_2 . d_{24} + \alpha_1\beta_3 . d_{36})\,\delta\alpha_2 \\ & + (2\alpha_3\beta_3 . d_{33} + \alpha_2\beta_1 . d_{14} + \alpha_2\beta_2 . d_{24} + \alpha_1\beta_1 . d_{15} + \alpha_1\beta_2 . d_{25})\,\delta\alpha_3 \\ & + (\alpha_2 . d_{14} + \alpha_1 . d_{15})\,\alpha_3\,\delta\beta_1 + (\alpha_2 . d_{24} + \alpha_1 . d_{25})\,\alpha_3\,\delta\beta_2 \\ & + (\alpha_1^2 . d_{31} + \alpha_2^2 . d_{32} + \alpha_3^2 . d_{33} + \alpha_1\alpha_2 . d_{36})\,\delta\beta_3\}, \end{aligned}$$

wo $\delta\alpha_1 \ldots \delta\beta_3$ die respektiven, nicht alle von einander unabhängigen Abweichungen bedeuten. Diese Größen werden unten mit p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; r_1, r_2, r_3 bezeichnet, je nachdem sie sich auf die ξ-, η-, oder ζ-Axe beziehen.

I. Für Krystall I mit

$$\xi(1, p_2, p_3), \quad \eta(q_1, 1, q_3), \quad \zeta(r_1, r_2, 1)$$

ergiebt sich, indem man den Hauptteilen $\Xi_\xi, \ldots$ der Momente ihre Aenderungen $\delta\Xi_\xi \ldots$ hinzufügt,

$$Z_\xi = -(d_{31} + d_{36} . p_2), \quad Z_\eta = -D(d_{32} + d_{36} . q_1), \quad Z_\zeta = -D . d_{33}.$$

In den anderen, $\delta\Xi_\xi \ldots \delta H_\zeta$ kommt weder p_2 noch q_1 mehr vor, sie zu beobachten hätte also keinen Nutzen zum Zweck der Ermittelung der Fehler in den beobachteten Hauptwerten Z_ξ, Z_η, Z_ζ.

II. Für Krystall II mit

$$\xi\,(1, p_2, p_3), \qquad \eta\left(q_1, \frac{1}{\sqrt{2}} + q_2, \frac{1}{\sqrt{2}} - q_2\right), \qquad \zeta\left(r_1, -\frac{1}{\sqrt{2}} + r_2, \frac{1}{\sqrt{2}} + r_2\right)$$

gilt

$$\Xi_\xi = -D\,(d_{31} + d_{15})\,p_3,$$

$$\Xi_\eta = -D\left\{\frac{1}{2}\,d_{14} + \frac{1}{2}\,(d_{32} + d_{33})\,p_3 + \frac{1}{2}\,d_{24}\,p_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{15}\,q_1\right\},$$

$$\Xi_\zeta = \quad D\left\{\frac{1}{2}\,d_{14} - \frac{1}{2}\,(d_{32} + d_{33})\,p_3 + \frac{1}{2}\,d_{24}\,p_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{15}\,r_1\right\},$$

$$\mathrm{H}_\xi = -D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31} - d_{31}q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{25}p_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}p_2\right\},$$

$$\mathrm{H}_\eta = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}+d_{24}) + \frac{1}{2}(d_{32}-3\,d_{33}+d_{24})\,q_3 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(d_{14}+d_{25}+d_{36})\,q_1\right\},$$

$$\mathrm{H}_\zeta = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}-d_{24}) - (d_{32}-d_{33})\,r_2 - \frac{1}{2}(d_{32}+d_{33}+d_{24})\,q_3 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}d_{14}q_1 + \frac{1}{2}(d_{25}-d_{36})\,r_1\right\},$$

$$\mathrm{Z}_\xi = -D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31} + d_{31}r_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}d_{25}p_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}p_2\right\},$$

$$\mathrm{Z}_\eta = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}-d_{24}) + (d_{32}-d_{33})\,q_2 + \frac{1}{2}(d_{32}+d_{33}+d_{24})\,r_3 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}d_{14}r_1 - \frac{1}{2}(d_{25}-d_{36})\,q_1\right\},$$

$$\mathrm{Z}_\zeta = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}+d_{24}) - \frac{1}{2}(d_{32}-3\,d_{33}+d_{24})\,r_3 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(d_{14}+d_{25}+d_{36})\,r_1\right\}.$$

III. Für Krystall III mit

$$\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+p_1,\, p_2,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}+p_1\right),\quad \eta(q_1, 1, q_3),\quad \zeta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+r_1,\, r_2,\, \frac{1}{\sqrt{2}}-r_1\right)$$

gilt

$$\Xi_\xi = \quad D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}+d_{15}) + \frac{1}{2}(d_{31}-3\,d_{33}+d_{15})\,p_1 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(d_{14}+d_{25}+d_{36})\,p_2\right\},$$

$$\Xi_\eta = \quad D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{32} - d_{32}p_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}d_{14}q_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}q_1\right\},$$

$$\Xi_\zeta = \quad D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}-d_{15}) + (d_{31}-d_{33})\,r_1 - \frac{1}{2}(d_{31}+d_{33}+d_{15})\,p_1 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}d_{25}p_2 - \frac{1}{2}(d_{14}-d_{36})\,r_2\right\},$$

$$\mathrm{H}_\xi = \quad D\left\{\frac{1}{2}d_{25} - \frac{1}{2}(d_{31}+d_{33})\,q_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{24}p_2 + \frac{1}{2}d_{15}q_1\right\},$$

$$\mathrm{H}_\eta = -D\,(d_{32}+d_{24})\,q_3,$$

$$H_\zeta = -D\left\{\frac{1}{2}d_{25} + \frac{1}{2}(d_{31}+d_{33})q_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{24}r_2 + \frac{1}{2}d_{15}q_1\right\},$$

$$Z_\xi = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}-d_{15}) + (d_{31}-d_{32})p_1 - \frac{1}{2}(d_{31}+d_{33}+d_{15})r_1 \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}d_{25}r_2 - \frac{1}{2}(d_{14}-d_{36})p_2\right\},$$

$$Z_\eta = -D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{32} - d_{32}r_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{14}q_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}q_1\right\},$$

$$Z_\zeta = -D\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}+d_{15}) + \frac{1}{2}(d_{31}-3d_{33}+d_{15})r_1 \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}(d_{14}+d_{25}+d_{36})r_2\right\}.$$

IV. Für Krystall IV mit

$$\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+p_1, \frac{1}{\sqrt{2}}-p_1, p_3\right),\quad \eta\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+q_1, \frac{1}{\sqrt{2}}+q_1, q_3\right),\quad \zeta(r_1, r_2, 1)$$

gilt

$$Z_\xi = -D\left\{\frac{1}{2}(d_{31}+d_{32}+d_{36}) + \sqrt{2}(d_{31}-d_{32})p_1\right\},$$

$$Z_\eta = -D\left\{\frac{1}{2}(d_{31}+d_{32}-d_{36}) - \sqrt{2}(d_{31}-d_{32})q_1\right\},\quad Z_\zeta = -Dd_{33}.$$

In den anderen, $\delta\Xi_\xi \ldots \delta H_\zeta$, kommt weder p_1 noch q_1 mehr vor, sie brauchen also nicht beobachtet zu werden.

Ueber die $p\,q\,r$ giebt die Beobachtung der Winkel zwischen den Krystallflächen einige Auskünfte:

I. Für Krystall I findet man

$$\cos(\xi\eta) = \varrho = p_2 + q_1$$

In $\cos(\eta\zeta)$, $\cos(\zeta\xi)$ kommen p_2 und q_1 nicht vor.

II. Für Krystall II

$$\cos(\eta\zeta) = \varkappa = \sqrt{2}(r_2 - q_2)$$

$$\cos(\zeta\xi) = \varkappa = r_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(p_3 - p_2)$$

$$\cos(\xi\eta) = \varrho = q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_3).$$

III. Für Krystall III

$$\cos(\eta\zeta) = \varkappa = r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_3)$$

$$\cos(\zeta\xi) = \varkappa = \sqrt{2}\,(r_1 + p_1)$$

$$\cos(\xi\eta) = \varrho = p_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_3)$$

IV. **Für Krystall IV**

$$\cos(\xi\eta) = \varrho = \sqrt{2}\,(q_1 - p_1).$$

In $\cos(\eta\zeta)$ und $\cos(\zeta\xi)$ kommen q_1 und p_1 nicht vor.

Unter Benutzung der Flächenwinkel, lassen sich die d aus beobachteten Werten für $D = 1$ von Ξ_ξ ..., u. s. w. folgendermaßen berechnen:

Aus I

$$d_{31} = -Z_\xi - \frac{1}{2}\varrho\, d_{36} - \frac{1}{2} d_{36}(p_2 - q_1),$$

$$d_{32} = -Z_\eta - \frac{1}{2}\varrho\, d_{36} + \frac{1}{2} d_{36}(p_2 - q_1),$$

$$d_{33} = -Z_\zeta;$$

aus II

$$d_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(H_\xi + Z_\xi) - \frac{1}{2}\varkappa\, d_{31} - d_{36}\cdot p_2,$$

$$d_{14} = -\Xi_\eta + \Xi_\zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho - \varkappa)\, d_{15} - (d_{24} - d_{15})\, p_2,$$

$$d_{24} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-H_\eta - Z_\zeta + Z_\eta + H_\zeta) + \frac{1}{2}\varkappa\, d_{24}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho - \varkappa)(d_{14} + d_{25}) + (d_{14} + d_{25})\, p_2,$$

$$d_{32} + d_{33} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(H_\eta + Z_\zeta + Z_\eta + H_\zeta) + \frac{1}{2}\varkappa\,(d_{32} - 3\, d_{33})$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho - \varkappa)\, d_{36} + d_{36}\cdot p_2;$$

aus III

$$d_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\eta - Z_\eta) + \frac{1}{2}\varkappa\, d_{32} - d_{36}\, q_1,$$

$$d_{25} = H_\xi - H_\zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho + \varkappa)\, d_{24} + (d_{24} - d_{15})\, q_1,$$

$$d_{15} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\xi - Z_\zeta - \Xi_\zeta + Z_\xi) - \frac{1}{2}\varkappa\, d_{15}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho + \varkappa)(d_{14} + d_{25}) - (d_{14} + d_{25})\, q_1,$$

$$d_{31}+d_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\xi - Z_\zeta + \Xi_\zeta - Z_\xi) - \frac{1}{2}\varkappa(d_{31}-3d_{32})$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho+\varkappa)d_{36} + d_{36}\cdot q_1;$$

und aus IV
$$d_{33} = -Z_\zeta,$$
$$d_{31}+d_{32} = -(Z_\xi + Z_\eta) + \varrho(d_{31}-d_{32}),$$
$$d_{36} = -Z_\xi + Z_\eta - \sqrt{2}(d_{31}-d_{32})(p_1+q_1).$$

Die kleinen Größen, p_2-q_1 in I, p_2 in II, q_1 in III und p_1+q_1 in IV, die in den letzten Formeln noch auftreten, lassen sich überhaupt nicht durch die piëzoelektrischen und Winkelmessungen ermitteln. Kombinationen wie $H_\xi - Z_\xi$, $-\Xi_\eta - \Xi_\zeta$, u. s. w. aus II, $-\Xi_\eta - Z_\eta$ u. s. w. aus III geben Auskunft wohl über andere kleine Größen, aber nicht über die genannten. Das ist auch von vornherein zu erwarten, denn diese Größen sind diejenigen, die in jedem Falle die Orientierung der Spaltfläche relativ zu den Würfelflächen angeben, und die Wahl der Spaltfläche als YZ-Ebene ist einfach eine Willkür, da sie sich in piëzoelektrischer Hinsicht durch keine besondere Eigenschaft auszeichnet. Man muß also für Ermittelung der genannten Größen schon die Eigenschaft der Spaltfläche als solcher in Betracht ziehen. Ich habe das aber nicht getan, einmal weil die beobachteten Werte, wie oben erwähnt, wegen anderer Umstände nicht die Genauigkeit erreichten, daß es notwendig wäre, dann aber wegen eines besonderen günstigen Umstandes. Es hat sich nämlich ergeben, daß bei Weinsäurekrystall die Koeffizienten $d_{14}, d_{24}, d_{15}, d_{25}$ bedeutend größer sind als $d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{36}$, und die Formeln zeigen, daß die Ausdrücke für die l e t z t e r e n keinen von den e r s t e r e n in ihren Korrektionsgliedern enthalten. Also bis zu derselben prozentischen Größenordnung, die durch die Sinus der Orientierungsfehler gegeben wird, (welche vielleicht von der Ordnung $^1/_{100}$ sein dürfte), kann man die Formeln benutzen:

I. $\quad d_{31} = -Z_\xi, \qquad d_{32} = -Z_\eta, \qquad d_{33} = -Z_\zeta,$

II. $\quad d_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(H_\xi + Z_\xi), \quad d_{32}+d_{33} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(H_\eta + Z_\zeta + Z_\eta + H_\zeta),$

$\quad d_{14} = -\Xi_\eta + \Xi_\zeta, \qquad d_{24} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(H_\eta + Z_\zeta - Z_\eta - H_\zeta),$

III. $\quad d_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\eta - Z_\eta), \quad d_{31}+d_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\xi - Z_\zeta + \Xi_\zeta - Z_\xi),$

$$d_{25} = \mathrm{H}_\xi - \mathrm{H}_\zeta, \qquad d_{15} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi_\xi - \mathrm{Z}_\zeta - \Xi_\zeta + \mathrm{Z}_\xi),$$

$$\text{IV.} \quad d_{33} = -\mathrm{Z}_\zeta, \quad d_{31} + d_{32} = -\mathrm{Z}_\xi - \mathrm{Z}_\eta, \quad d_{36} = -\mathrm{Z}_\xi + \mathrm{Z}_\eta.$$

Es mag noch das folgende bemerkt werden. Wenn man einen z. B. wie II geschnittenen Krystall hat, so ist man bezüglich der Orientierung der Koordinatenachsen nicht ganz auf die etwa beim Schleifen darauf angebrachten Zeichen angewiesen. Es ist nämlich ein Flächenpaar vorhanden, welches, wenn belegt und gedrückt, keine — richtiger gesagt, eine nur von Fehlerquellen herrührende kleine — elektrische Ladung aufweist; das sind die zur x-Axe normalen Flächen. Die Wahl der positiven x-Richtung ist gleichgültig. Durch einen Druck auf diese Flächen werden die vier Seitenflächen gleich stark (dem Hauptteil nach) erregt; durch die Kanten, in denen zwei gleichnamig erregte Flächen auf einander stoßen — bei den in der Figur angedeuteten Erregungen durch die Kanten A und B — geht die Symmetrieaxe hindurch. Den analogen und antilogen Pol kann man unterscheiden mit Belegungen an einem Seitenflächenpaar aus der Fortbewegung der Elektrometernadel bei einer stetigen Aenderung der Zimmertemperatur, die ja meistens sogar unvermeidlich ist und bei Beobachtungen mit ähnlich situierten Belegungen immer einen recht unangenehmen Umstand bildet. Für einen wie III geschnittenen Krystall gilt eine ähnliche Betrachtung. Bei I und IV muß man zur Feststellung der x- und y-Axe schon die Richtung der Spaltfläche besonders kennen.

Fig. 1.

3) Die Elektrometrische Beobachtungsmethode.

Wie oben kurz erwähnt, konnte meistens keine Rede von einer dauernden Ruhelage der Elektrometernadel sein, so daß die Beobachtungen bei einer fortrückenden Ruhelage gemacht werden mußten. Zu diesem Zwecke habe ich die folgende Beobachtungsmethode benutzt. Die Nadel wurde bei angelegtem (resp. abgenommenem) Gewicht in Schwingung versetzt, und es wurden 4 Umkehrpunkte abgelesen. Im Augenblick der vierten Umkehrung, welche an der Seite stattfand, nach der durch

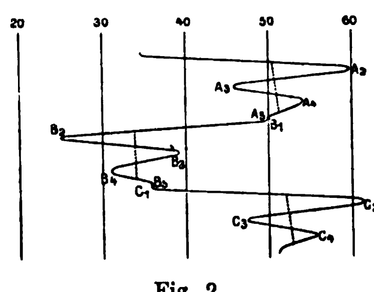


Fig. 2.

die nächste Druck änderung die Ruhelage abgelenkt werden sollte, wurde das Gewicht abgenommen (resp. angelegt), und vier weitere Umkehrpunkte abgelesen; im Augenblick der letzten Umkehrung das Gewicht wieder angelegt (resp. abgenommen), u. s. w. Die Behandlungsweise ist ersichtlich aus Fig. 2, welche den Verlauf der Nadelbewegung mit nach unten fortschreitender Zeit darstellt; die punktierten Linien sollen die ungefähren Ruhelagen andeuten. Es wurde besonders drauf geachtet, daß die Druckänderung nicht etwa zu früh, also ohne richtiges Verschwinden der Geschwindigkeit geschah, sondern es wurde immer das Zuruhekommen abgewartet, was bei einer größeren Schwingungsamplitude (Doppelamplitude = 20 cm und aufwärts, manchmal auch darunter) zur Folge hatte, daß die Nadel inzwischen eine kleine Strecke zurückging, so daß zwei Umkehrungen (z. B. B_6 und C_1 in der Fig.) dicht hintereinander in einer Entfernung von meistens 0,5—1,5 mm stattfanden. In solchen Fällen wurde die erste dem vorangehenden Schwingungsstadium, die zweite dem nachfolgenden gehörig betrachtet. Aus den einem Schwingungsstadium gehörigen Umkehrpunkten wurden die Ruhelagen zu dessen Anfang und Ende berechnet, also die Ruhelage zur Zeit A_6 aus den Skalenzahlen $A_2 \ldots A_6$, diejenigen zur Zeit B_1 und B_5 aus den Skalenzahlen $B_1 \ldots B_5$, u. s. w. Somit wurden die Ruhelagen zu demselben Zeitpunkt (abgesehen von dem angedeuteten kleinen Interval) mit und ohne Druck gefunden.

Was diese Berechnung angeht, so habe ich zuerst geglaubt eine gleichmäßige Bewegung der Ruhelage während der 4 halben Schwingungen annehmen zu dürfen. In diesem Falle wird bei Benutzung der 3 mittleren Umkehrpunkte B_2, B_3, B_4, deren Skalenzahlen x_2, x_3, x_4 seien, die Ruhelage für den Zeitpunkt B_1 gegeben durch

$$a = \xi_2 - (\xi_3 - \xi_2)\left\{\frac{2+p}{1+p} - \frac{\sin 2\varphi}{\pi}\right\} + \frac{(\xi_3 - \xi_2)^2}{\eta_2 + \eta_3} \frac{(1+p)^2\,(p^3+p^2-1)}{p^3\,\pi^2},$$

und für den Zeitpunkt B_5 durch

$$b = \xi_3 + (\xi_3 - \xi_2)\left\{\frac{1+2p}{1+p} + \frac{\sin 2\varphi}{\pi}\right\} + \frac{(\xi_3 - \xi_2)^2}{\eta_2 + \eta_3} \cdot \frac{(1+p)^2\,(1+p-p^3)}{p^3\,\pi^2},$$

wo p das durch besondere Beobachtung zu bestimmende Dekrementsverhältnis für eine halbe Schwingung,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\pi} \lg \operatorname{nat} p,$$

$$\xi_2 = \frac{p x_2 + x_3}{1+p}, \quad \xi_3 = \frac{p x_3 + x_4}{1+p}, \quad \eta_2 = x_3 - x_2, \quad \eta_3 = x_3 - x_4 \text{ ist.}$$

Die Bestimmung von p geschah bei einer besonders langsamen Fortrückung der Ruhelage durch Schwingungsbeobachtungen, wobei die Schwingungen durch äußere, mit einem geriebenen Hartgummistück hervorgebrachte elektrische Störungen bewirkt wurde. [Warum diese Störung nicht auf piëzoelektrische Wege geschehen konnte, sieht man weiter unten]. Indem man successive Umkehrspunkte x_1 x_2 ... beobachtet, und die Differenzen

$$x_2 - x_1 = \eta_1, \quad x_2 - x_3 = \eta_2, \quad x_4 - x_3 = \eta_3, \quad x_4 - x_5 = \eta_4, \quad \text{u. s. w.}$$

setzt, berechnet man

$$p = \frac{\eta_2 + \eta_3}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{\eta_3 + \eta_4}{\eta_2 + \eta_3} = \cdots$$

Diese Beobachtung zur Bestimmung von p darf nicht, um etwa die Ruhelage festzuhalten, bei zur Erde abgeleiteten beiden Quadrantenpaaren geschehen, sondern unter denselben Umständen wie bei den Hauptbeobachtungen: p kam bedeutend kleiner heraus, wenn die beiden Quadrantenpaare zur Erde abgeleitet sind, als wenn eines isoliert ist. Es hing auch von der Kapazität des mit dem isolierten Paar verbundenen Systems ab: in früheren Beobachtungen war es durchschnittlich = 0,470 oder 0,480 je nachdem die Entfernung der Kondensatorplatten 1 mm oder 2 mm betrug, in späteren war es 0,560 resp. 0,573. Es hing ferner bei demselben Leitersystem von der Lage der Nadel ab; die Differenz war nicht immer dieselbe; sie betrug 0,015 bis 0,03, meistens ca. 0,02, für 50 cm Differenz auf der Skala, welche vom Elektrometer ca. 3,5 m entfernt war, und war kleiner nach der + Seite. Durch vorläufige Experimente wurde gefunden, daß p linear mit der Schwingungsmittellage variierte. Gleich vor oder nach jeder Serie von Beobachtungen wurde p für zwei verschiedene Stellen der Skala bestimmt, und seine so gefundenen Werte bei der Berechnung der Serie benutzt. Diese Berücksichtigung des Unterschiedes in p wurde trotz des in anderen Hinsichten ungenauen Charakters der Experimente vorgenommen, um den Verlauf der Ruhelage möglichst genau zu untersuchen, einmal weil er sich nicht ganz so einfach erwies, wie zuerst vermutet wurde, dann aber, weil es wünschenswert war, zu untersuchen, ob die Abweichungen der Resultate nicht etwa von der Unsicherheit der elektrometrischen Beobachtungs- und Berechnungsmethode herstammten.

Die Fortbewegung der Ruhelage gleich nach dem Anlegen oder Abnehmen des Gewichtes fand keineswegs immer mit gleichmäßiger Geschwindigkeit statt, wie es bei Schwingungen zur Be-

stimmung von p der Fall war, sondern sie rückte zuerst rasch dann immer langsamer zurück, d. h. nach der bisherigen Ruhelage zu, ebenso, als ob sie sich einer bestimmten Lage (welche sich selber auch verhältnismäßig langsam und gleichmäßig fortbewegen konnte) asymptotisch näherte. Diese Bewegung, die ich der Kürze halber „parabolisch" bezeichnen möchte, trat in einigen Fällen sehr stark, in anderen nur ganz wenig auf. Zuweilen hatte es den Anschein, als ob die Ruhelage sowohl nach dem Gewichtsanlegen, wie auch nach dem Abnehmen ein und derselben mittleren Lage sich näherte und im Laufe von einigen Schwingungen dieselbe beinahe erreichte. Es lag die Vermutung nahe, daß diese Erscheinung von einer Leitung — jedenfalls über die paraffinierten Krystallflächen — käme. Eine unvollkommene Isolierung würde natürlich eine der beschriebenen ähnliche Erscheinung zur Folge haben, wahrscheinlich aber ohne das Fortrücken der mittleren Lage, welche ziemlich konstant an der Stelle bleiben würde, wo die erwähnte Leitung und die Erregung durch die Temperaturänderung sich gegenseitig kompensiert hätten. Man konnte indessen unterscheiden, ob die Erscheinung wirklich von Leitung herkam, indem man dem isolierten Systeme nicht durch piëzoelektrische Erregung sondern aus einer äußeren Quelle (etwa mit einem geriebenen Hartgummistück) Elektrizität erteilte. Es kamen natürlich auch Fälle vor, wo die Isolierung sich wirklich schlecht erwies, aber in meisten Fällen blieb bei äußeren Erregungen die „parabolische" Bewegung aus, wie es das Beispiel A, S. 16 aus Beobachtungsserie 7 zeigt. Hier haben sich die Ruhelagen zum Ende jedes Schwingungsstadiums nicht nur einer gemeinsamen, langsam fortrückenden Mittellage genähert, sondern sie sogar überschritten, oder sozusagen sich gekreuzt. Dabei zeigen die gleich vorher und nachher vorgenommenen Schwingungsbeobachtungen mit Erregung von außen so gut wie keine Leitung: in der Nähe von 20 hat die Ruhelage sich sogar von der Nulllage (49,1) noch weiter entfernt. Das alles weist darauf hin, daß die Ursache der genannten Bewegung nicht in einer schlechten Isolierung zu suchen ist. Dieses Verhalten war manchmal sehr veränderlich: mit demselben Krystall, ohne daß man an den Belegungen irgend etwas geändert hätte, kam nach einiger Zeit die zweite Differenz von ξ sehr verschieden heraus wie vorher.

Indessen scheint die „parabolische" Fortrückung ziemlich reduziert werden zu können, wenn man die Paraffinschicht hinter den Stanniolbelegungen möglichst entfernt, obwohl sie überhaupt

Beisp. A.

Umkehrpunkte x	ξ	$\Delta\xi$
* 44,40		
36,09	38,79	+4,81
47,20	43,60	+1,58
44,27	45,18	+ ,68
*{46,57	45,86	
53		
54,78	52,12	−5,33
42,96	46,79	−2,00
. 45,61	44,79	−1,08
*{42,85	43,71	
86		
34,62	37,31	+4,94
45,92	42,25	+1,65
43,00	43,90	+ ,76
* 45,40	44,66	
53,53	50,91	−5,32
41,79	45,59	−2,01
44,38	43,58	−1,05
*{41,68	42,53	
69		
33,45	36,14	+4,88
44,67	41,02	+1,64
41,75	42,66	+ ,61
* 44,10	43,27	

Zur Bestimmung von p

Umkehrpunkte	ξ
59,48	
41,50	47,33
50,00	47,24
45,85	47,20
47,75	47,13
46,74	47,07
47,12	47,00
12,45	
24,61	20,60
18,39	20,45
21,17	20,25
19,50	20,05
20,05	19,87

nie eine beträchtliche Dicke, wahrscheinlich nicht einmal $^1/_{20}$ mm erreichte. Diese Tatsache scheint auf eine elektrische Nachwirkung in Paraffin hinzudeuten; ganz erklärlich aber ist mir die Sache doch nicht geworden.

Da nun die Fortrückung gleich nach der Druckänderung nicht gleichmäßig vor sich ging, so konnte man nicht die oben angeführte Formel benutzen. Es wurde deshalb eine quadratische Formel für die Fortrückung angenommen, so daß die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \alpha^2(x - a - ct - ft^2) = 0 \quad \left[\begin{matrix} t = 0 \text{ für den ersten} \\ \text{Umkehrmoment.} \end{matrix}\right]$$

lautete, und deren Lösung ist

$$x = a - \frac{2(c\beta + f)}{\alpha^2} + 8\frac{f\beta^2}{\alpha^4} + \left(c - \frac{4f\beta}{\alpha^2}\right)t + ft^2 + A\,e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\,t + \nu\right).$$

Indem man nur bis zu ersten Potenzen von $\frac{c}{A}$ und $\frac{f}{A}$ berücksichtigt, ergiebt sich für den $n$ten Umkehrpunkt

$$x_n = a - 2\left(\frac{c}{\alpha}\sin\varphi + \frac{f}{\alpha^2}\right) + 8\,\frac{f}{\alpha^2}\sin^2\varphi + \left(\frac{c}{\alpha} - \frac{4f\sin\varphi}{\alpha^2}\right)\frac{n\pi}{\cos\varphi}$$
$$+ \frac{f n^2\pi^2}{\alpha^2\cos^2\varphi} + (-1)^n\cos\varphi\, p^n\left(A + \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{c}{\alpha} - \frac{4f\sin\varphi}{\alpha^2}\right)\right),$$

wo p und φ dieselben Bedeutungen haben wie vorher, d. h. $\sin\varphi = \beta/\alpha$, $p = e^{-\pi\operatorname{tg}\varphi}$. Aus $x_1 \ldots x_4$ läßt sich die Ruhelage für $t = 0$ d. h. a folgendermaßen berechnen: —

$$a = \xi_1 - \left(\frac{1}{1+p} - \frac{\sin 2\varphi}{\pi}\right)\Delta\xi_1$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{1+p}\right)^2 - \frac{\sin 2\varphi}{2\pi}\cdot\frac{3+p}{1+p} + \frac{\cos^2\varphi}{\pi^2}\right\}\Delta^2\xi_1;$$

ebenso aus $x_2 \ldots x_5$ die Ruhelage zum Zeitpunkt der 5. Umkehrung

$$b = \xi_4 + \left(\frac{p}{1+p} + \frac{\sin 2\varphi}{\pi}\right)\Delta\xi_3$$
$$+\left\{\left(\frac{p}{1+p}\right)^2 + \frac{\sin 2\varphi}{2\pi}\cdot\frac{1+3p}{1+p} + \frac{\cos^2\varphi}{\pi^2}\right\}\Delta^2\xi_2,$$

wo

$$\xi_1 = \frac{px_1 + x_2}{1+p},\quad \xi_2 = \frac{px_2 + x_3}{1+p},\quad \ldots,\quad \xi_4 = \frac{px_4 + x_5}{1+p},$$

$$\Delta\xi_1 = \xi_2 - \xi_1,\quad \Delta\xi_2 = \xi_3 - \xi_2, \ldots\quad \Delta^2\xi_1 = \Delta\xi_2 - \Delta\xi_1,\quad \Delta^2\xi_2 = \Delta\xi_3 - \Delta\xi_2.$$

Ich habe auch mit einer Exponentialformel $a + ct + he^{-\gamma t}$ für die Fortrückung der Ruhelage gerechnet; sie schien aber, obwohl sie eine Konstante mehr in sich hat, nicht besser den beobachteten Werten zu entsprechen, so daß ich mich für die einfachere quadratische Formel entschied. Indessen ist es aus der Natur der Bewegung selber klar, daß die obige Betrachtung nur dann der Wirklichkeit nahe kommen kann, wenn die Abweichung von der Gleichmäßigkeit, also $\Delta^2\xi$ gering ist. Bei großem $\Delta^2\xi$ wird das Resultat zu klein herauskommen, so ergab z. B. die oben angeführte Serie 7 für Z_η von II 0,034 (in den weiter unten wiedergegebenen Resultaten in ( ) eingeschlossen, und nicht weiter berücksichtigt), während eine Wiederholung, wo $\Delta^2\xi$ klein war, dafür 0,070 ergab.

Nachdem die Ruhelagen berechnet waren, mußten noch Korrektionen angebracht werden für die Kalibration der Skala. Es wurde eine in Skalenzahlen quadratische Formel angenommen:

$$V = V_{50} + a\,(x - 50) + b\,(x - 50)^2 \quad \left[\begin{array}{c}\text{50 cm war der Strich in}\\ \text{der Mitte der Skala.}\end{array}\right]$$

Wenn x_0, x_+, x_- die Skalenwerte für $V = 0$, und $\pm V_1$, entsprechend einem Normalelement, sind, so gilt für V

$$V = a\left\{x - x_0 - \frac{x_+ + x_- - 2\,x_0}{(x_+ - 50)^2 + (50 - x_-)^2}\,(x - 50)^2\right\},$$

oder, da es nur auf die Differenz ankommt,

$$V = a\left\{x - \frac{x_+ + x_- - 2\,x_0}{(x_+ - 50)^2 + (50 - x_-)^2}\,(x - 50)^2\right\},$$

wo

$$a = \frac{2\,V_1}{x_+ - x_-}\left\{1 + \frac{(x_+ + x_- - 100)\,(x_+ + x_- - 2\,x_0)}{(x_+ - 50)^2 + (50 - x_-)^2}\right\}$$

den durchschnittlichen Wert eines Skalenteils angibt. Die Korrektion für x heißt also

$$-\frac{x_+ + x_- - 2\,x_0}{(x_+ - 50)^2 + (50 - x_-)^2}\,(x - 50)^2.$$

Drei Beobachtungsreihen wurden vorgenommen besonders zu dem Zwecke, die Zuverlässigkeit der elektrometrischen Beobachtungs- und Rechnungsmethode zu prüfen; dabei wurde dieselbe elektrische Erregung in verschiedenen Skalengebieten gemessen. Um die sonst auch benutzte Berechnungsmethode zu zeigen und um einige Beispiele für die dabei vorkommenden Größen, der Fortrückung u. s. w. vorzuführen, mögen Auszüge aus ihnen folgen:

Beispiel B.

Condensatorplattendistanz = 2 mm $\quad x_0 = 49{,}25, \quad x_+ = 92{,}6, \quad x_- = 10{,}6$

$p = 0{,}5604$ für $x = 83{,}4$

$0{,}5740$ „ $x = 40{,}1$

x_n	η	p	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Korr. $()\Delta\xi$	Korr. $()\Delta^2\xi$	a, b	Korr. für Kalib.	a, b korr.	Ablenkung
* 34,4											
	25,35		50,55								
59,75				+,35							
	13,85		50,9		—,05	—	—	—	—	—	
45,9		0,570		+,3							
	8,3		51,2		—,1	+,1	—,05	51,35	,0	51,35	
54,2				+,2							
	4,4		51,4								
* { 49,8											〉17,55
49,85											
	25,05		33,95								
24,8				—,15							
	14,2		33,8		+,2	+,1	+,1	34,15	—,35	33,8	
39,0		0,576		+,05							
	8,15		33,85		+,05	+,05	0	34,0	—,35	33,65	
30,85				+,1							
	4,85		33,95								
* { 35,7											〉18,1
35,65											
	25,45		51,9								
61,1				+,3							
	13,95		52,2		—,05	—,15	0	51,75	0	51,75	
47,15		0,570		+,25							
	8,3		52,45		—,1	+,05	—,05	52,6	0	52,6	
55,45				+,15							
	4,45		52,6								
* { 51,0											〉17,6
51,25											
	25,4		35,15								
25,85				—,15							
	14,4		35,0		+,15	+,1	+,05	35,3	—,3	35,0	
40,25		0,576		0							
	8,25		35,0		+,15	+,05	+,05	35,25	—,3	34,95	
32,0				+,15							
	4,95		35,15								
* { 36,95											〉17,95
36,85											
	25,55		53,15								
62,4				+,4							
	13,9		53,55		—,15	—,2	—,05	52,9	0	52,9	
48,5		0,570		+,25							
	8,3		53,8		0	—	—	—	—	—	
56,8				+,25							
	4,35		54,05								
* 52,45											
										im Mittel	17,80

Also 17,80 in der Mittellage der Schwingungen 43.

In ähnlicher Weise ergab dieselbe Erregung
- 17,95 „ „ „ „ „ 19.
- 17,59 „ „ „ „ „ 64.
- 17,43 „ „ „ „ „ 74,5.

[ξ berechnet man direkt aus den vorhergehenden Kolumnen nach der Formel

$$\xi_n = x_{n+1} \pm \frac{p}{1+p}\eta_n,$$

wo η_n den absoluten Wert von $x_{n+1} - x_n$ darstellt, und das Doppelzeichen so zu nehmen ist, daß ξ_n zwischen x_n und x_{n+1} kommt.]

Beispiel C. (Mit größeren Korrektionen. Abgekürzt).

x_n	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	Korr. für $\Delta\xi$	Korr. für $\Delta^2\xi$	Korr. für Kalib.	a, b	Ablenkung
58,5	63,2	+,2	–,1	+,05	–,05	–,25	63,25	
65,85	63,4	+,1						
62,0	63,5							
* 64,3								16,35
88,2	79,7	– 1,8	+,95	+,95	+,35	– 1,4	79,6	
72,2	77,9	–,85	+,4	–,2	+,15	– 1,0	75,55	
79,75	77,05	–,45						
* {74,9 75,0}	76,6							16,4
52,2	60,35	+ 1,45	–,8	–,75	–,3	–,15	59,15	
67,2	61,8	+,65	–,3	+,15	–,1	–,25	62,6	
59,8	62,45	+,35						
* {64,5 64,4}	62,8							16,5
87,3	79,15	– 1,75	+1,05	+,9	+,4	– 1,35	79,1	
72,0	77,4	–,7	+ ,3	–,2	+,1	– 1,0	75,2	
79,25	76,7	–,4						
* 74,7	76,3							16,35
51,9	60,05	+ 1,5	–,8	–,8	–,3	– 0,1	58,85	
66,95	61,55	+,7	–,4	+,15	–,15	—	—	
59,6	62,25	+,3						
* 64,2	62,55							

Im Mittel	16,40	in	69.
In ähnlicher Weise	16,72	in	34.
	16,70	in	32.
	16,27	in	77.
	16,49	in	49.
Die dritte Versuchsserie ergab	16,18	in	44.
	16,23	in	26.
	15,66	in	80.
	15,96	in	68.

Eine reguläre Zunahme der Ablenkung nach der negativen Seite der Skala hin ist nicht zu verkennen. Wenn man die Abweichungen der jeder einzelnen Serie angehörigen Zahlen von ihrem ungefähren Mittelwert in Bruchteilen des letzteren graphisch darstellt, so entsteht das folgende Bild:

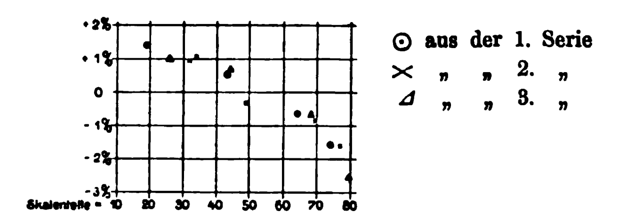


Fig. 8.

Diese Abhängigkeit der Ablenkung von dem Skalengebiete scheint auf die Verschiedenheit der Kapazität des Elektrometers je nach der Nadellage hinzuweisen, wie dies sich auch bei der Abhängigkeit von p erkennen ließ; der Sinn ist auch derselbe wie dort. Zugleich kann man aus der Regelmäßigkeit und der leidlichen Uebereinstimmung im obigen Bild der Ergebnisse der drei Serien auf die Zuverlässigkeit der benutzten elektrometrischen Methode schließen.

Es sei noch eine merkwürdig erscheinende Tatsache erwähnt: sie ist die, wovon man oben eine Aeußerung in Beispiel B sieht. In vielen Fällen waren nämlich die Ablenkungen nach + und nach − Seite nicht gleich, d. h. die Abweichung war größer, als man sie für Beobachtungsfehler halten könnte, und zwar waren diejenigen nach + fast immer (in 113 Fällen aus 120, Fälle von kleinen Differenzen einbegriffen) größer als diejenigen nach −, ohne Unterschied, ob sie beim Anlegen oder beim Abnehmen des Gewichtes geschahen. Die Differenz erreichte häufig 2% und zuweilen auch mehr. Wenn man sie etwa einer fremden, beim Druckänderungsverfahren immer in positivem Sinne einwirkenden Ursache zuschreiben will, obwohl dies bei den angewandten Schutzvorrichtungen nicht wahrscheinlich ist, so kann man sie in dem Mittelwert wenigstens der Hauptsache nach als eliminiert ansehen.

4) Die Resultate.

Es wurden 3 Präparate von der Orientierung I, 2 von II, 2 von III, und eins von IV verfertigt. Während der Behandlung, meistens beim Paraffinieren, obgleich da nur mit halbgeschmolzenem Paraffin und möglichst vorsichtig operiert wurde, sind bei vielen Exemplaren Risse entstanden; daher kamen u. a. alle drei Präparate der Sorte I gar nicht zur regelmäßigen Beobachtung. Diese Sorte wurde aber als entbehrlich betrachtet, da die damit zu bestimmenden Konstanten d_{31}, d_{32}, d_{33} aus den anderen, einmal jede alleinstehend (im Falle von d_{31} und d_{33} sogar je zweimal) und dann in Kombinationen von je zweien, also vorteilhafter als die anderen Konstanten, bestimmt werden können. Dasselbe Schicksal traf III No. 2, während mit II No. 1 und III No. 1 einmal alle Beobachtungen und nachher noch Wiederholungen in einigen Lagen, mit II No. 2 drei unten mit * bezeichnete, mit IV einmal alle drei Beobachtungen vorgenommen wurden.

Jede Beobachtungsserie, während deren der Krystall in demselben mit den Bernsteinstücken verkitteten Zustande blieb, bestand

aus 4 oder 5 Beobachtungsreihen, je nachdem eine besondere Bestimmung der Kapazität wünschenswert war oder nicht. Die vier Bestimmungen bestanden darin, daß man einmal die eine Belegung, dann die andere mit dem Elektrometer verband, und dann die Messungen in um 180° gedrehter Lage des Krystalls wiederholte. Die fünfte wurde mit der anderen Kapazität in einer der genannten vier Lagen gleich vorher oder nachher ausgeführt. Jede von diesen Versuchsreihen bestand aus 4 oder 5 Stadien, wo, wie schon erwähnt, Schwingungen abwechselnd mit und ohne Druck beobachtet wurden. In jeder Serie wurde p besonders bestimmt, und die drei Ruhelagen x_0, x_+, x_- mit dem Normalelement (Weston) beobachtet.

Der Charakter der beobachteten Zahlen und die Rechnungsmethode sind dieselben, wie oben unter Beispiel B angeführt. Bei kleineren Schwingungsamplituden wurden Zehntel mm der Skala ohne Schwierigkeit abgelesen. Die einer Versuchsreihe angehörigen Zahlen standen immer in guter Uebereinstimmung unter einander bis auf die schon erwähnten Differenzen (meistens bis zu 2 %) zwischen den positiven und negativen Erregungen.

Die vier Zahlen, die aus den vier derselben Serie angehörigen Versuchsreihen (mit derselben Kapazität) gefunden wurden, die also einzeln mit den Fehlern wegen der Exzentrizität der Druckresultante u. s. w. behaftet sein konnten, deren Mittelwerte aber davon frei sein dürften, wichen von einander mitunter erheblich ab, wie es die folgenden Beispiele zeigen: —

$$\text{Serie 1}\begin{cases}+6{,}83\\-6{,}50\\+7{,}03\\-6{,}66\end{cases}\quad\text{Serie 2}\begin{cases}-2{,}64\\+2{,}21\\-3{,}35\\+2{,}54\end{cases}\quad\text{Serie 6}\begin{cases}-24{,}96\\+24{,}36\\+25{,}05\\-24{,}67\end{cases}\quad\text{Serie 17}\begin{cases}-15{,}16\\+15{,}07\\-13{,}73\\+13{,}71\end{cases}$$

Die Vorzeichen sind dabei diejenigen der Erregung beim Druckanlegen.

Aus diesen und ähnlichen Zahlen ergaben sich die Erregungen in E. S. E. pro qcm, für den Druck 1 kg pro qcm:

im Mittel

$$\text{II.}\quad H_\xi\left[=-\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31}\right]=-0{,}0088,\ -0{,}00815,\ -0{,}0070\ =-0{,}0080$$

$$Z_\xi\left[=-\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31}\right]=-0{,}0218,\ -0{,}0149\ =-0{,}0184$$

$$\Xi_\eta\left[=-\frac{1}{2}d_{14}\right]=\ 0{,}100,\ +0{,}125\ =\ 0{,}113$$

$$\Xi_\zeta \left[= \frac{1}{2} d_{14}\right] = -0{,}114,\quad -0{,}131 \qquad = -0{,}122$$

$$\mathrm{H}_\eta \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}+d_{24})\right] = -0{,}125,\quad -0{,}147^*,\quad -0{,}1435^* \quad = -0{,}1385$$

$$\mathrm{Z}_\zeta \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}+d_{24})\right] = -0{,}124,\quad -0{,}1185,\quad -0{,}152^* \quad = -0{,}1315$$

$$\mathrm{Z}_\eta \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}-d_{24})\right] = (+0{,}034),\quad +0{,}070 \qquad = 0{,}070$$

$$\mathrm{H}_\zeta \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{32}+d_{33}-d_{24})\right] = 0{,}0506,\quad +0{,}057 \qquad = 0{,}054$$

III. $$\Xi_\xi \left[= \frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}+d_{15})\right] = 0{,}1474$$

$$\mathrm{Z}_\zeta \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}+d_{15})\right] = -0{,}1146$$

$$\Xi_\zeta \left[= \frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}-d_{15})\right] = -0{,}0704,\quad -0{,}074 = -0{,}072$$

$$\mathrm{Z}_\xi \left[= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(d_{31}+d_{33}-d_{15})\right] = 0{,}057$$

$$\mathrm{H}_\xi \left[= \frac{1}{2} d_{25}\right] = -0{,}177$$

$$\mathrm{H}_\zeta \left[= -\frac{1}{2} d_{25}\right] = 0{,}1672,\quad 0{,}193 = 0{,}180$$

$$\Xi_\eta \left[= \frac{1}{\sqrt{2}} d_{32}\right] = 0{,}0314$$

$$\mathrm{Z}_\eta \left[= -\frac{1}{\sqrt{2}} d_{32}\right] = -0{,}0487$$

IV. $$\mathrm{Z}_\xi \left[= -\frac{1}{2}(d_{31}+d_{32}+d_{36})\right] = -0{,}0608$$

$$\mathrm{Z}_\eta \left[= -\frac{1}{2}(d_{31}+d_{32}-d_{36})\right] = -0{,}0234$$

$$\mathrm{Z}_\zeta \left[= -d_{33}\right] = -0{,}0647.$$

Die in [ ] eingeklammerten Ausdrücke geben die theoretischen Werte der respektiven Erregungen bei der Abwesenheit der Orientierungsfehler der Würfelflächen an. Ein Urteil über den Genauigkeits- oder vielmehr Ungenauigkeitsgrad der Beobachtungen kann man sich bilden durch Vergleichung der Zahlen, die derselben Lage

desselben Präparates entsprechen, also — 0,0088, 0,00815, 0,0070; 0,0218, 0,0149; 0,100, 0,125; 0,114, 0,131; 0,147, 0,1435; 0,124, 0,1185; 0,0506, 0,057; 0,0704, 0,074; 0,1672, 0,193. Die Abweichungen betragen, mit Ausnahme eines einzigen Falles, ca. 10 bis 20 %. Dieser Prozentsatz wird also als maßgebend für den ungefähren Genauigkeitsgrad gelten können. Was die mögliche Ursache dieser Ungenauigkeit angeht, so kann sie nicht in der elektrometrischen Beobachtungsmethode liegen, welche, wie oben ausführlich erwähnt, eine Zuverlässigkeit bis zu einem Bruchteil eines Prozentes haben dürfte. Fehler aus verschiedenen anderen Quellen sind durch die Wiederholungen in geänderten Lagen aus dem Mittelwert, wenigstens dem Hauptteile nach, eliminirt worden. Es bleibt nur der Einfluß der Ungleichmäßigkeit des Druckes übrig, welche bei jeder neuen Paraffinkittung eine andere sein konnte; in der Tat sind die obigen, ein und dieselbe Lage des Krystalls bezüglichen Zahlen jedesmal nach erneuter Paraffinkittung ermittelt worden. Wenn man die Beobachtung mit derselben Kittung wiederholt hätte, so hätte man lauter sehr gut übereinstimmende Werte bekommen, wie es die zu einer Versuchsreihe gehörigen Zahlen tun.

Was die Abweichungen der Zahlen, die bei II und III paarweise neben denselben eingeklammerten Ausdrücken stehen, angeht, so rühren sie teils von der allgemeinen, oben angeführten Ungenauigkeit, teils aber von den Orientierungsfehlern der Flächen der Präparate her. So wurden im besonderen H_ξ und Z_ξ von II wegen ihrer auffallend großen Differenz, sorgfältig wiederholt beobachtet, und die Verschiedenheit hat sich bestätigt. Will man diese Differenz mit den Orientierungsfehlern erklären, so hat man zu setzen

$$H_\xi = -D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31} - d_{31}q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{25}p_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}p_2\right\},$$

$$Z_\xi = -D\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}d_{31} + d_{31}r_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}d_{25}p_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{36}p_2\right\}.$$

Da nun von den hierin vorkommenden Konstanten d_{25} bedeutend größer als die anderen ist, so wird die genannte Erklärung hauptsächlich in den Gliedern $\frac{1}{\sqrt{2}}d_{25}p_3$ zu suchen sein. Die Differenz ist

$$H_\xi - Z_\xi = 0{,}0104 = -\sqrt{2}\,d_{25}.p_3 = -0{,}505\,p_3.$$

Danach wäre $p_3 = -0{,}02$; also, eine Abweichung von ca. 1° in der Orientierung genügt schon, den großen Unterschied zwischen

$H_\xi = -0{,}0080$ und $Z_\xi = -0{,}0184$ zu erklären. Diese Ansicht findet auch dem Sinne und der Größenordnung nach eine Bestätigung in der Beobachtung von Ξ_ξ, welches theoretisch $= -(d_{31} + d_{15})p_3$ $= -0{,}3p_3$ für $D = 1$ ist, und welches $= +0{,}003$ beobachtet wurde. Nach diesem wäre $p_3 = -0{,}01$.

Der verhältnismäßig große Unterschied zwischen den beiden Werten für Z_ξ desselben Präparates scheint sich auch in derselben Weise erklären zu lassen: eine kleine Abweichung vom Parallelismus der gekitteten Flächen (ξ-Fläche des Krystalls und der Fläche des unteren Bernsteinstückes), namentlich in der Richtung der Symmetrieaxe, verursacht, wegen des großen Koeffizienten $\frac{1}{\sqrt{2}}\,d_{25}$ eine verhältnismäßig große Abweichung in dem beobachteten Z_ξ.

Eine ähnliche Betrachtung kann man über Ξ_η und Z_η von III (Beobachtungen zur Ermittelung von d_{32}) anstellen, wo d_{14} ihre absoluten Werte in entgegengesetzten Richtungen beeinflußt.

Die von Herrn Voigt aufgestellte Theorie ruht einzig und allein auf den Symmetrieeigenschaften der Krystalle, folglich ist an ihrer Richtigkeit nicht zu zweifeln und die geringe Uebereinstimmung nicht gegen sie zu verwerten. In der Tat wurden auch in den Lagen, wo nach der Theorie keine elektrische Erregung vorhanden sein sollte, nur ganz kleine Erregungen beobachtet, welche von verschiedenen Nebenumständen hervorgebracht werden konnten.

Indem man im 2. Teil angedeutete Berechnung ausführt, erhält man

aus II $d_{31} = 0{,}0187$, $d_{14} = -0{,}235$, $d_{24} = 0{,}279$, $d_{32}+d_{33} = 0{,}103$
aus III $d_{32} = 0{,}0567$, $d_{25} = -0{,}357$, $d_{15} = 0{,}277$, $d_{31}+d_{33} = 0{,}094$
aus IV $d_{33} = 0{,}0647$, $d_{36} = 0{,}0374$, $d_{31}+d_{32} = 0{,}0842$.

Um aus den auf d_{31} d_{32} d_{33} bezüglichen sechs Beobachtungsgleichungen ihre besten Werte zu bekommen, habe ich den wahrscheinlichen Fehler jedes einzelnen, direkt von der Beobachtung abgeleiteten Wertes als diesem selbst proportional angenommen, was wenigstens in Anbetracht der unsicheren „parabolischen" Fortrückung der Ruhelage seine Rechtfertigung finden dürfte, und bin zu folgendem Endresultat gelangt: —

$$d_{31} = 0{,}0192,\quad d_{14} = -0{,}235,\quad d_{15} = 0{,}277,$$
$$d_{32} = 0{,}0583,\quad d_{24} = 0{,}279,\quad d_{25} = -0{,}357,$$
$$d_{33} = 0{,}0633,\quad d_{36} = 0{,}0374.$$

Um die ganze piëzoelektrische Wirkung zu veranschaulichen, kann man die Konstanten nach den im Eingang gegebenen Formeln für A, B, C in drei Gruppen teilen:

1) d_{33} allein, was keine weitere Erklärung erfordert.

2) d_{31}, d_{32}, d_{36}. Für diese Gruppe denke man sich einen Würfel, dessen Belegungsflächen $\perp$ zur Symmetrieaxe liegen, und dessen zu den erstern senkrechte Druckflächen mit der Spaltfläche einen variierenden Winkel φ machen mögen. Die Erregung pro Druckeinheit $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$ ist am analogen Pol

$$C = -(d_{31} \cos^2 \varphi + d_{32} \sin^2 \varphi + d_{36} \sin \varphi \cos \varphi)$$
$$= -0{,}0388 + 0{,}0271 \cos (2\varphi + 44^\circ).$$

$-C$ variiert also umgekehrt wie das Quadrat des in der Richtung φ gezogenen Radius Vektors der Ellipse $d_{31} x^2 + d_{32} y^2 + d_{36} xy =$ const. Extreme Werte von $-C$ sind

$$-C_1 = 0{,}0177 \text{ für } \varphi_1 = -22^\circ,$$

und

$$-C_2 = 0{,}0659 \text{ für } \varphi_2 = +68^\circ.$$

Uebrigens ist $-C$ als Funktion von φ in Fig. 4 wiedergegeben. Der punktierte Kreis stellt zum Vergleich die Erregung $-C$ dar, die der parallel der Symmetrieaxe wirkende Druck 1 hervorbringt.

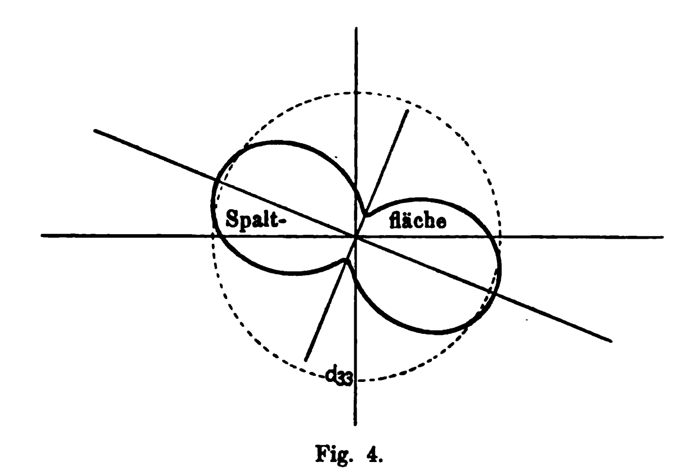


Fig. 4.

3) d_{14}, d_{24}, d_{15}, d_{25}. Für diese Gruppe denke man sich einen geraden Zylinder parallel der Symmetrieaxe, an dessen Endflächen tangentiale entgegengesetzt gerichtete gleichmäßige Kräfte je von 1 kg pro qcm, und zwar an die analoge Fläche in einer gegen

Druckes, welcher die Intensität 1 haben mag, gilt, indem man in dem am Eingang angegebenen Ausdrucke für B_α, α_λ für β_λ schreibt,

$$-A_\alpha = \alpha_3\{(d_{31}+d_{15})\alpha_1^2+(d_{32}+d_{24})\alpha_2^2+(d_{14}+d_{25}+d_{36})\alpha_1\alpha_2+d_{33}\alpha_3^2\}$$

oder, wenn man die Werte für die $d_{h\lambda}$ und $\alpha_1 = \sin\vartheta\cos\varphi$, $\alpha_2 = \sin\vartheta\sin\varphi$, $\alpha_3 = \cos\vartheta$ setzt,

$$-A_\alpha = 0{,}0633\cos\vartheta+\sin^2\vartheta\cos\vartheta\{0{,}254-0{,}279\sin(2\varphi+4^\circ)\}.$$

Man denke sich eine gekrümmte Fläche, deren Radius-Vektor $= -A_\alpha$ ist. Ihre Schnittkurve durch $\varphi = \text{const.}$ hat die Gestalt

$$r = (a+b\sin^2\vartheta)\cos\vartheta,$$

wo $a = \text{const} = 0{,}0633$ und b von $0{,}533$ für $\varphi = -47^\circ$ bis $-0{,}025$ für $\varphi = 43^\circ$ variiert. Die Fläche ist übrigens symmetrisch in Bezug auf diese beiden Meridianebenen.

r erreicht sein Maximum

$$r_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}} \quad \text{für} \quad \cos\vartheta_1 = \sqrt{\frac{a}{3b}+\frac{1}{3}},$$

$r_1 = 0{,}243$, und $\vartheta_1 = 52^\circ{,}5$ für $b = 0{,}533$ d. h. für $\varphi = -47^\circ$; sie nehmen beide stetig ab mit abnehmendem b, bis schließlich $r_1 = a$, $\vartheta_1 = 0$ für $b = \frac{a}{2}$, d. h. für $\varphi = 24^\circ{,}5$ wird.

Der höchste Punkt (r_2, ϑ_2) der Schnittkurve wird gegeben durch $\cos 2\vartheta_2 = \frac{a}{b}$ und $r_2\cos\vartheta_2 = \frac{(a+b)^2}{4b}\cdot$ $r_2\cos\vartheta_2 = 0{,}167$ und $\vartheta_2 = 41^\circ{,}5$ für $b = 0{,}533$ ($\varphi = -47^\circ$); sie nehmen stetig ab mit abnehmendem b, bis $r_2 = a$, $\vartheta_2 = 0$ für $b = a$, d. h. $\varphi = 19^\circ{,}5$.

Die Projektion der Fläche auf die zur Symmetrieachse senkrechte Ebene läßt sich nicht einfach ermitteln. Da $r\sin\vartheta = \text{Max.}$ für gegen a große b bei $\vartheta = 60^\circ$, für $b = 0$ bei $\vartheta = 45^\circ$ stattfindet, und da in dieser Nähe $r\sin\vartheta$ nur wenig mit ϑ variiert, so bekommt man die ungefähre Form der Projektion, indem man $\vartheta = \text{const} = \text{etwa } 55^\circ$ setzt. Dann wird

$$-A_\alpha\sin\vartheta = 0{,}110-0{,}088\sin(2\varphi+4^\circ).$$

Somit wird die das erregte negative Moment darstellende Fläche folgendermaßen aussehen:

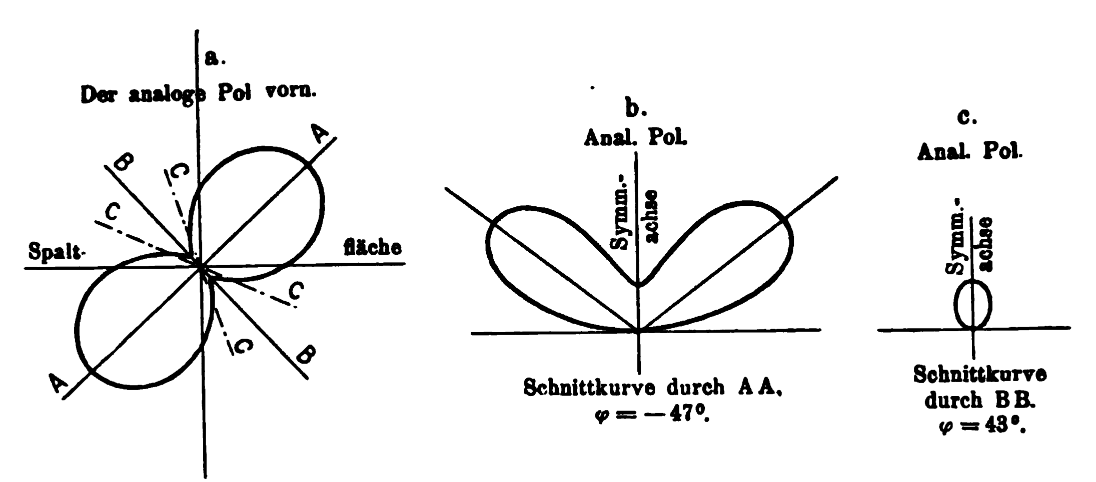


Fig. 6.

Die Krümmung der Meridiankurve am oberen Mittelpunkt wechselt ihr Vorzeichen bei *CC*, *CC* ($\varphi = 19^{\circ},5$ resp. $66^{\circ},5$).

Die größte longitudinale Erregung ist $-0{,}243$ und findet statt in der Richtung $\varphi = -47^{\circ}$, $\vartheta = 52^{\circ},5$, wo ϑ von der nach dem analogen Pol hin gezogenen Symmetrieaxe gerechnet ist.

Was die transversale Erregung angeht, so erreicht sie im Maximum dieselbe Größenordnung, wie die longitudinale, fällt aber etwas kleiner aus als diese. Denn die Konstanten $d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}$ bewirken für die Druckrichtung (φ, ϑ) unter der Annahme $\frac{d_{14}}{d_{15}} = \frac{d_{14}}{d_{25}} = -\operatorname{tg}\lambda$ ($\lambda = 38^{\circ}\,55'$) und $d_{15} = d_{24}$ ein Moment

$$R = \frac{d_{15}}{\sin\lambda\cos\lambda}\sin 2\vartheta\cos(\varphi+\lambda)$$

in der Aequatorialebene in der Richtung $\varphi = 90^{\circ} + \lambda$. Man kann dabei, ohne die Allgemeinheit zu verlieren, nur den Bereich $0 < \vartheta < 90^{\circ}$, $-90^{\circ} < \varphi + \lambda < 90^{\circ}$ ins Auge fassen, wofür R positiv ausfällt. Die anderen Konstanten bewirken eine Erregung P in der $-Z$-Richtung nach dem neben Fig. 4 Gesagten, nur mit Multiplikation der auf d_{33} bezüglichen mit $\cos^2\vartheta$ und der auf die anderen d bezüglichen mit $\sin^2\vartheta$. Für die der größten transversalen Erregung entsprechende Druckrichtung, welche, in Anbetracht des großen d_{15} gegen die anderen d nur in der Nähe der dem größten R entsprechenden Richtung, d. h. in der Nähe von $\vartheta = 45^{\circ}$, $\varphi = -\lambda$ zu suchen ist, wirkt das Moment P teilweise zerstörend auf das Aequatorialmoment R, wenn man die trans-

versale Erregung (in der Ebene von R und der Druckrichtung) in Betracht zieht, während für die longitudinale Erregung die beiden in demselben Sinne wirken.

Ich benutze diese Gelegenheit, Herrn Prof. Voigt, unter dessen Anregung, wie gesagt, die vorgehende Untersuchung unternommen wurde, meinen aufrichtigen Dank auszudrücken für seine wertvollen Ratschläge und für sein freundliches Entgegenkommen, womit er mir die verschiedenen Apparate zur Verfügung stellte.

Göttingen, Februar 1905.

Zur Variationsrechnung.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

Die Frage nach der Notwendigkeit des Lagrangeschen Kriteriums d. h. des Bestehens der durch das Verschwinden der ersten Variation bedingten Differentialgleichungen ist insbesondere von *A. Mayer*[1]) und *A. Kneser*[2]) behandelt worden. Ich möchte hier einen strengen und zugleich übersichtlichen Weg angeben, der zu dem gewünschten Nachweise für die Notwendigkeit des Lagrangeschen Kriteriums führt.

Der Einfachheit halber nehme ich überall in der vorliegenden Mitteilung die gegebenen Funktionen und Differentialbeziehungen analytisch an, wodurch zugleich der analytische Charakter der zur Verwendung kommenden Lösungen gewährleistet ist.

Wir wählen ferner der angenehmeren Darstellung wegen — die Allgemeinheit der Methode wird dadurch nicht beeinträchtigt — den Fall dreier gesuchter Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ der unabhängigen Veränderlichen x; zwischen ihnen und ihren ersten nach x genommenen Ableitungen

$$\frac{dy}{dx} = y'(x), \quad \frac{dz}{dx} = z'(x), \quad \frac{ds}{dx} = s'(x)$$

seien zwei Bedingungen von der Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(y', z', s', y, z, s; x) &= 0, \\ g(y', z', s', y, z, s; x) &= 0 \end{aligned}$$

1) Math. Ann. Bd. 26.

2) Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900 § 56—§ 58. Daselbst ist jedenfalls zuerst das Problem und seine Lösung in voller Allgemeinheit formulirt und in Angriff genommen worden.

vorgelegt. Alsdann kommt es darauf an, den folgenden Satz zu beweisen:

Es mögen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ drei besondere den Bedingungen (1) genügende Funktionen von folgender Beschaffenheit bezeichnen: für alle zwischen $x = a_1$ und $x = a_2$ liegenden Werte von x falle

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'}, & \frac{\partial f}{\partial z'} \\ \frac{\partial g}{\partial y'}, & \frac{\partial g}{\partial z'} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

aus; wählen wir irgend drei andere ebenfalls den Bedingungen (1) genügende Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$, für die

$$\begin{aligned} Y(a_1) &= y(a_1) \\ Z(a_1) &= z(a_1), \quad Z(a_2) = z(a_2) \\ S(a_1) &= s(a_1), \quad S(a_2) = s(a_2), \end{aligned}$$

gilt, so sei — vorausgesetzt, daß die Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$ nebst ihren Ableitungen bez. von jenen besonderen Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ und deren Ableitungen hinreichend wenig verschieden sind — stets

$$Y(a_2) \geqq y(a_2); \tag{3}$$

ist diese Minimalforderung erfüllt, so gibt es notwendig zwei Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$, die nicht beide identisch für alle x verschwinden und die zusammen mit den Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ die aus dem Nullsetzen der ersten Variation des Integrals

$$\int_{a_1}^{a_2} \{\lambda f(y', z', s', y, z, s;\ x) + \mu g(y', z', s', y, z, s;\ x)\}\, dx$$

entspringenden Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} = 0 \tag{6}$$

erfüllen.

Um den Nachweis dieses Satzes zu führen, nehmen wir irgend zwei bestimmte Funktionen $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, die für $x = a_1$ und $x = a_2$

verschwinden, und setzen in (1) an Stelle von y, z, s bez.

$$Y = Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$
$$Z = Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$
$$S = s(x) + \varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x)$$

ein, wo ε_1, ε_2 zwei Parameter bedeuten. Die so entstehenden Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} f(Y', Z', S', Y, Z, S; x) &= 0, \\ g(Y', Z', S', Y, Z, S; x) &= 0 \end{aligned}$$

fassen wir als ein System von zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung der zwei Funktionen Y, Z auf. Wie die Theorie der Differentialgleichungen lehrt [1]), giebt es wegen der Voraussetzung (2) für genügend kleine Werte von ε_1, ε_2 gewiß ein System zweier jene Gleichungen identisch in x, ε_1, ε_2 erfüllenden Funktionen

$$Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ und } Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

die für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ bez. in $y(x)$, $z(x)$ übergehen und ferner für $x = a_1$ bei beliebigen ε_1, ε_2 bez. die Werte $y(a_1)$, $z(a_1)$ annehmen.

Da wegen unserer Minimumsforderung (3) $Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ als Funktion von ε_1, ε_2 gewiß für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ ein Minimum haben muß, während zwischen ε_1, ε_2 die Gleichung

$$Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_2)$$

besteht, so lehrt die Theorie des relativen Minimums einer Funktion zweier Veränderlicher, daß es notwendig zwei Konstante l, m geben muß, die nicht beide Null sind, und für welche

$$(8) \qquad \begin{aligned} \left[\frac{\partial(lY(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + mZ(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 &= 0, \\ \left[\frac{\partial(lY(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + mZ(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 &= 0 \end{aligned}$$

wird, wobei jedesmal der Index 0 bedeutet, daß beide Parameter ε_1, ε_2 null zu setzen sind.

Wir bestimmen nunmehr, was wegen (2) gewiß möglich ist, zwei Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ der Veränderlichen x, die den beiden für sie linearen, homogenen Differentialgleichungen (4), (5) genügen und für die an der Stelle $x = a_2$ die Randbedingungen

1) Vgl. É. Picard, Traité d'Analyse t. III, Ch. VIII.

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]_{x=a_2} &= l, \\
\left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\right]_{x=a_2} &= m
\end{aligned}
$$

gelten. Da l, m nicht beide null sind, so verschwinden auch die beiden so bestimmten Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ gewiß ebenfalls nicht identisch.

Durch Differentiation der Gleichungen (7) nach ε_1, ε_2 und nachheriges Nullsetzen dieser beiden Parameter erhalten wir die Gleichungen

$$
\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma_1' \frac{\partial f}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial s} = 0,
$$

$$
\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z} + \sigma_1' \frac{\partial g}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial g}{\partial s} = 0,
$$

$$
\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma_2' \frac{\partial f}{\partial s'} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial s} = 0,
$$

$$
\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z} + \sigma_2' \frac{\partial g}{\partial s'} + \sigma_2 \frac{\partial g}{\partial s} = 0,
$$

wobei wiederum jedesmal der Index 0 bedeutet, daß beide Parameter ε_1, ε_2 null zu setzen sind. Von diesen Gleichungen werden einerseits die erste und zweite bez. mit λ, μ multiplizirt, die entstehenden Gleichungen addirt und dann zwischen den Grenzen $x = a_1$, $x = a_2$ integrirt; andererseits werden die dritte und vierte Gleichung bez. mit λ, μ multiplizirt und die entstehenden Gleichungen addirt und dann zwischen den Grenzen $x = a_1$ und $x = a_2$ integrirt. Dadurch erhalten wir

$$
(10) \qquad \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} \left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y} \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z} \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} \sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s} \sigma_1 \right\} dx = 0,
$$

$$
(10) \quad \begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \Bigg\{ \left[\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\right]_0 \left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \right. \\ + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_2 \Bigg\} dx = 0. \end{aligned}
$$

Nun haben wir einerseits wegen der getroffenen Bestimmungen

$$
Y(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y(a_1), \quad Z(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_1)
$$

und daher für die Stelle $x = a_1$

$$
\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0,
$$

$$
\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0;
$$

andererseits entnehmen wir aus den Gleichungen (8) und (9) für die Stelle $x = a_2$

$$
\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0,
$$

$$
\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'}\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'}\left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0.
$$

Mit Rücksicht hierauf folgen aus (10) und vermöge (4), (5) mittelst der Formel für die Integration eines Produktes (partieller Integration) die Gleichungen:

$$
\int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_1 \right\} dx = 0,
$$

$$
\int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'}\sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma_2 \right\} dx = 0.
$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$
(\lambda\mu, \sigma) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{ds'}\sigma' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s}\sigma \right\} dx,
$$

so können wir das eben erhaltene Resultat wie folgt aussprechen: Für irgend zwei in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindende Funktionen σ_1, σ_2 giebt es stets ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem λ, μ der Differentialgleichungen (4), (5), so daß

$$
(\lambda\mu, \sigma_1) = 0 \text{ und } (\lambda\mu, \sigma_2) = 0
$$

ausfällt.

Nehmen wir nun an, es gäbe für dieses Lösungssystem λ, μ eine Funktion σ_3, so daß die Ungleichung

$$(11) \qquad (\lambda\mu, \sigma_3) \neq 0$$

stattfindet, so bilden wir irgend ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem λ', μ' der Differentialgleichungen (4), (5), so daß

$$(12) \qquad (\lambda'\mu', \sigma_3) = 0$$

ausfällt. Nehmen wir wiederum an, es gäbe eine Funktion σ_4, für die die Ungleichung

$$(13) \qquad (\lambda'\mu', \sigma_4) \neq 0$$

stattfindet, so können wir unser voriges Resultat auf die Funktionen σ_3, σ_4 anwenden und erkennen daraus die Existenz eines Lösungssystemes λ'', μ'' von (4), (5), derart daß die Gleichungen

$$(14) \qquad (\lambda''\mu'', \sigma_3) = 0,$$

$$(15) \qquad (\lambda''\mu'', \sigma_4) = 0$$

stattfinden. Da λ, μ; λ', μ'; λ'', μ'' Lösungen eines Systems zweier homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung sind, so müssen zwischen ihnen zwei homogene lineare Relationen von der Gestalt

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0,$$
$$a\mu + a'\mu' + a''\mu'' = 0$$

bestehen, wo a, a', a'' Konstante bedeuten, die nicht sämtlich null sind. Aus (11), (12), (14) würde dann aber notwendig $a = 0$ und sodann aus (13), (15) $a' = 0$, folgen, was nicht möglich ist, da ja nunmehr $a'' \neq 0$ ist und das Lösungssystem λ'', μ'' nicht identisch in x verschwindet.

Unsere Annahmen sind daher unzutreffend und wir schließen daraus, daß entweder λ, μ oder λ', μ' ein solches System von Lösungen von (4), (5) ist, daß die betreffende Integralbeziehung

$$(\lambda\mu, \sigma) = 0 \text{ bez. } (\lambda'\mu', \sigma) = 0$$

für jede Funktion σ gilt. Die Anwendung der Produktintegration (partielle Integration) auf diese Beziehung zeigt dann, daß für das Lösungssystem λ, μ bez. λ', μ' notwendig die Gleichung (6) gelten muß und damit ist der gewünschte Nachweis vollständig erbracht.

In meinem Vortrage[1]) „Mathematische Probleme" habe ich zur Aufstellung der weiteren notwendigen und hinreichenden Kriterien in der Variationsrechnung folgende Methode angegeben:

Es handle sich um das einfachste Problem der Variationsrechnung, nämlich das Problem, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, daß das Integral

$$J = \int_a^b F(y', y; x)\, dx, \quad \left[y' = \frac{dy}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt $y(x)$ andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das Integral einsetzen.

Wir betrachten nun das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p) F_p\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, y; x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

und fragen, wie darin p als Funktion von x, y zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege in der xy-Ebene, d. h. von der Wahl der Funktion y der Variabeln x unabhängig wird. Die Antwort ist: man nehme irgend eine einparametrige Schar von Integralkurven der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad [F = F(y', y; x)]$$

und bestimme in jedem Punkte x, y den Wert der Ableitung y' der durch diesen Punkt gehenden Kurve der Schaar. Der Wert dieser Ableitung y' ist eine Funktion $p(x, y)$ von der verlangten Beschaffenheit.

Aus diesem „Unabhängigkeitssatze" folgen nicht nur unmittelbar die bekannten Kriterien für das Eintreten des Minimums, sondern auch alle wesentlichen Tatsachen der Jacobi-Hamiltonschen Theorie des zugehörigen Integrationsproblems.

Für den Fall mehrerer Funktionen hat *A. Mayer*[2]) den entsprechenden Satz durch Rechnung bewiesen und seinen Zusammen-

1) Gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

2) Math. Ann. Bd. 58.

hang mit der Jacobi-Hamiltonschen Theorie dargelegt. Im folgenden möchte ich zeigen, daß der Unabhängigkeitssatz noch einer allgemeineren Fassung fähig ist und auch ohne Aufwand von Rechnung, nämlich durch Zurückführung auf den soeben angegebenen und in meinem Vortrag erledigten Spezialfall sehr einfach bewiesen werden kann.

Der leichteren Faßlichkeit wegen lege ich nur zwei Funktionen $y(x), z(x)$ zu Grunde; das Variationsproblem bestehe darin, diese so zu wählen, daß das Integral

$$J = \int_a^b F(y', z', y, z;\, x)\, dx, \quad \left[y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt $y(x), z(x)$ andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten einsetzen.

Wir betrachten nun das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p) F_p + (z' - q) F_q\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, q, y, z;\, x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, q, y, z;\, x)}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F(p, q, y, z;\, x)}{\partial q}\right]$$

und fragen, wie darin p, q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege im xyz-Raume, d. h. von der Wahl der Funktionen $y(x)$, $z(x)$ unabhängig wird.

Um diese Frage zu beantworten, wählen wir im xyz-Raume eine beliebige Fläche $T(x, y, z) = 0$ und denken uns auf derselben die Funktionen p, q derart bestimmt, daß das Integral J^*, wenn wir dasselbe zwischen zwei Punkten der Fläche $T = 0$ über irgend eine auf $T = 0$ gelegene Kurve erstrecken, einen von der Wahl dieser Kurve unabhängigen Wert erhält. Alsdann konstruiren wir durch jeden Punkt P der Fläche $T = 0$ diejenige im xyz-Raume gelegene Integralkurve der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad [F = F(y', z', y, z;\, x)]$$

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial z'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

für welche in jenem Punkte P

$$y' = p, \quad z' = q \tag{16}$$

wird, so daß auf diese Weise eine zweiparametrige, ein räumliches Feld erfüllende Schar von Integralkurven entsteht. Wir denken uns nun für jeden Punkt x, y, z dieses Feldes die hindurchgehende Integralkurve der Schar bestimmt. *Die Werte der Ableitungen y', z' in jenem Punkte x, y, z sind dann Funktionen $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ von der verlangten Beschaffenheit.*

Um diese Behauptung zu beweisen, verbinden wir einen bestimmten Punkt A der Fläche $T = 0$ mit einem beliebigen Punkte Q des räumlichen Feldes mittelst irgend eines Weges w; durch jeden Punkt dieses Weges w denken wir uns die Integralkurve unserer zweiparametrigen Schar gelegt: die so entstehende einparametrige Schar von Integralkurven werde durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= \psi(x, \alpha), \\ z &= \chi(x, \alpha) \end{aligned} \tag{17}$$

dargestellt. Diejenigen Punkte der Fläche $T = 0$, von denen diese Integralkurven (17) ausgehen, bilden ihrerseits auf der Fläche $T = 0$ einen Weg w_T, der vom Punkte A bis zu demjenigen Punkte P auf $T = 0$ führt, von dem die durch Q laufende Integralkurve der Schar ausgeht.

Durch die einparametrige Kurvenschar (17) wird eine Fläche erzeugt, deren Gleichung

$$z = f(x, y) \tag{18}$$

man erhält, wenn man aus den zwei Gleichungen (17) den Parameter α eliminirt.

Führen wir nun in F an Stelle von z die Funktion $f(x, y)$ ein und setzen

$$F\left(y', \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y', y, f(x, y);\ x\right) = \Phi(y', y;\ x),$$

so ist für jede auf der Fläche (18) gelegene Kurve

$$\int_a^b F(y', z', y, z;\ x)\, dx = \int_a^b \Phi(y', y, x)\, dx$$

Funktion des Endpunktes x, y, z im räumlichen pq-Felde dar; wir setzen

$$J(x, y, z) = \int_A^{x, y, z} \{F + (y' - p) F_p + (z' - q) F_q\} dx. \tag{25}$$

Diese Funktion befriedigt offenbar die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial x} = F - p F_p - q F_q,$$
$$\frac{\partial J}{\partial y} = F_p,$$
$$\frac{\partial J}{\partial z} = F_q.$$

Eliminiren wir hieraus die Größen p, q, so entsteht die „Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung“ erster Ordnung für die Funktion $J(x, y, z)$. Sind insbesondere bei der Konstruktion des räumlichen pq-Feldes die Werte von p, q auf $T = 0$ in der Weise bestimmt worden, daß der Integrand des Integrals J^* verschwindet, d. h. daß (24) besteht, so ist $J(x, y, z)$ diejenige Lösung jener Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung, die auf $T = 0$ verschwindet.

Denken wir uns die Fläche $T = 0$ einer zweiparametrigen Flächenschaar angehörig und bezeichnen mit a, b die Parameter dieser Schaar, so werden auch die Funktionen p, q des räumlichen Feldes und mithin auch die Funktion $J(x, y, z)$ von diesen Parametern abhängig. Die Differentiation der Gleichung (25) nach diesen Parametern a, b liefert

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_A^{x, y, z} \left\{(y' - p) \frac{\partial F_p}{\partial a} + (z' - q) \frac{\partial F_q}{\partial a}\right\} dx,$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = \int_A^{x, y, z} \left\{(y' - p) \frac{\partial F_p}{\partial b} + (z' - q) \frac{\partial F_q}{\partial b}\right\} dx,$$

und da offenbar die Integranden der Integrale rechter Hand wegen (16) beim Fortschreiten auf einer Integralkurve verschwinden, so stellen diese Integrale Funktionen von x, y, z dar, die auf jeder einzelnen Integralkurve denselben Wert annehmen, d. h. die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial a} = c,$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = d$$

sind, wenn c, d ebenso wie a, b Integrationskonstanten bedeuten, nichts anderes als die Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Diese Hinweise mögen genügen, um zu zeigen, wie unmittelbar die wesentlichen Sätze der Jacobi-Hamiltonschen Theorie aus dem Unabhängigkeitssatze entspringen.

Wenn es sich lediglich um die Frage nach den Bedingungen des Minimums eines Integrals handelt, so bedarf es nicht der angegebenen Konstruktion eines räumlichen pq-Feldes; es genügt vielmehr irgend eine einparametrige Schar von Integralkurven (17) der Lagrangeschen Gleichungen zu konstruiren, derart daß die durch sie erzeugte Fläche die variirte Kurve w enthält. Die Anwendung des Unabhängigkeitssatzes für eine Funktion in der vorhin dargelegten Weise führt alsdann zum Ziel.

Diese Bemerkung ist von Nutzen, wenn man die Methode des unabhängigen Integrals auf das Problem übertragen will, das Minimum eines Doppelintegrals zu finden, welches mehrere unbekannte Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher enthält.

Um ein solches Problem zu behandeln, bezeichnen wir mit z, t zwei Funktionen der zwei Veränderlichen x, y und suchen diese Funktionen derart zu bestimmen, daß das über ein gegebenes Gebiet Ω der xy-Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$J = \int_{(\Omega)} F(z_x, z_y, t_x, t_y, z, t; x, y)\, d\omega,$$

$$\left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad t_x = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad t_y = \frac{\partial t}{\partial y}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt z, t irgend welche andere Funktionen $\bar{z}$, $\bar{t}$ einsetzen, die auf dem Rande S des Gebietes Ω die nämlichen vorgeschriebenen Werte wie z, t besitzen. Die Lagrangeschen Gleichungen, wie sie durch das Verschwinden der ersten Variation geliefert werden, lauten in diesem Falle

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial z_y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial t_x} + \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial t_y} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Nunmehr legen wir eine bestimmte Lösung z, t der Lagrangeschen Gleichungen zu Grunde und $\bar{z}$, $\bar{t}$ sei ein irgendwie variirtes

Funktionensystem, das ebenso wie z, t die Randbedingung erfüllt. Wir bestimmen dann eine solche Funktion $S(x, y)$ der Variabeln x, y, daß die Gleichung $S(x, y) = 0$ die Randkurve von Ω in der xy-Ebene darstellt, während $S(x, y) = 1$ nur durch die Koordinaten eines einzigen Punktes innerhalb Ω erfüllt wird; endlich soll die Gleichung $S(x, y) = \alpha$, wenn α die Werte zwischen 0 und 1 durchläuft, eine Schar von Kurven darstellen, die das Innere des Gebietes Ω einfach und lückenlos ausfüllt. Sodann bestimmen wir diejenigen Funktionen

$$\begin{aligned} z &= \psi(x, y, \alpha), \\ t &= \chi(x, y, \alpha), \end{aligned} \tag{26}$$

die den Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen und auf der Kurve $S(x, y) = \alpha$ die daselbst durch das variirte Funktionensystem $\bar{z}(x, y)$, $\bar{t}(x, y)$ vorgeschriebenen Werte besitzen, so daß für $\alpha = 0$ die Funktionen (26) in die zu Grunde gelegte Lösung z, t übergehen. Diese Funktionen (26) bilden dann offenbar eine einparametrige Schar von Lösungssystemen der Lagrangeschen Gleichungen, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{z}(x, y) &= \psi(x, y, S(x, y)), \\ \bar{t}(x, y) &= \chi(x, y, S(x, y)) \end{aligned}$$

identisch in x, y erfüllt sind.

Deuten wir in dem vierdimensionalen $xyzt$-Raume die zu Grunde gelegte Lösung z, t der Lagrangeschen Gleichungen und ebenso das beliebig variirte Funktionensystem $\bar{z}, \bar{t}$ als eine zweidimensionale Fläche, so erzeugen in diesem $xyzt$-Raume die zweidimensionalen Integralflächen der einparametrigen Schaar (26) einen dreidimensionalen Raum, dessen Gleichung sich durch Elimination von α aus (26) ergibt; die Gleichung dieses dreidimensionalen Raumes sei von der Gestalt

$$t = f(x, y, z).$$

Wir nehmen an, daß die einparametrige Schar (26) diesen dreidimensionalen Raum einfach und lückenlos ausfüllt.

Führen wir in F an Stelle von t die Funktion $f(x, y, z)$ ein und setzen

$$\begin{aligned} F\left(z_x, z_y, \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_y, \quad z, f(x, y, z); \quad x, y\right) \\ = \Phi(z_x, z_y, z; x, y), \end{aligned}$$

so haben wir nur nötig, den von mir im genannten Vortrage bewiesenen Unabhängigkeitssatz für eine unbekannte Funktion und die daran anknüpfende Ueberlegung auf das Integral

$$\int_{(\Omega)} \Phi(z_x, z_y, z; x, y)\, d\omega$$

anzuwenden, um zu erkennen, daß das Integral J unter der Voraussetzung einer positiven E-Funktion für das vorgelegte Funktionensystem $z(x, y)$, $t(x, y)$ wirklich einen Minimalwert annimmt. Das Eintreten des Minimums ist hiernach an folgende zwei Forderungen gebunden:

1. Konstruirbarkeit der Schar (26). Diese Forderung ist gewiß erfüllt, wenn die Lagrangeschen partiellen Differentialgleichungen stets Systeme von Lösungen z, t besitzen, die auf einer jeden innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K irgendwie vorgeschriebene Werte besitzen, während sie innerhalb K reguläre Funktionen von x, y sind.

2. Einfache und lückenlose Ueberdeckung des dreidimensionalen Raumes durch die Schar (26). Diese Forderung ist gewiß erfüllt, wenn jedes System von Lösungen z, t der Lagrangeschen Gleichungen durch seine Randwerte auf irgend einer beliebigen innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K eindeutig bestimmt ist.

Das Resultat können wir kurz wie folgt zusammenfassen:

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums verlangt, daß die Randwertaufgabe für die Lagrangeschen Differentialgleichungen bez. einer jeden innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K bei beliebigen Randwerten eindeutig lösbar ist. Unsere Betrachtung zeigt, daß dieses Kriterium gewiß ein hinreichendes ist.

Wenn insbesondere in dem zu behandelnden Problem die gegebene Funktion F unter dem Integralzeichen nur vom zweiten Grade in z_x, z_y, t_x, t_y, z, t ausfällt, so werden die Lagrangeschen Differentialgleichungen linear in diesen Größen, und in diesem Falle läßt sich das zur Anwendung unseres Kriteriums erforderliche Randwertproblem vollständig mit Hilfe meiner Theorie der Integralgleichungen behandeln.

Um die in diesem Falle zur Anwendung kommende Ueberlegung näher zu entwickeln, bilden wir dasjenige homogene lineare Differentialgleichungssystem, welches aus den Lagrangeschen Gleichungen durch Fortlassen der von z, t freien Glieder entsteht; wir wollen dieses Gleichungssystem als die Jacobischen Gleichungen be-

zeichnen. Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß die Randwertaufgabe für eine Kurve K nur dann mehrere Lösungssysteme z, t zuläßt, wenn die Jacobischen Gleichungen ein System von Lösungen z, t besitzen, die auf einer Kurve K, nicht aber überall innerhalb des von K begrenzten Gebietes Null sind. Nun zeigt die Theorie der Integralgleichungen, daß der letztere Fall zugleich der einzige ist, in dem die Randwertaufgabe für die Kurve K bei gewissen vorgeschriebenen Randwerten nicht lösbar wird.

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums läuft also in dem Falle eines quadratischen F auf die Forderung hinaus, daß die Jacobischen Gleichungen außer Null kein System von Lösungen z, t zulassen, die auf dem Rande S oder auf einer innerhalb von Ω verlaufenden, geschlossenen Kurve Null sind. (Das Erfülltsein des Kriteriums ist in diesem Falle auch notwendig.)

Im allgemeinen Falle, wenn die gegebene Funktion F unter dem Integralzeichen nicht speziell quadratisch, sondern beliebig von den zu bestimmenden Funktionen z, t und deren Ableitungen abhängt, haben wir das eben ausgesprochene Kriterium auf die zweite Variation des Integrals J anzuwenden und gelangen so zu einem Kriterium, welches dem bekannten Jacobischen Kriterium im Falle einer unabhängigen Veränderlichen oder einer zu bestimmenden Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher genau analog ist.

Wir behandeln endlich das Problem, die Funktion z der Veränderlichen x, y derart zu bestimmen, daß ein über ein gegebenes Gebiet Ω der xy-Ebene zu erstreckendes Doppelintegral, vermehrt um ein über einen Teil S_1 des Randes von Ω zu erstreckendes einfaches Integral, nämlich die Integralsumme

$$J = \int_{(\Omega)} F(z_x, z_y, z; x, y)\, d\omega + \int_{(S_1)} f(z_s, z;\ s)\, ds$$

$$\left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_s = \frac{dz}{ds}\right]$$

einen Minimalwert erhält, während z auf dem übrigen Teile S_2 des Randes vorgeschriebene Werte haben soll; dabei sind F, f gegebene Funktionen ihrer Argumente und s bedeutet die von einem festen Punkte an in positivem Umlauf gerechnete Bogenlänge der Randkurve S von Ω.

Das Verschwinden der ersten Variation verlangt, daß die ge-

suchte Funktion z als Funktion von x, y im Innern von Ω die partielle Differentialgleichung

$$(27) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z_x}+\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial z_y}-\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

erfüllen muß, während auf dem Rande S_1 die Differentialbeziehung

$$(28) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z_y}\right)_{S_1}\frac{dx}{ds}-\left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\right)_{S_1}\frac{dy}{ds}+\frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial z_s}-\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

zu gelten hat; dabei sind unter $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ die Ableitungen der Funktionen $x(s), y(s)$ zu verstehen, die die Randkurve S_1 definiren.

Wir betrachten nun die Integralsumme

$$J^* = \int_{(\Omega)}\{F+(z_x-p)F_p+(z_y-q)F_q\}\,d\omega+\int_{(S_1)}\{f+(z_s-\varkappa)f_\varkappa\}\,ds$$

$$\left[F=F(p,q,z;\,x,y),\quad F_p=\frac{\partial F}{\partial p},\quad F_q=\frac{\partial F}{\partial q},\right.$$
$$\left. f=f(\varkappa,z;\,s),\qquad f_\varkappa=\frac{\partial f}{\partial \varkappa}\right]$$

und wollen darin p, q als Funktionen von x, y, z und $\varkappa$ als Funktion von s, z derart zu bestimmen suchen, daß der Wert dieser Integralsumme von der über Ω ausgebreiteten Fläche $z = z(x, y)$ d. h. von der Wahl der Funktion z unabhängig wird, wenn diese nur in S_1 die vorgeschriebenen Randwerte hat. Die Integralsumme J^* hat die Form

$$\int_{(\Omega)}\{A z_x+B z_y-C\}\,d\omega+\int_{(S_1)}\{a z_s-b\}\,ds,$$

wo A, B, C Funktionen von x, y, z und a, b Funktionen von s, z darstellen. Diese Integralsumme ist, wie man leicht erkennt, in dem verlangten Sinne von der Fläche $z = z(x, y)$ unabhängig, wenn innerhalb des sich auf das Gebiet Ω projizirenden xyz-Raumes die Differentialgleichung

$$(29) \qquad \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0$$

identisch in x, y, z und in der auf die Randkurve S_1 sich projizirenden sz-Cylinderfläche die Differentialgleichung

$$(30) \qquad (B)_{S_1}\frac{dx}{ds}-(A)_{S_1}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial a}{\partial s}+\frac{\partial b}{\partial z}=0$$

identisch in s, z erfüllt ist. Die beiden Gleichungen (29), (30) stellen, wenn wir für A, B, C, a, b ihre Werte

$$
\begin{aligned}
A &= F_p, \\
B &= F_q, \\
C &= pF_p + qF_q - F, \\
a &= f_\varkappa, \\
b &= \varkappa f_\varkappa - f
\end{aligned} \tag{31}
$$

eintragen, partielle Differentialgleichungen für die Funktionen $p, q, \varkappa$ dar.

Wir bestimmen nun eine einparametrige Schar von Funktionen

$$z = \psi(x, y, \alpha), \tag{32}$$

die den Lagrangeschen Gleichungen (27). (28) genügen, und setzen auf dem Rande

$$z = \psi(x(s), y(s), \alpha) = \psi(s, \alpha); \tag{33}$$

wir nehmen an, daß diese einparametrige Schaar das räumliche Feld eindeutig und lückenlos erfüllt. Sodann berechnen wir aus (32) α als Funktion von x, y, z und aus (33) α als Funktion von s, z und bilden die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
p(x, y, z) &= \left[\frac{\partial \psi(x, y, \alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha = \alpha(x, y, z)}, \\
q(x, y, z) &= \left[\frac{\partial \psi(x, y, \alpha)}{\partial y}\right]_{\alpha = \alpha(x, y, z)}, \\
\varkappa(s, z) &= \left[\frac{\partial \psi(s, \alpha)}{\partial s}\right]_{\alpha = \alpha(s, z)} .
\end{aligned}
$$

Die so entstehenden Funktionen p, q von x, y, z und $\varkappa$ von s, z sind solche von der verlangten Eigenschaft.

In der Tat, daß die Funktionen p, q der Gleichung (29) genügen, folgt unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}$$

leicht, wenn wir bedenken, daß $\psi(x, y, \alpha)$ identisch für alle Werte x, y, α die Lagrangesche Gleichung erfüllen soll. Um auch das

Bestehen von (30) nachzuweisen, setzen wir in die Lagrangesche Gleichung (28), die identisch in s, α erfüllt ist,

$$z_x = p,$$
$$z_y = q,$$
$$z_s = \varkappa,$$
$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial \varkappa}{\partial s} + \varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial z}$$

ein; dieselbe geht dann in die identisch für alle s, z geltende Gleichung

$$(F_q)_{S_1}\frac{dx}{ds} - (F_p)_{S_1}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varkappa^2}\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial s} + \varkappa \frac{\partial \varkappa}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varkappa \partial z}\varkappa + \frac{\partial^2 f}{\partial \varkappa \partial s} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

über. Genau die nämliche Gleichung erhalten wir, wenn wir in Formel (30) die Ausdrücke (31) eintragen. Damit ist der Beweis des Unabhängigkeitssatzes für das vorliegende Problem erbracht.

Aus dem Unabhängigkeitssatz folgt wie früher:

$$E(z_x, z_y, p, q) \equiv F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p) F_p - (z_y - q) F_q > 0,$$
$$E(z_s, \varkappa) \equiv f(z_s) - f(\varkappa) - (z_s - \varkappa) f_\varkappa > 0,$$

so daß im vorliegenden Problem *zwei Weierstraßsche E-Funktionen in Betracht kommen: eine im Inneren und eine für den Rand S_1.*

Damit andererseits eine einparametrige Schar (32) existire, die in der verlangten Weise ein einfach und lückenlos überdecktes räumliches Feld erzeugt, stellen wir *die Forderung, daß jede Lösung z der Lagrangeschen Gleichungen* (27), (28) *durch ihre Randwerte auf irgend einem beliebigen innerhalb Ω verlaufenden, geschlossenen oder in S_1 beginnenden und endigenden Kurvenzuge K eindeutig bestimmt sei. Unsere Betrachtung zeigt dann, daß dieses Kriterium gewiß ein hinreichendes ist.*

Wenn insbesondere in dem zu behandelnden Problem die gegebenen Funktionen F, f unter den Integralzeichen nur vom zweiten Grade in z_x, z_y, z bez. z_s, z ausfallen, so werden die Lagrangeschen Differentialgleichungen linear. Bilden wir dann diejenigen homogenen linearen Differentialgleichungen, die aus den Lagrangeschen Gleichungen durch Fortlassen der von z freien Glieder entstehen und bezeichnen diese als Jacobische Gleichungen, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die Randwertaufgabe für eine Kurve K nur dann mehrere Lösungen zuläßt, wenn die Jacobischen Gleichungen eine Lösung z besitzen, die auf K, nicht aber überall

innerhalb des von K bez. von K und S_1 begrenzten Gebietes Null ist.

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums läuft also in dem Falle quadratischer F, f auf die Forderung hinaus, daß die Jacobischen Gleichungen außer Null keine Lösung z zulassen, die auf dem Rande S_2 oder auf einer innerhalb von Ω verlaufenden geschlossenen oder in S_1 beginnenden und endigenden Kurve K Null ist.

Im allgemeinen Falle, wenn die gegebenen Funktionen F, f nicht speziell quadratisch, sondern beliebig von der zu bestimmenden Funktion z und deren Ableitungen abhängen, haben wir das eben ausgesprochene Kriterium auf die zweite Variation der Integralsumme J anzuwenden und gelangen so zu einem Kriterium, welches dem bekannten Jacobischen Kriterium genau analog ist.

Wenn das Problem gestellt ist, das Doppelintegral

$$\int_{(\Omega)} F(z_x, z_y, z;\; xy)\, d\omega$$

zu einem Minimum zu machen, während die Randwerte der gesuchten Funktion z die Nebenbedingung

$$f(z_s, z;\; s) = 0$$

erfüllen sollen, so können wir die Formeln und Ueberlegungen des eben behandelten Problems unmittelbar anwenden; es ist nur nötig die Gleichung $f = 0$ hinzuzufügen und in den Formeln überall $f(s)$ durch $\lambda(s) f$ zu ersetzen, wo der Lagrangesche Faktor $\lambda(s)$ als eine mitzubestimmende Funktion von s anzusehen ist.

Zum Schluß sei mir gestattet, eine Regel für die Behandlung von solchen Variationsproblemen auszusprechen, bei denen überall auf dem Rande die Werte der zu bestimmenden Funktionen vorgeschrieben sind.

Zunächst gewinnt man durch Nullsetzen der ersten Variation die Lagrangeschen Gleichungen L des Variationsproblems. Es sei dann ein System Z von solchen Lösungen dieser Differentialgleichungen L bekannt, die zugleich alle das Innere sowie den Rand betreffenden gegebenen Bedingungen V des Variationsproblems erfüllen.

Wenn die Weierstraßschen E-Funktionen für unser Lösungssystem Z positiv ausfallen, so bezeichnen wir das Lösungssystem Z als ein solches von **positiv definitem Charakter**.

Wir fassen nun irgend einen Teil T des Integrationsgebietes ins Auge und bezeichnen den Rand dieses Teilgebietes T, soweit er dem Rande des ursprünglichen Integrationsgebietes angehört, mit S_r, soweit er jedoch in das Innere des ursprünglichen Integrationsgebietes fällt, also als neue Grenze entstanden ist, mit s_r. Für den ersteren Rand S_r sowie für das Innere von T seien die Bedingungen V, wie sie daselbst das vorgelegte Variationsproblem fordert, gültig, für s_r schreiben wir die dort vorhandenen Werte der Funktionen des Lösungssystems Z als Randwerte vor: das dadurch für das Teilgebiet T entstehende System von Bedingungen werde mit V_r bezeichnet.

Wenn alsdann kein anderes Lösungssystem der Lagrangeschen Gleichung L existirt, das die Bedingungen V erfüllt — außer dem Lösungssystem Z; wenn ferner auch für jedes Teilgebiet T kein anderes Lösungssystem der Lagrangeschen Gleichungen L existirt, daß die Bedingungen V_r erfüllt — außer dem Lösungssystem Z innerhalb T: so heiße das Lösungssystem Z ein solches von inwendig eindeutigem Charakter.

Für das Lösungssystem Z tritt gewiß Minimum ein, wenn dasselbe von positiv definitem und von inwendig eindeutigem Charakter ist.

In der hiermit ausgesprochenen allgemeinen Behauptung tritt, wie man sieht, neben die Weierstraßsche Forderung des definiten Charakters der Lösung Z noch eine neue Forderung, nämlich die Forderung des inwendig eindeutigen Charakters der Lösung. Die letztere Forderung steht nun zu dem Jacobischen Kriterium — soweit dasselbe bisher in der Variationsrechnung formulirt worden ist — in dem nämlichen Verhältnisse, wie das Weierstraßsche zu dem Legendreschen Kriterium. In der Tat wie aus dem Weierstraßschen Kriterium durch Anwendung auf die zweite Variation das Legendresche wird, so entsteht aus dem von mir aufgestellten Kriterium durch Anwendung auf die zweite Variation das Jacobische. Bilden wir nämlich in leicht erkennbarer Analogie aus den Lagrangeschen Gleichungen L die homogenen linearen Jacobischen $[L]$ und aus den gegebenen Bedingungen V ebenfalls die homogenen linearen zugehörigen Bedingungen $[V]$, so läuft unser Kriterium auf die Forderung hinaus, daß dieses homogene lineare Gleichungs- und Bedingungssystem außer Null keine Lösung besitzen darf und zwar auch nicht für irgend ein Teilgebiet T, wenn man auch an der neu entstehenden Berandung s_r dieses Teilgebietes die Randwerte Null vorschreibt. Das von mir aufgestellte Kriterium ist aber auch anwendbar, wenn nicht bloß Variationen in genügend

naher Nachbarschaft in Betracht kommen oder wenn es sich z. B. um die Entscheidung über das Minimum für eine Kurve zwischen zwei conjugirten Punkten handelt, wo das Jacobische Kriterium notwendig versagt.

In wie weit das aufgestellte Kriterium auch bei nicht festgegebenen Randwerten hinreicht, bedarf im besonderen Falle einer Untersuchung.

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1904.

Von

Dr. Harald Schering.

Vorgelegt von E. Wiechert am 2. Februar 1905.

Die vorliegende Bearbeitung der Erdbebendiagramme des im Kgl. Geophysikalischen Institut zu Göttingen aufgestellten Wiechertschen astatischen Horizontalseismographen von 1200 kg Masse erstreckt sich auf das Jahr 1904 und schliesst sich an den Bericht über das 2. Halbjahr 1903 von Herrn Dr. v. d. Borne an. 1904 September 30—Oktober 17 mußte das Pendel abgebrochen und versetzt werden, um Raum für die Aufstellung neuer Apparate zu schaffen, Oktober 24—Oktober 30 wurden noch einige Aenderungen vorgenommen, im übrigen hat das Pendel, abgesehen von geringfügigen kurzen Betriebsstörungen, dauernd registriert. Bis September 30 war die Eigenperiode der NS-Componente 9.4^s, der EW-Componente 10.7^s, die Vergrößerung 300- bezw. 260-fach. Bei der Neuaufstellung wurde das Pendel auf die Eigenperiode 18.4^s bezw. 20.2^s und 145- bezw. 140-fache Vergrößerung reguliert, doch hat sich teils durch Temperaturänderung, teils durch molekulare Umlagerung der erneuerten stabilisierenden Federn eine Eigenperiode von 15.7^s bezw. 15.3^s und 200- bezw. 180-fache Vergrößerung eingestellt. Es wurde davon abgesehen, die Eigenperiode wieder zu erhöhen, da schon bei der jetzigen Neigungsempfindlichkeit (NS: 61^{mm}; EW: 51^{mm} für 1 Bogensecunde) die Ruhelagenänderungen des Pendels infolge der Niveauschwankungen des Felsenuntergrundes eine störende Größe erreichen. Bei einem sehr starken Regengusse hat sich das Pendel in wenigen Stunden

sogar bis an die Arretierschrauben gelegt. Durchschnittlich 1—2 mal in der Woche müssen die langsamen Niveauschwankungen, die sich hauptsächlich in der NS-Richtung zeigen, durch Auflegen bezw. Fortnehmen kleiner Gewichtchen auf bestimmte Stellen der Pendelmasse compensiert werden.

Bis zum 11. Februar wurden die Zeitmarken von einer in dem unterirdischen Erdbebenhause selbst aufgestellten Pendeluhr gegeben, der Gang derselben war aber in Folge der dort herrschenden Feuchtigkeit ein sehr ungleichmäßiger. Es wurde deshalb eine im Uhrenzimmer des Hauptgebäudes stehende Pendeluhr mit electrischen Contacten versehen und mit dem Erdbebenhause durch eine Leitung verbunden. Da diese Uhr einen sehr geringen und gleichmäßigen Gang hat und beständig mit der Hauptuhr controlliert werden kann, ist die Uhrcorrection nicht nur bei Interpolation, sondern auch bei Extrapolation auf die ganze Secunde genau anzubringen. Die Uhrcorrection der Hauptuhr wird in der Regel monatlich durch astronomische Zeitbestimmung mit einem kleinen Durchgangsinstrument bestimmt. Während meiner Abwesenheit im Juni und Juli hatte Herr Dr. v. d. Borne die Liebenswürdigkeit, die Zeitbestimmungen auszuführen.

Bei der Bearbeitung kam mir zu statten, daß Herr Dr. v. d. Borne in den Diagrammen des ersten Halbjahres 1904 die Beben aufgesucht und markiert hatte, so daß ich nach nochmaliger Durchsicht eine gewisse Controlle hatte, daß kleinere Beben nicht übersehen sind. In den Monaten November und Dezember sind die aufgenommenen Diagramme von mir wöchentlich bearbeitet und vorläufige hectographierte Berichte darüber versandt worden.

Zur Charakterisierung der Erdbeben in Form einer Tabelle wurden die von Herrn Dr. v. d. Borne nach Verabredung mit Herrn Prof. Wiechert aufgestellten Zeichen und Bezeichnungen im wesentlichen beibehalten:

Character des Erdbebens:

I = merklich, II = auffallend, III = stark.
v = terrae motus vicinus = Nahbeben (unter 1000 km).
r = „ „ remotus = Fernbeben (1000—5000 km).
u = „ „ ultimo remotus = sehr fernes Beben (über 5000 km).

Phasen:

P = undae primae = erste Vorläufer.
S = „ secundae = zweite Vorläufer.

L = „ longae = Hauptbeben.
M = „ maximae = größte Bewegung im Hauptbeben.
C = coda = Nachläufer.
F = finis = Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Art der Bewegung:

i = impetus = Stoß.
e = emersio = Auftauchen.
T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
A = Amplitude, gerechnet von einer Seite zur andern.
A_N = „ der N.S.-Componente.
A_E = „ „ E.W. „

Zeit und Maaß:

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.
μ = Mikron = $^1/_{1000}$ Millimeter.

Die Amplitude in μ ist aus der auf dem Diagramm gemessenen Amplitude durch Division mit der Vergrösserung berechnet, wobei die Abhängigkeit der scheinbaren Indicator-Vergrößerung periodischer Störungen von der Periode der Störung und von der Dämpfung berücksichtigt ist (s. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen, Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, Neue Folge Bd. II, No. 1, 1903. S. 78—83). Für dss ungefähr ermittelte Dämpfungsverhältnis 1 : 30 sind aus der Figur l. c. S. 81 die zu den Perioden gehörigen Aenderungen der Vergrößerung entnommen und eine kleine Tabelle der Perioden und reziproken Vergrößerungen angelegt. Die Wellen mit mehrfach größerer Periode als die Eigenperiode des Pendels werden sehr viel weniger vergrößert, als die mit kleiner Periode, es treten deshalb besonders bei fernen Beben die Amplituden der im Anfang der Hauptbewegung auftretenden langen Wellen sehr zurück; ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit der scheinbaren Indicatorvergrößerung würde man daher in vielen Fällen zu unrichtigen Auffassungen des Maximums der Hauptbewegung gelangen.

Zum Schluß ist eine Uebersicht über die Perioden und Amplituden der mikroseismischen Bewegung der N.S.-Componente beigefügt. Die E.W.-Componente hatte durchweg geringere Amplituden.

1904.

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
1	Jan. 7	Iu	e	15 7	20	10	15		Einzelheiten gehen in der mikroseismischen Bewegung unter.
			(M)	17	18	—	20		
			C		16				
			F	55					
2	„ 10	Iu	i M_1	3 49	26	35	20		
			M_2	4 0.4	18	10	15		
			F	15					
3	„ 20	IIu	iP	15 4 26	i 7	i 13	—		Amplitude von i S geht in der Minutenmarke verloren, S_E sehr unregelmäßig mit stark wechselnden Perioden. Auf M_E folgen allmählig abklingende Schwebungen.
					1—2	<1	<1		
					7	5	5		
			iS	14.8	10	10	20	S-P = 10.4	
					15—20	80	—	:9400 km	
			L(M_N)	27	60	—	300	L-P = 23.5	
			M_E	34.5	30	500	100	:8000 km	
			C		16				
			F	17 40					
4	„ 29		e	1 7	30	30	30		
			F	15					
5	Febr. 4	Iu	e(P)	20 59.2	1		<1		E.W.-Componente Schreibarme abgeschlagen.
			i(S)	21 9.5	i 16		20		
					6		2		
			LM	21	(35)		70		
			C		20				
			F	22 10					
6	„ 6	Ir	e	2 54.6	1—2	<1	1		Kurze Wellen in der mikroseismischen Bewegung auftauchend. 2h 50m gefühltes Beben in Kronstadt.
			F	58					
7	„ 8	Iu	eM	22 46	18	10	—		
			F	50					
8	„ 24	Ir	eP	15 57.7	1	<1	<1	S-P = 1.7	1h 58m hat der Minutencontact aufgehört, deshalb die Zeiten etwa auf 1s unsicher. 3h 58m zerstörendes Beben in Rosciola und Magliano di Marri, Italien.
			S	59.4	5	3	3	:700 km	
			M_E	59.8	10	10		M-P = 2.1	
			F	16 4				:700 km	

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
9	März 25	Ir	iP	18 56 12	< 1	< 1	< 1		EW- u. NS-Componente sind sehr verschieden.
			S	57 28	5—6	10	3		
			L(M_E)	58.5	12	13	—	L-P = 2.3	
			M_N	58.7	8	5	15	: 700 km	
			C		4				
			F	19 5					
10	„ 1	Iu	e	16 9	16				e vielleicht die Nachläufer eines anderen, kurz vorhergegangenen Bebens. Auf M folgen Schwebungen.
			(M)	17 12	20	20	10		
			C		16				
			F	18 0					
11	„ 4	Iu	iS	10 46.8	i (7)	5	—		Nach M nimmt T bis 11^h 17^m ab auf ca. 25^s, darauf abklingende Schwebungen T = 16^s, A_E = 10^m. 5^h 20^m OZ = 10^h 28^m GZ zerstörendes Beben in Lima, Peru.
			M	11 (8)	50	100	—	M-S = 21.2	
			C		16			: (11000 km)	
			F	45					
12	„ 10	Ir	eP	4 24 (32)	0.5—1	< 1	< 1		In eP winzige Wellen, nach 12^s deutlich hervortretende schnelle Schwingungen, die noch in M sehr stark sind ($4^μ$). 4^h 25^m gespürtes Beben in Klagenfurth.
			S	26 8	3	10	10	S-P = 1.6	
			LM_E	26 25	(10)	23	8	: 600 km	
			M_N	26 51	10	—	14	L-P = 1.9	
			C		(2—3)			: 600 km	
			F	32					
13	„ 16	Ir	e	20 49.1	1	< 1	< 1		Gespürt. Beben in Bozen.
			F	49.6					
14	„ 18	Iu	iS	14 5.1	6	3	4		
			L	(23)	(40)				
			(M)	25.0	35	30	60		
			C		12				
			F	45					
15	„ 19	IIu	eP	6 46.5	1—3	—	< 1		Die Hauptbewegung NS hat etwa 15^m lang gleich grosses A, während sie EW zu einer weit größeren A anschwillt und langsam abnimmt (gefühltes Beben Massachusetts, Neuengland?)
			iS	7 53.4				L-S = 21.6	
			L	15	(45)	15	—	: 11000 km	
			M_E	29	20	150	50		
			C		16				
			F	9 10					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
16	März 31	II u	eP	2 27	2—3	1	—		Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt. Schwebungen.
			iS	34.5					
			L	45.5	40				
			M_N	47.0	40		300		
			C		10				
			F	3 35					
17	„ 31	I u	e	6 18					Durch mikroseismische Bewegung stark beeinträchtigt.
			M_N	20.8	(20)	—	30		
			C		10				
			F	30					
18	April 4	III r	iP	10 5 49	10	50	30		Zerstörendes Beben auf der Balkanhalbinsel, Macedonien.
					2—3	5	5		
					20	50	—	S-P = 2.6	
			S	8 24	10	(50)	50	: 1600 km	
			M	10.2	12	700	700		
19	„ 4	III r	iP	10 29 12	10—11	150	130		Augenscheinlich von demselben Epicentrum ausgehend wie Nr. 18, ist es in vielen Einzelheiten demselben sehr ähnlich, nur etwa 3 mal so stark. 10h 34,5m wurden beide Schreibarme durch die Gewalt der Stöße abgeschleudert.
					2—3	20	20	S-P = 2.5	
					28	600	—	: 1500 km	
			S	31 42	(12)	300	100		
			(M)	33.3	16	2000	2000		
20	„ 5	I u	i	10 42.7	(6)	—	4		
			L	55.3					
			M	57.7	20	45	70		
			C		14				
			F	11 50					
21	„ 10	I r	iP	8 55 29	1—2	2	2		M ein starker Stoß, Schwebungen, zerstörendes Beben auf der Balkanhalbinsel, Macedonien.
			(S)	58 22	(7)	20	10		
			iM	9 0.8	9	150	150		
			C		7				
			F	15					
22	„ 11	I u	e	15 4					
			M	(8)	30	—	30		
			C		16—18				
			F	50					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
23	April 12	I u	e S	19 11.3	16	—	10		
			M_N	28.2	30	30	30		Schwebungen.
			C		16				
			F	20 10					
24	„ 13	I u	e	0 6	18	10	—		
			F	20					
	„ 14	I u	e	2 3					
			M	6.0	24	10	30		
			C		16				
			F	25					
25	„ 19	I r	e (P)	18 16.7	2	—	2		
			S	19.5	1—2	2	2	S-P = 2.8	Wahrscheinlich Balkanhalbinsel.
			M	20.8	15	20	12	: 1800 km	
			i	21.5	8	20	8	(M-e P = 4.1	
			C		(8)			1400 km)	
			F	35					
26	„ 22	I u	e	20 43	16	—	5		
27	„ 24	I u	e (P)	7 0.9	7	3			
			(M)	23.0	30	(20)			Schwebungen.
			C		16				
			F	50					
28	Mai 1	II u	e P	15 46.6	3	1	—	S-P = 10.6	
			(S)	57.0	(12)	15	5	: 9600 km	
			L M	16 16.5	> 70	—	400	L-P = 29.5	Schwebungen.
			C		16			9900 km	
			F	18 0					
29	„ 2	I u	e	0 17	15				
			F	47					
30	„ 7	I u	e	19 9	14				
			F	25					
31	„ 8	I (r)	e	17 43.2	1—2	< 1	—		
			M	43.8	16	10	10		
			C		(5)				
			F	50					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
32	Mai 9	I(r)	e	15 42	(4—10)				Ungleichmäßige Welle der ganze Tag sehr ur ruhig.
			F	16 5					
33	„ 10	I(r)	e	10 48.5	(6)				
			M	49.8	16	10	—		
			F	55					
34	„ 11	I(r)	e	14 36	(6—10)				Schwache, ungleichmäßig Wellen ohne charakterist sche Einzelheiten.
			F	55					
35	„ 12	I(r)	e	17 20.5	(6—10)				„
			F	28					
36	„ 14	Iu	e	14 (7)					Zunächst anschwellend dann abnehmende zah reiche Schwebungen.
			(M)	35	22	30	30		
			C		(18)				
			F	15 30					
37	„ 15	Iu	e	21 57	18	10	—		
			F	22 10					
38	„ 18	Iu	e	3 13	16	5	5		
			F	25					
39	„ 22	I(r)	e	21 38	(9)	(2)	—		Mai 19 sehr unruhig.
			F	55					
40	„ 28	Iu	e	23 0					
	„ 29		(M)	0 40	19	30	30		Zahlreiche Schwebunge
			C		16				
			F	1 10					
41	Juni 4	Ir	e	8 48	6—10				Unregelmäßige, weni charakteristische Welle
			F	9 0					
42	„ 7	Iu	iP	7 29 24	1—2	2	1		
					8	5	3	S-P = 9.3	Hauptbewegung u. Max mum nicht erkennbar.
			iS	38 44	i 8	20	5	:8300 km	
			C		14	(20)	(20)		Von 7^h 53^m schwac Schwebungen.
			F	8 40					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
13	Juni 10	I v	P	11 17 39	<1	<1	<1		In der Hauptbewegung wechseln lange Wellen T = 8s von kurzen Wellen T = 2s überlagert mit Stößen T = 4s ab.
					3	—	2		
			i	18 20	i 2	—	3		
			S	19 1	3	4		S-P = 1.4	
			L	19 9	8			:400 km	
			M	19 22	4	15	5	L-P = 1.5	
			C		6; 2			:500 km	
			F	30					
14	„ 10	I (r)	e	17 45					M mit kleinen Wellen T = 2s überlagert.
			M	46	15	6	—		
			C		7				
			F	55					
15	„ 14	I u	e	2 22	20	8	5		Schwebungen.
			F	40					
16	„ 17	I (r)	e	20 1	8	3	3		
			F	35					
17	„ 18	I u	eP	6 21	8	3	(1)		Juni 18 sehr unruhig.
			(M)	7 2	28	15	(5)		
			C		28				
			F	8 10					
8	„ 22	I u	e	11 53	18	10	7		
				12 5					
9	„ 24	I u	P	1 15 49	3—4	3	3		Schwebungen.
			S	25 18	5	5	5	S-P = 9.5	
			LM	41.6	35	80	(20)	:8500 km	
			C		12			L-P = 25.8	
			F	3 0				:8600 km	
0	„ 25	I u	e	3 3	18—15	2	1		
			F	25					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
51	Juni 25	III u	iP	14 57 15	i 5	8	10		L ist auf EW 4m früher zu sehen als auf NS. Die Wellen zwischen LM_E und M_N sind auf NS außerordentlich unregelmäßig geformt. Zahlreiche Schwebungen mit langsam abnehmenden A und T (Vermutlich Herd in Alaska)
					20				
			iS	15 6 42	i 10	(10)	40	S-P = 9.5	
					7	10	10	:8500 km	
					25—30	—	100	(L-P = 20.7	
			LM_{E_1}	18	60	700		:7000 km)	
			M_{E_2}	26	26	700	200		
			M_N	31.7	20	300	600		
			C		14				
			F	18					
52	„ 25	III u	P	21 12 2	5	5	3		Sehr ähnlich dem vorigen. Kurz nach Einsatz S zeigen sich merkwürdige lange Wellen auf NS, die auch in dem vorigen Beben angedeutet sind.
					0.5	—	1	S-P = 9.4	
			S	21 27	7	i 35	35	:8400 km	
					50	—	400	(L-P = 19.5	
					25—30		200	:6500 km)	
	„ 25		L	21 31.7	(80)				
			M_{E_1}	33.2	60	1400	—		
			M_{E_2}	40.9	27	1500	—		
			M_N	47.0	20	600	900		
			C		14				
	„ 26		F	2					
53	„ 26	I u	P	10 52 5	(7)		3		
					2—3		1	S-P = 9.5	
			S	11 1 (35)	7		5	:8500 km	
			(L)	20.2	30				
			M	29.7	16		50		
			C		(14)				
			F	12 45					
54	„ 26	I u	e	20 30	(45)				
			(M)	42.2	16		10		
			F	21 5					
55	„ 27	III u	P	0 21 33	5		3		Sehr ähnlich Nr. 51 und 52. Die dort gemachten Bemerkungen treffen auch hier zu.
					1—2		1	S-P = 9.4	
					15—20		20	:8400 km	
			iS	30 54	9		20	L-P = 24.5	
					50—60		400	:8200 km	
					25—30		150		
			L	46	45				
			(M)	55.8	20		600		
			C		14				
			F	3 30					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
56	Juli 1	Iu	(S)	3 34.9	7	4	<1		
			(M)	53	40	30			
			C		12—14				
			F	4 50					
57	„ 1	Iu	P	13 39 56	{ 0.5	<0.5	<0.5		
					3	1	—	S-P = 9.9	
			S	49 49	3—4	1	0.5	:8900 km	
			L	14 8	35			L-P = 28.1	
			(M)	13	25	20	20	:8700 km	
			C		10				
			F	15 35					
58	„ 5	Ir	P	21 48 5	{ 0.5	<0.5			(Gefühltes Beben in Baku).
					2—3	1			
			(S)	22 2 56	2—3	1			
			(M)	5	5—6	2			
			F	25					
59	„ 8	Ir	eP	12 35					
			iS	36 16	3	2	—		
			M	38.0	15	8	5		
			F	45					
60	„ 10	IIu	(L)	23 33	(25)				
			M	38	21	25	5		
			F		55				
61	„ 11	Ir	S	6 11 49	{ 2	1			
					5	2	2		
			M	13.6	12	5	3		
			C		4				
			F	23					
62	„ 12	Iv	eP	5 33 7	<0.5	<0.5	<0.5		
			iS	34 28	2		1		
			M_E	35.0	6	4	2		
			C		5				In C sehr glatte regelmäßige Wellen.
			F	39					
63	„ 12	Ir	?	11 2	6		<1		

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
64	Juli 13	II v	P	15 6.7	< 0.5—1	< 0.5	< 0.5		In Bordeaux kurz nach 15h Erschütterungen gespürt.
			L	7 4	3—5	6	5		
			M_N	7.6	5	12	8		
			C		3				
			F	15					
65	„ 23	I u	e P	0 53.2	3	1	0.5		
			L M	1 28	(30)	10	10		
			F	2 0					
66	„ 23	I u	e	16 34	18	10	7		
			F	17 10					
67	„ 24	II u	i P	10 56 5	i 0.5	4	5	S-P = 9.4 :8400 km	
					3	1	1		
			S	11 5 27	i 7	5	8		
					7	4	4		
			L	21	45			L-P = 24.9 :8300 km	
			M_E	25	30	70	30		
			M_N	29.5	20	40	50		
			C		18				
			F	12 20					
68	„ 27	I r	e	5 47	6	—	1—3		
			M	55	14	6	10		
			C		(14)				
			F	6 25					
69	„ 27	I v	i	15 22 30	1	0.5	0.5		
			F	30					
70	„ 27	I (r)	i P	16 4 17	1—2	1	1		Paßt gar nicht in das Schema. Ein Maximum ist nicht zu erkennen. Vielleicht Ueberlagerung zweier Beben.
			i S_1	7 54	i 9	—	7		
			i S_2	14 40	i 7	7	6		
			C		16				
			F	17 0					
71	Aug. 1	I r	e	7 57.0	1—2	< 0.5			
			M	59	5	1	2		
			F	8 5					
72	„ 2	I (r)	(P)	1 32.1	3	—	0.5		
			M	42.0	14	5	5		
			F	50					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
73	Aug. 8	Iu	(P)	23 10.6	1—2	0.5	0.5		Schwebungen.
	„ 9		(L)	0 0	35				10h 22m OZ = 22h 1m GZ zerstörendes Beben in Wellington, Neuseeland.
			M	23	25	20	20		
			C		16—18				
			F	1 0					
74	„ 11	IIr	iP	6 11 0	i 5	12	7		
					3—4	2	1	S-P = 3.5	
			iS	14 27	i 10	17	4	: 2500 km	
					5	3	3	L-P = 5.0	
			L	16.0	35			: 1700 km	
			M_N	18.2	12	30	80		
			M_E	18.9	11	60	40		7h 59m OZ = 5h 59m GZ zerstörendes Beben in Samos.
			F	7 5					
75	„ 14	Iu	e	4 10	60	(30)			
			F	40	35				
76	„ 15	I(r)	M	12 15	12	4	6		Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
77	„ 18	Iu	i(S)	5 6 20	5	4			
			(M)	51	18	15			
			F	7 10					
78	„ 18	Ir	iP	20 8 50	i 3	12	6		Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
			iS	12 8	i 7	6	—		NS. Rußschrift mangelhaft.
			L	14	32				
			C		7				
			F	50					
79	„ 20	I(r)	e	13 30	6	2			
			F	40					
80	„ 20	Iu	(P)	21 58 23	< 0.5	< 0.5			
			(M)	22 45	(14)	3			
			F	50					
81	„ 22	Iu	iP	13 11 42	i 1	2			
					1	1			
			S	21 18	2—3	1			
			M	50	12	20			
			C		(10)				
			F	14 0					24/25. Beide Schreibarme abgeschlagen.

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	A_E	A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
82	Aug. 27	IIu	iP	22 6 42	i 6		17		
					0.5		0.5	S-P = 8.7	
					6		1	:7700 km	
			S	15 21	10	30	3		
			(L)	23	35				
			M	25	35	380			
			C		14 - 16				
	„ 28		F	1 30					
83	„ 30	IIu	P	12 3.1	5		2	S-P = 7.7	
			S	10.8			40	:6700 km	EW. Schreibarm abgeschlagen.
			M	20	18		500		
			C		16				
			F	13 40					
84	Sept. 1	I(r)	e	7 5	10	2	<1		
			F	15					
85	„ 8	Iu	e(P)	2 47	4	1			NS. Schreibarm abgeschlagen.
			iS	57 24	5	i 3			
						1			
			L	3 13 50					
			M	24	45	30			
			C		16				
			F	4 10					
86	„ 11	IIu	e(P)	5 17.9	2—3	<0.5			
			e(S)	34.4	4—5		2		Unregelmäßige Schwebungen.
			L	6 19	50				
			M	22.2	26	120	300		
			C		11				
			F	7 35					
87	„ 13	Ir	e(S)	10 9.5	4—5		3		NS. Schreibarm abgeschlagen.
			M	12.3	8		5		
			C		5				
			F	20					
88	„ 13	Iu	e	18 49	18		5		
			F	19 18					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ		
89	Sept. 14	Ir	eP	15 34.2	2		<1		
			S	38.1	7		4		
			L	(40)					
			(M)	41.2	30	10	10		
			C		12				
			F	16 5					
90	„ 18	Iv	(P)	16 44 23	1	1	1		Sehr kleine Wellen, die plötzlich auftreten und sich in der schwachen mikroseismischen Bewegung verlieren.
			F	49					
91	„ 19	Iu	e(S)	0 9	(7)				EW. Rußschrift mangelhaft. Zahlreiche Schwebungen.
			M	32	20		10		
			C		14				
			F	1 15					
92	„ 19	Iu	e	6 14					
			M	20	20		0.6		Aehnlich dem vorhergehenden Beben.
			C		14				
			F	7 20					
93	„ 28	IIu	e	14 17	(7)				
			L	(40)	> 60				
			(M)	49.5	30	60	80		
			C		18				
			F	15 40					Vom September 30 bis Oktober 17 vorm. war das Pendel außer Thätigkeit.
94	Okt. 22	Iu	e	18 21	7				
			M	24	12	5	5		
			C		10				
			F	35					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ		
95	Okt. 23	II v	P_1	10 29 2	0.5	1	1		M ist auf EW sehr wenig, auf NS sehr stark mit Wellen T = 2ˢ überlagert, die sich auch in den Nachläufern noch stark bemerklich machen. Zerstörendes Beben in Skandinavien.
			P_2	29 45	2—3	4	4		
			i S L	30 14	{ 10	—	11		
					{ 2	5	6		
			M	32.5	7	30	60		
			C		5				
			F	11 0					
									Von Oktober 24 bis 30 vorm. war das Pendel außer Thätigkeit.
96	Nov. 5	I u	e	21 10	16	3	5		Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt. Nov. 6 4ʰ 30ᵐ OZ = Nov. 5 20ʰ 20ᵐ GZ. Zerstörendes Beben auf Formosa.
			F	35					
97	„ 6	II u	e(P)	4 39	(8—10)	—	3		
			(S)		15	10	10		
			L	5 (0)					
			M_N	10.0	16	35	60		
			M_E	10.5	16	65	40		
			C		12				
			F	45					
98	Nov. 8	I u	e	7 25	30	—	(15)		
			F	9 0					
99	„ 9	II r	(e)	3 45	6	—	7		
			L	51.5	16				
			M_{E_1}	54.6	12	—	15		
			M_N	57.8	7	15	7		
			M_{E_2}	58.6	7	—	17		
			C		(12)				
			F	4 15					
100	„ 21	II u	e	4 10	(50)				
			(M)	22	25	—	25		
			C		20				
			F	5 25					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden T s	Amplituden A_E μ	Amplituden A_N μ	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
101	Nov. 22	II u	e	1 35	(20)	6	6		Paßt gar nicht in das Schema, i_1 und i_2 sind zwei einzelne Wellen, die sich auf beiden sehr gleichartigen Componenten deutlich aus den schwachen unregelmäßigen Wellen herausheben. Wenig ausgeprägtes Maximum.
			i_1	45.5	45	40	40		
			i_2	49.3	18	11	8		
			L	2 7	(40)				
			(M)	23	18	35	45		
			C		18				
			F	3 5					
102	„ 23	I u	e L	17 28	(35)				
			M	36	25	—	11		
			C		12				
			F	18 0					
103	„ 23	I r	e	21 15	3	—	15		
			M	28.5	6	—	4		
			F	40					
104	„ 27	I u	e	7 50	20	—	—		Lange glatte Wellen.
			M	59.8	18	—	8		
			F	8 15					
105	Dez. 2	II u	e	2 50					Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
			L	3 (1)	40				
			M_N	10.0	20	15	20		
			M_E	11.0	20	30	20		
			C		16				
			F						
106	„ 11	I u	e (M)	9 45	30	15	15		
			C		18				
			F	10 10					
107	„ 11	II u	e	17 (30)					
			M	18 (5)	20	30	20		
			C		18				
			F	50					
108	„ 19	I u	e	18 45	35	15	10		
			(M)	19 10	25	15	25		
			C		18				
			F	20 10					

Nr.	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Zeitdifferenzen	Bemerkungen
				h m s	s	μ	μ	m	
109	Dez. 20	IIu	iP	5 57 0	i 10	25	—		
					1—3	5	3	S-P = 10.5	
					10	10	—	: 9500 km	
			iS	6 7 31	i 15	90	(40)	L-P = 27.5	
					10	30	20	: 9200 km	
					20—30	150	90		
			i	13.7	20	250	60		NS- u. EW-Componente sind sehr verschieden, die EW-Comp. zeigt starke Schwebungen (Ostindien?)
			L M_E	24.5	45	(300)	—		
			M_N	32.3	20	—	230		
			C		14				
			F	9 0					
110	„ 21	Iu	e	2 (7)					
			M	2 20—50	10	5–10	5–10		
111	„ 22	Iu	M	6 50	15	5	5		
112	„ 27	I(r)	i	22 58 10	4	1	3		
			M	23 16	25	—	6		
			F	45					
113	„ 28	I(r)	e	6 23					
			M_N	25.2	10	3	7		
			F	35					

Mikroseismische Bewegung 1904.

Datum	Januar		Februar		März		April		Mai		Juni		Datum
	T	An	T	An	T	An	T	An	T	An	T	An	
1	6	1	6—7	2—3	4	1	7—8	3—4	5	<1		<1	1
2	5—6	1—2	5—7	1—2	4	<1	4,(8)	2	5—6	1		<1	2
3	6—7	3	5—6	1	4—6	1	5—6	2—3		<1	(5)	<1	3
4	6—7	3	4	1—2	5—6	<1	6	1	5—6	<1	6	<1	4
5	6—7	3	6—7	2—3	3—4	<1	5	1	6	<1	6	<1	5
6	5—7	1—2	(4)6—7	2—3	3—4	1	5; 7	2	5	<1		<1	6
7	8	4	5	2	3—4	1	5; 7	2	4	1		<1	7
8	8—9	4—5	4—7	2—3	3—4	<1	6	<1	5	1		<1	8
9	7—8	3—2	4—6	2—3		<1	7—8	3	6	1		<1	9
10	5—7	1—2	6	2	(6)	<1	7—8	3—2	(5)	<1		<1	10
11	5—6	1	6—7	2—3	6	<1	5—7	2—1		<1		<1	11
12	5—6	1—2	6	3	5	1—2	4—5	1		<1		<1	12
13	5—6	3	9	4—6	5	1—2	5—6	1—2		<1		<1	13
14	6	3	9—7	5—3	5—6	1	4—5	1		<1	(5)	<1	14
15	6	3—2	5—6	1—2	5—6	1	5	<1	(6)	<1	5—6	1	15
16	6	1	5—6	1	4—5	<1		<1	4	<1	5—6	1	16
17	6	<1	5—6	1	4—6	1—2		<1	4—5	1	5	1	17
18	6	<1	5—6	1	5	2	7—8	<1	4—5	1	unruhig		18
19	6	1	5	<1	5	1	7—8	1—2	4—6	1—2		<1	19
20	6	<1	5—6	1	6	2—1	8	1	5	1		<1	20
21	6—7	1—2	5—6	2—3	5	1	7	<1	5—6	1	(7)	<1	21
22	6—7	1—2	3—6	1—2	5—6	1—2	5—6	<1	(6)	<1		<1	22
23	6	1	4—5	<1	5—6	<1		<1	5—6	<1		<1	23
24	6—7	1	8—9	2—3	5—6	<1		<1	6	<1		<1	24
25	7	2	7	1—2	5—6	<1	5—6	<1	6	<1		<1	25
26	5	1	7	2—3	5—6	<1		<1	6	<1		<1	26
27	6—8	2—4	6—7	1	5—6	<1	5	<1		<1		<1	27
28	8	3—4	(6)	<1	5—6	<1	5	<1		<1		<1	28
29	8—7	2—3	3—4	1	5;9	1;3—6	5	<1		<1		<1	29
30	7	2—3			9	6—8	5	<1		<1		<1	30
31	8	2—3			7—8	3—4			4	<1			31

Mikroseismische Bewegung 1904.

Datum	Juli		August		September		Oktober		November		Dezember		Datum
	T	AN	T	AN	T	AN	T	AN	T	AN	T	AN	
1		<1		<1		<1			5—6	<1	6—7	4	1
2		<1		<1	(5)	<1			5—6	1	8—9	5—7	2
3		<1		<1		<1			6	1—3	8—6	4—2	3
4		<1		<1	(5)	<1			6	2—3	6	2—4	4
5		<1		<1	4—5	1			6	1	5—6	3	5
6		<1		<1	4—5	1			6	1—2	5—6	5—6	6
7	7	<1	4	<1	4—5	1			5—6	2	5—6	5—3	7
8	7	1		<1	4—5	1			6	4	5—6	2—1	8
9	7	<1		<1	5—6	1			5	5	5—6	2	9
10		<1		<1	4—6	<1			5—6	2	8—9	6—4	10
11		<1		<1	(5)	<1				<1	5—6	<1	11
12		<1	5—7	1	4—5	1					4—6	2—3	12
13		<1		<1	—	—					4, 6—7	3	13
14		<1	4—5	1—2	(4)	<1			6	5	6—10	2—8	14
15		<1	4—5	1	(4)	<1			5—6	4	10—8	7—2	15
16		<1	4—5	<1	(5—7)	<1			5—4	4	8	2—1	16
17	(4)	<1		<1	4, 7	1	7	2	4—6	2	6	1	17
18	6—8	1	4—7	1—2	4—6	1	—	—	5—6	1	5—6	1—2	18
19		<1	5	<1	5—7	<1	6	2	5—6	2	5—6	1—2	19
20		<1		<1	(5)	<1	6	1	6	7	6—8	2—1	20
21		<1		<1		<1	6	1	5—6	4—2	4—5	<1	21
22		<1		<1		—	5	1	4	1		<1	22
23		<1		—		<1		<1	4	1	7—8	7	23
24		<1		—		<1			4	1	8	4—2	24
25		<1		<1	4—5	1				<1		<1	25
26		<1	5—6	1	5	1				<1	6	<1	26
27		<1	5	<1		<1				<1	5	1	27
28		<1		<1		<1				<1	5—6	1	28
29		<1		<1	5	<1				1	5—6	1—2	29
30		<1		<1			5—6	<1	6—7	5	5—6	1—2	30
31		<1									—	—	31

Zur Elektronentheorie.

III. Ueber Lichtgeschwindigkeits- und Ueberlichtgeschwindigkeits-Elektronen.

Von

A. Sommerfeld.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 25. Februar 1905.

§ 21. *Uebersicht.*

In zwei vorangehenden Noten [1]) habe ich allgemeine Formeln zur Bestimmung des Eigenfeldes eines beliebig bewegten Elektrons und zur Berechnung der dynamischen Wirkungen des Eigenfeldes angegeben. Die Resultate meiner ersten Note habe ich inzwischen in einer Mitteilung an die Amsterdamer Akademie [2]) wesentlich einfacher abgeleitet, indem ich dieselben allein auf den Green'schen Satz basierte. Hier wurde auch das unterschiedliche Verhalten von Oberflächen- und Volumladung bei einer Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit, das ich in meiner zweiten Note allgemein nachgewiesen hatte, für den besonderen Fall der stationären Bewegung sehr einfach dargethan: daß nämlich bei Oberflächenladung die Kraft des Eigenfeldes unendlich groß wird, sobald die Lichtgeschwindigkeit überschritten ist, daß sie dagegen bei Volumladung stets einen bestimmten endlichen Wert hat.

Man möchte hieraus schließen, daß sich ein körperlich geladenes Elektron sehr wohl mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegen könne. Zwar ist bei Abwesenheit eines äußeren Feldes die stationäre

1) Diese Nachrichten, 1904, Note I pag. 99—130, Note II pag. 363—439. Vgl. auch die interessante funktionentheoretische Ableitung meiner Formeln durch G. Herglotz, diese Nachrichten 1904 Heft 6.

2) Proceedings, November 1904, pap. 346—367.

Fortbewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit auszuschließen, weil dieselbe fortgesetzt eine Kraftzufuhr von dem Betrage (s Gl. 65)

$$\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F} = \frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)$$

im Sinne der Bewegungsrichtung erfordert. Wohl aber könnte sich eine mögliche kräftefreie Bewegung unter den verzögerten oder gar unter den beschleunigten Bewegungsformen finden. Pag. 409 meiner zweiten Note habe ich mich vermutungsweise dahin geäußert, daß die kräftefreie Ueberlichtgeschwindigkeits-Bewegung eine „sehr rasch sich selbst beschleunigende" sein möchte. Eine Andeutung in diesem Sinne lieferte das Vorzeichen der elektromagnetischen longitudinalen Maße, welches bei Ueberlichtgeschwindigkeit negativ wird. Mit Sicherheit ist aus diesem Umstande allerdings nur zu schließen, daß eine quasi-beschleunigte Bewegung bei Ueberlichtgeschwindigkeit einen geringeren Zwang, eine kleinere Kraftzufuhr nötig macht wie eine quasi-verzögerte Bewegung. Dagegen ist der Schluß auf die Möglichkeit einer kräftefreien Selbstbeschleunigung eine unberechtigte Extrapolation, wie ich l. c. ausdrücklich hervorhob.

Nachdem ich mich lange vergeblich bemüht hatte, eine kräftefreie (beschleunigte oder verzögerte) Ueberlichtgeschwindigkeits-Bewegung zu entdecken, habe ich mir schliesslich durch ein eigentümliches graphisches Verfahren (§ 24 dieser Arbeit) klar gemacht, daß weder eine dauernd beschleunigte noch eine dauernd verzögerte Bewegung möglich ist, und zwar deshalb, weil die Integralgleichung, welche den kräftefreien Bewegungsverlauf beherrscht, keine Lösung besitzt. Ein analytischer Beweis für die Nichtexistenz dieser Lösung wäre erwünscht; doch scheint mir auch die graphische Schlußweise zwingend. Diese letztere klärt zugleich das Negativ-Werden der Maße auf: der Bedarf an Kraftzufuhr sinkt in der Tat (vgl. Fig. 13 und § 25), wenn man von einer wenig verzögerten zu einer wenig beschleunigten Bewegung übergeht, ohne indessen für irgend eine Beschleunigung auf Null herabzusinken — außer in dem trivialen Falle einer unendlich großen Beschleunigung.

Es dürfte dieses ziemlich das einzige bekannte Beispiel sein, in dem ein vernünftig gestelltes physikalisches Problem keine Lösung zuläßt und wir den Vorgang wegen dieser Nichtexistenz einer Lösung für unmöglich erklären müssen.

Die folgende Schwierigkeit sei ausdrücklich hervorgehoben. Wir können theoretisch durch endliche Kräfte ein körperlich geladenes

Elektron auf Ueberlichtgeschwindigkeit bringen. Man wird billiger Weise fragen dürfen, wie sich das Elektron bewegt, wenn die Kräfte plötzlich entfernt werden. Nach unseren Ergebnissen kann es weder mit constanter, noch mit zunehmender, noch mit abnehmender Geschwindigkeit weiter fliegen. Es bleibt wohl nur der Ausweg offen, anzunehmen, daß das Elektron bei plötzlicher Entfernung des Zwanges plötzlich auf Unterlichtgeschwindigkeit sinkt. Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken: Die plötzliche Freilassung des Elektrons widerspricht eigentlich der Maxwell'schen Theorie; denn die Kräfte, welche das Elektron auf Ueberlichtgeschwindigkeit geführt haben, müssen von einem elektrischen Felde ausgehen und dieses kann nicht plötzlich entfernt werden, sondern sich nur mit Lichtgeschwindigkeit zerstreuen. Hierdurch kann der plötzliche Abfall von Ueberlichtgeschwindigkeit auf Unterlichtgeschwindigkeit gemildert werden.

Uebrigens läßt sich die Unmöglichkeit der Ueberlichtgeschwindigkeits-Bewegung vom energetischen Standpunkte aus ohne weiteres recht plausibel machen. Man kann sagen: Eine bewegte Ladung sendet allemal Energie aus. Wenn die Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit erfolgt, so muß die ausgestrahlte Energie teilweise verloren gehen, da die elektromagnetische Energie nach allgemeinen Erfahrungen nur mit Lichtgeschwindigkeit fortschreiten kann. Der Verlust aber muß durch Arbeitsaufwand gedeckt werden; d. h. eine Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung kann nicht kräftefrei erfolgen. Haben wir es andrerseits mit Unterlichtgeschwindigkeit zu tun, so liegt die Möglichkeit vor, daß die ausgestrahlte Energie von dem Elektron wieder aufgefangen wird, was z. B. bei der stationären Bewegung tatsächlich zutrifft.

Die Möglichkeit, das Elektron auf Ueberlichtgeschwindigkeit zu bringen und eine Zeit lang in dieser zu erhalten, wird in den nächst folgenden §§ 22 und 23 besprochen. Die Ergebnisse von P. Hertz[1]), die sich auf Unterlichtgeschwindigkeit beziehen, werden hierbei wiedergefunden. So wie diese Ergebnisse eine mögliche Vorstellung von der Abschleuderung der β-Strahlen des Radiums geben, so sollte die plötzliche Erzeugung von Ueberlichtgeschwindigkeit nach meiner ursprünglichen Ansicht mit der Entstehung der γ-Strahlen zusammenhängen. Nach den vorangehenden Bemerkungen ist dies indessen unzutreffend: Die γ-Strahlen können nicht mit Ueberlichtgeschwindigkeit bewegte Ladungen sein, da solche Bewegungen im kräftefreien Felde überhaupt unmöglich sind.

1) Untersuchungen über unstetige Bewegungen des Elektrons. Diss. Göttingen 1904.

Auch die Annahme, daß die γ-Strahlen Lichtgeschwindigkeits-Elektronen wären, läßt sich kaum halten. Ich zeige nämlich im § 26, daß Lichtgeschwindigkeits-Elektronen im magnetischen Felde ablenkbar sind und daß die scheinbare Nicht-Ablenkbarkeit, die man aus den Formeln der quasi-stationären Bewegung zu folgern versucht sein könnte, eine ungerechtfertigte Extrapolation ist. Die Abhängigkeit des Ablenkungsgesetzes von a (Elektronenradius) und r (Bahnradius) wird dabei eine ganz andere (logarithmische) wie bei Unterlichtgeschwindigkeit. Allerdings hört auch die (näherungsweise) longitudinale Kräftefreiheit der Bewegung bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit auf. Die Ausstrahlung, die das Auftreten einer longitudinalen Kraft bedingt und die bei Ueberlichtgeschwindigkeit von der Ordnung ε^2/a^2 wird, erweist sich bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit von der Ordnung $\varepsilon^2/a^{2/3}r^{4/3}$. Aus diesem Grunde wird das Resultat über die Ablenkbarkeit der Lichtgeschwindigkeits-Elektronen im Magnetfelde etwas illusorisch, da diese Ablenkung außer dem Vorhandensein eines transversalen Magnetfeldes auch eine longitudinale Kraftzufuhr in der Bahnrichtung voraussetzt. Welche Bewegung eintritt, wenn diese Kraftzufuhr nicht vorhanden ist, wird durch die Rechnungen des § 26 nicht entschieden.

Im Ganzen scheinen also die theoretischen Ueberlegungen dafür zu sprechen, daß man, sofern die experimentelle Forschung keine Gegengründe beibringt, wieder auf die ursprüngliche Auffassung der γ-Strahlen als Röntgeneffekt bei der Abschleuderung der β-Strahlen zurückkommen wird.

§ 22. *Plötzliche Erzeugung von Unterlichtgeschwindigkeit.*

Das Elektron sei zur Zeit $t<0$ in Ruhe, erhalte zur Zeit $t=0$ die Geschwindigkeit $v<c$ und behalte diese für $t>0$ nach Richtung und Größe bei. Wegen der späteren Ausdehnung auf Ueberlichtgeschwindigkeit setzen wir schon hier Volumladung voraus. Die in jedem Zeitpunkte erforderliche Kraft $\mathfrak{F}$ berechnet sich nach der für beliebige geradlinige Bewegung gültigen Gl. 64' meiner zweiten Note. Hierin bedeutet f die folgende Funktion:

$$102)\qquad f(x) = \frac{1}{5}(2a)^3\left(-1+5\left(\frac{x}{2a}\right)^2-5\left(\frac{x}{2a}\right)^3+\left(\frac{x}{2a}\right)^5\right).$$

Wir setzen

$$103)\quad f(x)=\frac{1}{5}(2a)^3\left(-1+x^2g(x)\right),\quad g(x)=(2a)^{-2}\left(5-5\frac{x}{2a}+\left(\frac{x}{2a}\right)^3\right)$$

und spalten $\mathfrak{F}$ in drei Teile I, II, III, indem wir nach 64') schreiben:

$$-\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},$$

$$104)\quad\left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\,d\tau}{T^2},\\ \mathrm{II} &= \int_0^{\tau'}\left(\frac{c+v_{t-\tau}}{T}\frac{d(x^2g)}{dx}-\frac{c}{T^2}x^2g\right)d\tau, \quad x = c\tau+T\\ \mathrm{III} &= \int_0^{\tau''}\left(\frac{c-v_{t-\tau}}{T}\frac{d(x^2g)}{dx}-\frac{c}{T^2}x^2g\right)d\tau, \quad x = c\tau-T. \end{aligned}\right.$$

τ bedeutet die von dem Zeitpunkte t aus rückwärts gerechnete vergangene Zeit, T den im Intervall τ zurückgelegten Weg des Mittelpunktes. Nach den eingangs gemachten Angaben haben wir bei positivem t

$$105)\quad\left\{\begin{array}{l} \text{für } \tau < t \ldots v_{t-\tau} = v, \quad T = v\tau\\ \;\;\text{„}\;\; \tau > t \ldots v_{t-\tau} = 0, \quad T = vt. \end{array}\right.$$

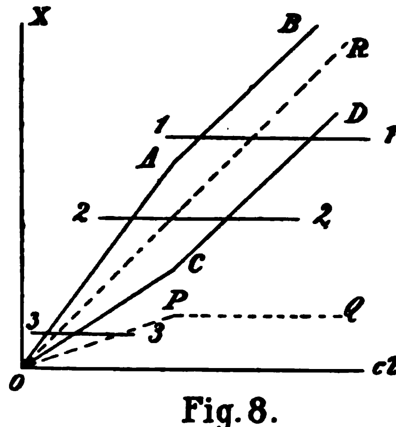


Fig. 8.

Die Bedeutung der Grenzen τ', τ'' ist aus Fig. 8 ersichtlich. In dieser sind zur Abscisse $c\tau$ die beiden Linienzüge OAB und OCD mit den Ordinaten $x = c\tau+T$ und $x = c\tau - T$ aufgetragen, wobei die Eckpunkte A und C zur Abscisse ct gehören. Der Verlauf von $x = c\tau$ und $x = T$ ist durch die punktirten Linien OR und OPQ angedeutet. Die Gleichungen der verschiedenen Geraden OA, AB etc. sind zufolge der Bedeutung von T:

$$OA\colon x = (c+v)\tau, \quad AB\colon x = c\tau+vt,$$
$$OC\colon x = (c-v)\tau, \quad CD\colon x = c\tau-vt.$$

Wir schneiden unsere beiden Linienzüge mit einer Parallelen zur Abscissenaxe im Abstande $2a$ von derselben und erhalten nach Gl. 52) in den Abscissen der Schnittpunkte die Größen $c\tau'$ und $c\tau''$. Hierbei sind drei Lagen jener Parallelen zu unterscheiden:

Erste Lage oberhalb A

$$2a > (c+v)t, \text{ also } t < \frac{2a}{c+v},$$

$$105)\quad \tau' = \frac{1}{c}(2a-vt), \quad \tau'' = \frac{1}{c}(2a+vt).$$

Zweite Lage zwischen A und C

$$(c-v)t < 2a < (c+v)t, \text{ also } \frac{2a}{c+v} < t < \frac{2a}{c-v},$$

106′) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{1}{c}(2a+vt)$$

Dritte Lage unterhalb C

$$2a < (c-v)t, \text{ also } t > \frac{2a}{c-v},$$

106″) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{2a}{c-v}.$$

Entsprechend diesen drei Lagen werden wir drei Zeitintervalle unterscheiden. Es kommt auf dasselbe hinaus, ob wir uns t continuirlich von 0 aus wachsend denken, oder, unter Festhaltung des Punktes ct der Abscissenaxe, die nach der Ordinatenaxe abgetragene Länge $2a$ continuirlich abnehmen lassen.

Erstes Intervall: $t < 2a/(c+v)$
Zwischen $\tau = \tau'$ und $\tau = \tau''$ ist $T = vt$. Daher wird nach 106):

$$\mathrm{I} = \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{c\,d\tau}{v^2 t^2} = \frac{c(\tau''-\tau')}{v^2 t^2} = \frac{2}{vt}.$$

In den Integralen II und III ist die Integration von 0 bis τ' bezw. τ'' zu zerlegen in eine Integration von 0 bis t und eine zweite von t bis τ' bezw. τ''. In den Variabeln $x = c\tau + T$ bezw. $x = c\tau - T$ entspreche dem Zeitpunkte t der Wert

$$x_1 = (c+v)t \text{ bezw. } x_2 = (c-v)t.$$

Wir erhalten dann wegen 105), wenn wir T und τ durch x ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \frac{c+v}{v}\int_0^{x_1}\left(x\frac{dg}{dx}+2g\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{x_1} g\,dx \\
&\quad + \frac{1}{vt}\int_{x_1}^{2a}\frac{d(x^2 g)}{dx}\,dx - \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_1}^{2a} x^2 g\,dx \\
&= \frac{c+v}{v}(xg)_{x_1} - \frac{c^2-v^2}{v^2}\int_0^{x_1} g\,dx + \frac{1}{vt}(x^2 g)_{2a} \\
&\quad - \frac{1}{vt}(x^2 g)_{x_1} - \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_1}^{2a} x^2 g\,dx.
\end{aligned}$$

Hier hebt sich das erste gegen das vierte Glied, weil $(x^2 g)_{x_1} = (c+v)t\,(xg)_{x_1}$. Da ferner nach Gl. 103) $(x^2 g)_{2a} = 1$ ist, so wird

$$\mathrm{II} = \frac{1}{vt} - \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_0^{x_1} g\,dx - \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_1}^{2a} x^2 g\,dx.$$

Ganz entsprechend hat man:

$$\mathrm{III} = \frac{1}{vt} + \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_0^{x_2} g\,dx + \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_2}^{2a} x^2 g\,dx$$

und schließlich

$$107)\quad -\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_{x_1}^{x_2} g\,dx - \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_1}^{x_2} x^2 g\,dx.$$

Zweites Intervall: $2a/(c+v) < t < 2a/(c-v)$. Indem wir die Integration in I in zwei Teile zerlegen, haben wir mit Rücksicht auf 106'):

$$\mathrm{I} = \int_{\tau'}^{t} \frac{c\,d\tau}{v^2\tau^2} + \int_t^{\tau''} \frac{c\,d\tau}{v^2 t^2} = \frac{c}{v^2}\left(\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{t}\right) + \frac{c(\tau'' - t)}{v^2 t^2}$$

$$= \frac{c(c+v)}{2a\,v^2} - \frac{2c - v}{v^2 t} + \frac{2a}{v^2 t^2}.$$

Das Integral II wird jetzt, da $\tau' < t$ und eine Zerlegung desselben nicht in Betracht kommt:

$$\mathrm{II} = \frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(x\frac{dg}{dx} + 2g\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx$$

$$= \frac{c+v}{v}(xg)_{2a} - \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx = \frac{c+v}{2av} - \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx.$$

Das Integral III lautet wie vorher

$$\mathrm{III} = \frac{1}{vt} + \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_0^{x_2} g\,dx + \frac{1}{v^2 t^2}\int_{x_2}^{2a} x^2 g\,dx.$$

Somit wird bei passender Zusammenfassung:

$$107')\quad -\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = -\frac{c^2 - v^2}{2a\,v^2} + \frac{2c}{v^2 t} - \frac{2a}{v^2 t^2}$$

$$+ \frac{c^2 - v^2}{v^2}\int_{2a}^{x_2} g\,dx - \frac{1}{v^2 t^2}\int_{2a}^{x_2} x^2 g\,dx.$$

Drittes Intervall $t > 2a/(c-v)$.

Da unsere die Integrationsgrenzen bestimmende Gerade in diesem Falle unterhalb des Punktes C in Fig. 8 verläuft, so kommen nur solche Zeitpunkte τ für die Berechnung von $\mathfrak{F}$ in Betracht, in denen sich das Elektron bereits mit der constanten Geschwindigkeit v bewegt hat. Der Einfluß der ursprünglichen Ruhe ist vollständig verschwunden und $\mathfrak{F}$ erhält denjenigen Wert, der der stationären Bewegung entspricht, nämlich

$$\mathfrak{F} = 0. \tag{107''}$$

Zusammenfassend bemerken wir, daß im ersten Intervall $\mathfrak{F}$ nach 107) als ganze Funktion vierten Grades von t dargestellt ist; daß $\mathfrak{F}$ im zweiten Intervall eine rationale Funktion ist, welche die Potenzen von t^{-2} bis t^{+4} enthält. Die gefundenen Ausdrücke stimmen mit denen von P. Hertz genau überein. Zur Veranschaulichung derselben diene Fig. 9.

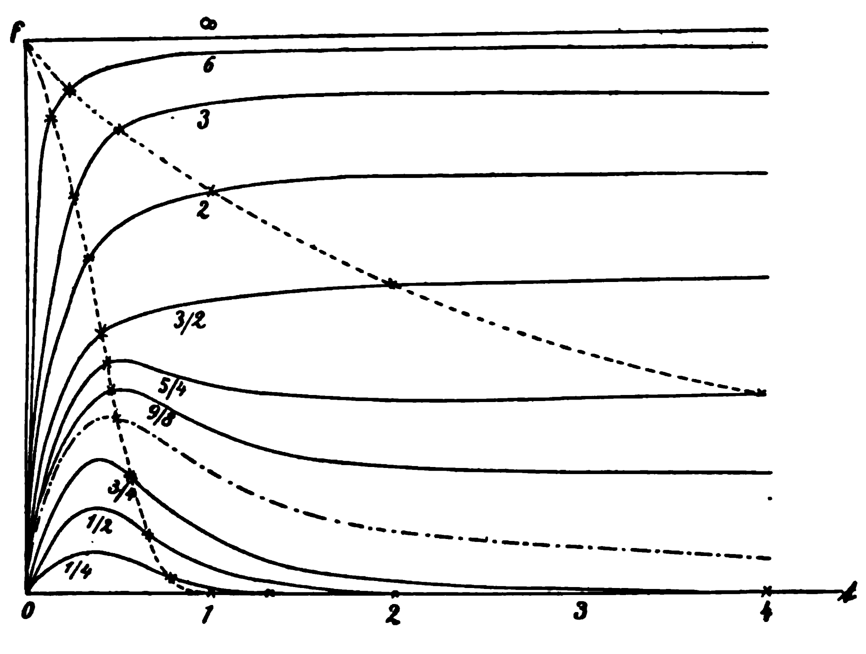


Fig. 9.

Hier sind als Abscissen bezw. Ordinaten die reinen Zahlen

$$\mathfrak{t} = \frac{ct}{2a}, \quad \mathfrak{f} = -\frac{4\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} \tag{108}$$

aufgetragen. Die den einzelnen Curven beigegebenen Zahlen bedeuten das Verhältnis $\beta = v/c$. Die Curvenpunkte werden am

bequemsten aus den folgenden Ausdrücken berechnet, die sich aus 107) und 107′) unmittelbarbar durch Ausführung der Integrationen ergeben:

Erstes Intervall: $\mathfrak{f} = 2\beta t\left\{\frac{2}{3} - t + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\,\beta^2\right) t^3\right\}$

Zweites Intervall: $\mathfrak{f} = -\frac{1}{24\beta^2 t^2} + \frac{1}{5\beta^2 t} - \frac{3}{8}\,\frac{1-\beta^2}{\beta^2}$

$$+\frac{t}{\beta^2}\left\{\frac{1}{3}(1-\beta)^2(1+2\beta) - \frac{1}{8}(1-\beta)^3(1+3\beta)t + \frac{1}{120}(1-\beta)^5(1+5\beta)t^3\right\}$$

Drittes Intervall: $\mathfrak{f} = 0$.

Die strichpunktirt gezeichnete Linie entspricht der Lichtgeschwindigkeit ($\beta = 1$). Für unsere bisherigen Erörterungen kommen nur diejenigen Curven in Betracht, welche unterhalb jener Linie verlaufen ($\beta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$). Man sieht, wie mit wachsendem β die Größen der Ordinaten und gleichzeitig diejenigen Abscissenbereiche wachsen, in denen $\mathfrak{f}$ von Null verschieden ist. In dem Grenzfalle $\beta = 1$ reicht dieser Bereich sogar bis ins Unendliche. Die Endpunkte unserer drei Intervalle sind auf jeder Curve durch ein Kreuz markirt. Die zwischen der t-Axe und der $\mathfrak{f}$-Curve enthaltene Fläche ist der Arbeit proportional, die beim Abschleudern zu leisten ist. Diese Arbeit darf aber nicht momentan, im Augenblick des Abschleuderns, auf das Elektron übertragen werden, wenn anders von Anfang an eine gleichförmige Geschwindigkeit entstehen soll, sondern ist während eines endlichen aus unserer Figur ersichtlichen Zeitintervalles nach einem bestimmten in unserer Figur dargestellten Gesetze zu verrichten. Das Zeitintervall, in dem Arbeit zu leisten ist, wird sogar unendlich groß, wenn gerade die Lichtgeschwindigkeit entstehen soll.

Die hier gezogenen Schlüsse sind bereits aus den Untersuchungen von P. Hertz bekannt. Dieser geht insofern umgekehrt wie wir vor, als er in erster Linie die Arbeit bestimmt und aus dieser den Kraftverlauf durch Differentiation ableitet, während wir aus dem angegebenen Kraftgesetz die Arbeit durch Flächenmessung gewinnen können.

§ 23. *Plötzliche Erzeugung von Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Das Elektron setze sich zur Zeit $t = 0$ mit der des Weiteren constant gehaltenen Geschwindigkeit $v > c$ in Bewegung.

Wir haben zunächst Fig. 8 sinngemäß abzuändern. In Fig. 10 (s. die folgende Seite) sind zur Abscisse $c\tau$ die Linien $x = c\tau$ und $x = T$ als Linien OR und $OPQQ'$ eingetragen und zwar

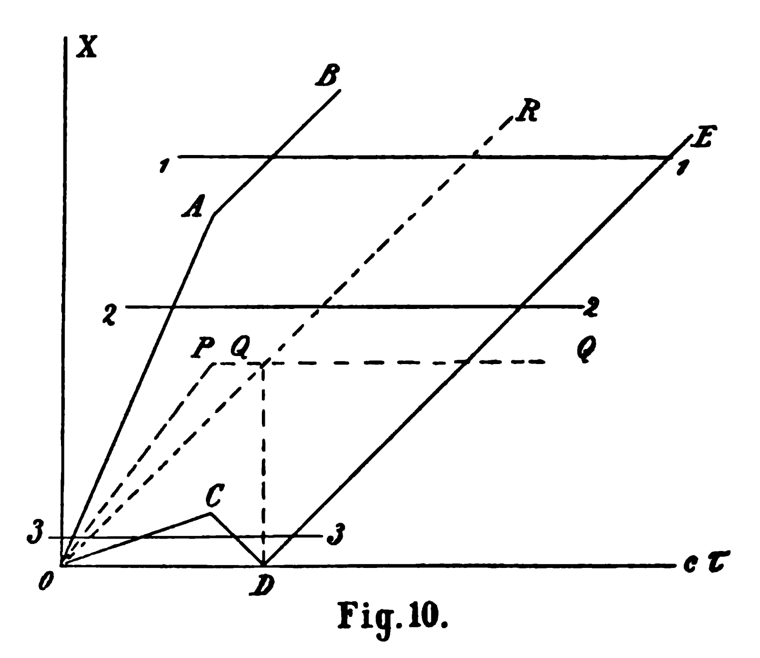


Fig. 10.

haben wir längs OP: $x = v\tau$, längs PQQ': $x = vt$. Der Punkt Q hat die Abscisse $c\tau = vt$. Aus OR und OPQ setzt man die Linienzüge OAB und $OCDE$ zusammen, welche die Beziehungen $x = T + c\tau$ und $x = |T - c\tau|$ darstellen. Offenbar ist:

$$\begin{aligned} &\text{längs } OA : x = (v+c)\tau, \quad \text{längs } AB : x = vt + c\tau, \\ &\quad\text{„} \quad OC : x = (v-c)\tau, \quad \text{„} \quad CD : x = vt - c\tau, \\ &\quad\text{„} \quad DE : x = c\tau - vt. \end{aligned}$$

Der Punkt D unserer Figur, der ebenso wie Q zur Abscisse $c\tau = vt$ gehört, bildet die Grenze unterhalb deren die Formeln für Ueberlichtgeschwindigkeit ($T > c\tau$), oberhalb deren diejenigen für Unterlichtgeschwindigkeit ($T < c\tau$) in Anwendung kommen.

Die Grenzpunkte der Integration werden wieder durch eine Parallele zur Abscissenaxe im Abstande $2a$ ausgeschnitten. Indem wir den Maaßstab veränderlich wählen, unterscheiden wir drei Lagen dieser Parallelen und dementsprechend drei Zeitintervalle.

Erstes Intervall: $2a > (v+c)t$, $t < \dfrac{2a}{v+c}$

$$\tau' = \frac{1}{c}(2a - vt), \quad \tau'' = \frac{1}{c}(2a + vt) \tag{109}$$

Zweites Intervall: $(v-c)\,t < 2a < (v+c)\,t$,

$$\frac{2a}{v+c} < t < \frac{2a}{v-c}, \quad \tau' = \frac{2a}{v+c}, \quad \tau'' = \frac{1}{c}(2a + vt) \tag{109'}$$

Drittes Intervall: $2a < (v-c)t, \quad t < \frac{2a}{v-c}.$

Hier tritt das Besondere hinzu, daß es nicht zwei, sondern vier Schnittpunkte giebt. Die beiden zu kleinsten Abscissen gehörigen mögen wieder τ', τ'' heißen; sie bestimmen sich zu

$$110) \qquad \tau' = \frac{2a}{v+c}, \quad \tau'' = \frac{2a}{v-c}.$$

Die beiden folgenden mögen τ_1 und τ_2 heißen. Sie bestimmen sich daraus, daß $vt - c\tau_1 = 2a$ und $c\tau_2 - vt = 2a$, woraus folgt:

$$110') \qquad \tau_1 = \frac{1}{c}(vt - 2a), \quad \tau_2 = \frac{1}{c}(vt + 2a).$$

Auf die Möglichkeit von mehr als zwei Grenzpunkten der Integration war in meiner zweiten Note zwar hingewiesen, aber es war kein Beispiel hierzu gegeben. Die Ableitung der Formel 64') zusammen mit der Definition der Funktion f aus Fig. 3 (pag. 391) zeigt nun unmittelbar, daß beim Vorhandensein der weiteren Grenzpunkte τ_1 und τ_2 zu dem Integral von 0 bis τ'' ein zweites ebenso gebildetes Integral von τ_1 bis τ_2 mit dem gleichen (negativen) Zeichen hinzukommt.

Wie im vorigen § setzen wir:

$$-\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

und geben die Werte I, II, III speciell für den Fall des dritten Intervalles an. Die entsprechenden Werte für das erste und zweite Intervall folgen dann einfach durch Unterdrückung der von τ_1 bis τ_2 geführten Integrale.

$$111) \quad \begin{cases} \mathrm{I} = \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{c\,d\tau}{T^2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{c\,d\tau}{T^2} \\ \mathrm{II} = \int_0^{\tau'} \left(\frac{c + v_{t-\tau}}{T} \frac{d(x^2 g)}{dx} - \frac{c}{T^2} x^2 g \right) d\tau, \quad x = T + c\tau \\ \mathrm{III} = \int_0^{\tau''} \left(\mp \frac{c - v_{t-\tau}}{T} \frac{d(x^2 g)}{dx} + \frac{c}{T^2} x^2 g \right) d\tau \\ \quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\mp \frac{c - v_{t-\tau}}{T} \frac{d(x^2 g)}{dx} + \frac{c}{T^2} x^2 g \right) d\tau, \quad x = \pm (T - c\tau). \end{cases}$$

Das doppelte Vorzeichen in dem Ausdrucke von III hat seinen

Grund in der Vorschrift des absoluten Betrages, die in Gl. 64') ausgedrückt war. Dieser Vorschrift entsprechend ist unsere Variable x gleich $+(T-c\tau)$ oder gleich $-(T-c\tau)$ zu wählen, je nachdem $T > c\tau$ oder $T < c\tau$ ist d. h. je nachdem $c\tau < OD$ oder $> OD$ ist. Gleichzeitig ist die in Gl. 64') vorgesehene Differentiation $-\partial/\partial T$ zu ersetzen durch $-d/dx$ oder $+d/dx$, je nachdem $T > c\tau$ oder $T < c\tau$, was in den vorstehenden Gleichungen angedeutet ist.

Erstes Intervall: $t < 2a/(v+c)$. Die Definition der Bestandteile I und II in (111) unterscheidet sich, da das Integral von τ_1 bis τ_2 vorläufig in Fortfall kommt, durch nichts von derjenigen im vorigen §. Wir haben daher wie dort für das erste Intervall:

$$\mathrm{I} = \frac{2}{vt}, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{vt} - \frac{c^2-v^2}{v^2}\int_0^{x_1} g\,dx - \frac{1}{v^2t^2}\int_{x_1}^{2a} x^2 g\,dx$$

mit $x_1 = (v+c)t$.

In dem Integral III ist die Integration von 0 bis τ'' in drei Teile zu zerlegen nämlich in eine erste von 0 bis t, in eine zweite von t bis vt/c und eine dritte von vt/c bis τ''. Die erste Integration erstreckt sich über [die Abscissen der Linie OC unserer Fig. 10, die zweite über diejenigen der Linie CD, die dritte über diejenigen jenseits D. Führen wir unsere Variable $x = \pm(T-c\tau)$ ein und kennzeichnen wir jene drei Teilintegrationen durch die Endwerte von x, so haben wir:

$$0 < x < x_2, \quad x_2 = (v-c)t, \quad x = (v-c)\tau, \quad v_{t-\tau} = v,$$
$$T = v\tau = \frac{v}{v-c}x;$$
$$x_2 > x > 0, \quad x = ct - c\tau, \quad v_{t-\tau} = 0, \quad T = vt;$$
$$0 < x < 2a, \quad x = c\tau - vt, \quad v_{t-\tau} = 0, \quad T = vt.$$

Somit erhalten wir nach (111):

$$\mathrm{III} = -\frac{c-v}{v}\int_0^{x_2}\left(x\frac{dg}{dx}+2g\right)dx + \frac{c(v-c)}{v^2}\int_0^{x_2} g\,dx$$
$$+\frac{1}{vt}\int_{x_2}^{0}\frac{d(x^2g)}{dx}dx - \frac{1}{v^2t^2}\int_{x_2}^{0} x^2 g\,dx$$
$$+\frac{1}{vt}\int_0^{2a}\frac{d(x^2g)}{dx}dx + \frac{1}{v^2t^2}\int_0^{2a} x^2 g\,dx$$

$$= -\frac{c-v}{v}(xg)_{x_2} + \frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{x_2} g dx$$

$$-\frac{1}{vt}(x^2 g)_{x_2} + \frac{1}{vt}(x^2 g)_{2a} + \frac{1}{v^2 t^2}\left\{\int_0^{x_2} + \int_0^{2a} x^2 g dx\right\}.$$

Hier hebt sich noch das erste Glied gegen das dritte und es wird wegen 103) $(x^2 g)_{2a} = 1$. Somit bleibt

$$\text{III} = \frac{1}{vt} + \frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{x_2} g dx + \frac{1}{v^2 t^2}\left\{\int_0^{x_2} + \int_0^{2a} x^2 g dx\right\}.$$

Im Ganzen haben wir einfach:

$$112)\quad \left\{\begin{aligned} & -\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\text{I} + \text{II} + \text{III} \\ & = \frac{v^2-c^2}{v^2}\left\{\int_0^{x_1} + \int_0^{x_2} g dx\right\} + \frac{1}{v^2 t^2}\left\{\int_0^{x_1} + \int_0^{x_2} x^2 g dx\right\}. \end{aligned}\right.$$

Zweites Intervall: $2a/(v+c) < t < 2a/(v-c)$.

Wiederum stimmen die Integrale I und II mit den im vorigen § für das zweite Intervall abgeleiteten Werten überein:

$$\text{I} = \frac{c(c+v)}{2av^2} - \frac{2c-v}{v^2 t} + \frac{2a}{v^2 t^2},\ \text{II} = \frac{c+v}{2av} + \frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{2a} g dx$$

Andererseits ist der Wert von III identisch mit dem soeben für das erste Intervall angeschriebenen Wert. Man hat daher im Ganzen

$$112')\quad \left\{\begin{aligned} & -\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\text{I} + \text{II} + \text{III} = \frac{v^2-c^2}{2av^2} + \frac{2c}{v^2 t} - \frac{2a}{v^2 t^2} \\ & + \frac{v^2-c^2}{v^2}\left\{\int_0^{x_2} + \int_0^{2a} g dx\right\} + \frac{1}{v^2 t^2}\left\{\int_0^{x_2} + \int_0^{2a} x^2 g dx\right\}. \end{aligned}\right.$$

Drittes Intervall: $t > 2a/(v-c)$. Hier tritt in I und III das Integral von τ_1 bis τ_2 neu hinzu, welches der bei D gelegenen Ecke unseres Linienzuges $OCDE$ entspricht. Indem wir beachten, daß $T = v\tau$ für $0 < \tau < \tau''$ und $T = vt$ für $\tau_1 < \tau < \tau_2$ ist, finden wir unmittelbar aus 110), 110') und 111):

$$\text{I} = \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{c d\tau}{v^2\tau^2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{c d\tau}{v^2 t^2} = \frac{c}{v^2}\left(\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau''}\right) + \frac{c(\tau_2-\tau_1)}{v^2 t^2}$$

$$= \frac{c^2}{av^2} + \frac{4a}{v^2 t^2}$$

$$\mathrm{II} = \frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(x\frac{dg}{dx}+2g\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx$$

$$= \frac{c+v}{2av} + \frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx$$

Hinsichtlich des doppelten Vorzeichens im Ingrale III ist zu beachten, daß das Minus-Zeichen in 111) nur gilt bis zu dem zum Punkte D gehörigen Werte von τ, daß dagegen für größere τ, wo $c\tau > vt$ ist, das Plus-Zeichen zu verwenden ist. Das Integral von τ_1 bis τ_2 zerlegt sich daher noch in zwei Teile, nämlich, in der Variabeln $x = \pm(vt - c\tau)$ geschrieben, in ein Integral von $2a$ bis 0 und ein zweites von 0 bis $2a$. Im Ganzen hat man

$$\mathrm{III} = -\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(x\frac{dg}{dx}+2g\right)dx + \frac{c(v-c)}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx$$

$$+\frac{1}{vt}\int_{2a}^{0}\frac{d(x^2g)}{dx}dx - \frac{1}{v^2t^2}\int_{2a}^{0} x^2 g\,dx + \frac{1}{vt}\int_0^{2a}\frac{d(x^2g)}{dx}dx + \frac{1}{v^2t^2}\int_0^{2a} x^2 g\,dx$$

$$= \frac{v-c}{2av} + \frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx + \frac{2}{v^2t^2}\int_0^{2a} x^2 g\,dx,$$

also

$$-\frac{20\pi a}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}$$

$$= \frac{v^2-c^2}{av^2} + 2\frac{v^2-c^2}{v^2}\int_0^{2a} g\,dx - \frac{4a}{v^2t^2} + \frac{2}{v^2t^2}\int_0^{2a} x^2 g\,dx.$$

Nach der Bedeutung von g (Gl. 103)) ist dieses:

$$112'')\qquad \mathfrak{F} = -\frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\frac{v^2-c^2}{v^2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon^2}{v^2t^2}.$$

Hier liefert der erste Term, der für nicht zu kleines t ausschließlich in Betracht kommt, die in dem einleitenden § 21 genannte und früher von mir abgeleitete Kraft des Eigenfeldes bei rein stationärer Bewegung. Der zweite Term, der asymptotisch für wachsendes t verschwindet, stellt sozusagen eine Rückerinnerung an die ursprüngliche Ruhe des Elektrons dar. Seinen größten Wert hat dieser Term für den kleinsten Wert von t, der noch zu unserem dritten Intervalle gehört, nämlich für $t = 2a/(v-c)$;

aber auch in diesem Zeitpunkte ist das Verhältnis des zweiten zum ersten Term klein, nämlich gleich

$$\frac{1}{9}\,\frac{v-c}{v+c}.$$

Wir können nun Fig. 9 für das Gebiet der Ueberlichtgeschwindigkeit vervollständigen. Zunächst schreiben wir unsere Ergebnisse 112) in die Variabeln t und f (Gl. 108)) um, indem wir die Integrationen ausführen. Wir erhalten leicht:

Erstes Intervall:

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{t}}{\beta^2}\left\{\frac{4}{3}\beta^2 - \frac{\mathfrak{t}}{4}(3\beta^4+6\beta^2-1)+\frac{\mathfrak{t}^2}{60}(5\beta^6+45\beta^4+15\beta^2-1)\right\}$$

Zweites Intervall: $\mathfrak{f} = -\frac{1}{24\beta^2\mathfrak{t}^2}+\frac{1}{5\beta^2\mathfrak{t}}+\frac{3}{8}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2}$

$$+\frac{\mathfrak{t}}{\beta^2}\left\{\frac{1}{3}(\beta-1)^3(1+2\beta)-\frac{1}{8}(\beta-1)^4(1+3\beta)\mathfrak{t}+\frac{1}{120}(\beta-1)^5(1+5\beta)\mathfrak{t}^2\right\}$$

Drittes Intervall: $\mathfrak{f} = \frac{3}{4}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2}-\frac{1}{12\beta^2\mathfrak{t}^2}.$

Wie man sieht, füllen die Kurven, die man der Reihe nach für $\beta > 1$ erhält, das ganze Feld der Figur 9 zwischen der strichpunktierten Kurve, die der Lichtgeschwindigkeit entspricht, und einer im Abstande 0,75 von der Abscissenaxe gezogenen Parallelen, die den Kraftaufwand bei unendlich großer Geschwindigkeit darstellt, lückenlos und stetig aus. Mit wachsendem β schrumpft unser erstes Intervall immer mehr zusammen. Auch unser zweites Intervall, welches sich für $\beta = 1$ ins Unendliche ausdehnte, reducirt sich für $\beta = \infty$ auf Null. Die Kreuze, welche den Endpunkten dieser Intervalle auf unseren Kurven entsprechen, sind der Uebersichtlichkeit wegen durch je eine punktirte Curve verbunden. Der wesentliche Unterschied zwischen Unter- und Ueberlichtgeschwindigkeit zeigt sich in unserem dritten Intervall. Während hier $\mathfrak{f}$ bei $\beta < 1$ Null ist, nähert sich $\mathfrak{f}$ bei $\beta > 1$ sehr rasch dem constanten, endlichen, von Null verschiedenen Werte, der der stationären Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit entspricht. Es ist sonach unmöglich, eine stationäre Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit dadurch einzuleiten, daß man das Elektron auf einer endlichen Wegstrecke mit einer gewissen Kraft führt, was zur Erzeugung von stationärer Unterlichtgeschwindigkeit ausreicht. Vielmehr muß die Führung fortgesetzt weiter wirken.

Hiermit hängt es zusammen, daß wir nicht, wie bei Unterlichtgeschwindigkeit, schlechtweg von dem Arbeitsaufwande sprechen können, der zur Erzeugung der Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung erforderlich ist. Wohl können wir aus der Fläche zwischen unserer $\mathfrak{f}$-Curve und der Abscissenaxe die Arbeit entnehmen, die während jedes endlichen Zeitintervalles zu leisten ist. Diese Arbeit nähert sich aber mit wachsendem t nicht einer endlichen Grenze, sondern wird unendlich groß.

Die nähere Betrachtung von Fig. 9 legt es nahe, zwei Wirkungen zu sondern, eine Trägheits- oder Beschleunigungswirkung und eine Strahlungs- oder Geschwindigkeitswirkung. Die erstere zeigt sich in der Erhebung unserer Curven zu Beginn des Vorganges, die letztere bei den Ueberlichtgeschwindigkeitscurven in dem schließlichen von Null verschiedenen Endwert der Ordinaten. Bei Unterlichtgeschwindigkeit ist die Trägheitswirkung maßgebend und kommt die Strahlungswirkung schließlich in Fortfall. Bei kleiner Ueberlichtgeschwindigkeit (etwa $\beta < \frac{3}{2}$), prägt sich die Trägheitswirkung in dem anfänglichen Maximum unserer Curven noch deutlich aus. Bei großer Ueberlichtgeschwindigkeit dagegen überwiegt die Strahlungswirkung so sehr, daß das anfängliche Maximum in den immer steiler werdenden Anstieg der Curve verschmilzt. Für $\beta = \infty$ ist dieser Anstieg unendlich steil und unsere Curve geht in den rechteckigen Linienzug über, der sich aus einem Stück der Ordinatenaxe und einer Parallelen zur Abscissenaxe zusammensetzt.

§ 24. *Allgemeine graphische Behandlung der Bewegungen mit Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Die analytische Behandlung einer nicht stationären oder nicht-quasi-stationären Bewegung des Elektrons wird recht umständlich. Im Falle einer gleichförmig beschleunigten Bewegung habe ich bei Oberflächenladung die Untersuchung in § 17 meiner zweiten Note soweit durchgeführt, daß ich die Kraft $\mathfrak{F}$ ohne Integralzeichen durch elementare Funktionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung ausdrücken konnte. Bei Volumladung hat man entsprechend von der mehrfach genannten Gl. 64') meiner zweiten Note, für beliebige geradlinige Bewegungen gültig, auszugehn, indem man daselbst ein bestimmtes Bewegungsgesetz, z. B. gleichförmige Beschleunigung, zu Grunde legt. Die Rechnung wird recht unübersichtlich und insofern unbefriedigend, als sie im Speziellen bleibt: Jede

Abänderung des Bewegungsgesetzes würde eine Abänderung der Rechnung mit sich bringen.

Demgegenüber legt die Natur der Gl. 64′) als „Integralgleichung“ ein graphisches Verfahren nahe: die Bestimmung von $\mathfrak{F}$ auf Flächenmessung zurückzuführen. Auch übersieht man bei diesem Verfahren leichter, welchen Einfluß eine Abänderung des Bewegungsgesetzes auf den Wert von $\mathfrak{F}$ ausübt.

Für die graphische Behandlung ist es zunächst wichtig, alle vorkommenden Größen auf reine unbenannte Zahlen zurückzuführen. Indem wir gewissermaßen den Elektronendurchmesser $2a$ als Längeneinheit unserer Construktion einführen, ersetzen wir den „Lichtweg“ $c\tau$, den „Elektronenweg“ T, sowie die Aggregate $|c\tau \pm T|$ durch die folgenden Zahlengrößen:

$$113)\quad s = \frac{c\tau}{2a},\ S = \frac{T}{2a},\ y = \frac{c\tau + T}{2a} = S + s\ \ z = \frac{|c\tau - T|}{2a} = |S - s|.$$

Ferner benutzen wir, wie in den vorangehenden §§, die mit $\mathfrak{F}$ proportionale Zahlengröße:

$$\mathfrak{f} = -\frac{4\pi a^2}{3\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}.$$

Mittels der in Gl. (103) eingeführten Funktion g schreibt sich dann Gl. (64′) zunächst wie folgt:

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{10}\left(-\int_{s'}^{s''} \frac{ds}{S^2} + \int_0^1 \frac{d}{dy}\left(y^2 g(y)\right) \frac{dy}{S} - \int_0^{s'} g(y)\,\frac{y^2}{S^2}\,ds \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{d}{dz}\left(z^2 g(z)\right) \frac{dz}{S} + \int_0^{s''} g(z)\,\frac{z^2}{S^2}\,ds\right).$$

Damit alles maaßstäblich bequem wird, führen wir noch ein:

$$114)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left(y^2 g(y)\right) = 10y\,h(y),\ h(y) = 1 - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}y^2, \\ g(y) = 5k(y),\ k(y) = 1 - y + \dfrac{1}{5}y^2, \end{cases}$$

und in der gleichen Bedeutung $h(z)$ und $k(z)$. Man erhält dann $\mathfrak{f}$ aus den folgenden fünf Flächengrößen:

$$116)\quad \begin{cases} F_1 = \displaystyle\int_{s'}^{s''} \frac{ds}{S^2},\ F_2 = \int_0^1 h(y)\,\frac{y}{S}\,dy,\ F_3 = \int_0^{s'} k(y)\,\frac{y^2}{S^2}\,ds, \\ F_4 = \displaystyle\int_0^1 h(z)\,\frac{z}{S}\,dz,\ F_5 = \int_0^{s''} k(z)\,\frac{z^2}{S^2}\,ds \end{cases}$$

mittels der Formel:

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{10}F_1 + F_2 - \frac{1}{2}F_3 + F_4 + \frac{1}{2}F_5. \tag{116}$$

Von unseren fünf Flächengrößen sind F_1, F_3 und F_5 über der Abscisse s, F_2 und F_4 über der Abscisse y und z zu construiren. S geben wir uns graphisch als Funktion von s und können daraus leicht die graphische Abhängigkeit S von y oder S von z entnehmen. Es handle sich

a) um eine verzögerte Bewegung.

Die Curve, welche S als Funktion von s darstellt, ist dann nach der Abscissenaxe convex; sie ist insbesondere eine gewöhnliche Parabel zweiter Ordnung, wenn wir die Verzögerung $(-p)$ als constant annehmen. Die Geschwindigkeit zur Zeit $t-\tau$ wird in diesem Falle

$$v_{t-\tau} = v_t - p\tau$$

und der Elektronenweg

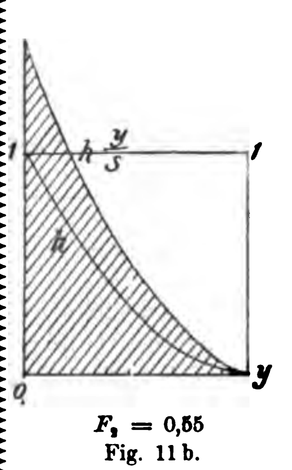
$$T = \int_{t-\tau}^{t} v_{t-\tau}\, d\tau = v_t\tau - \frac{p}{2}\tau^2,$$

somit

$$S = \frac{v_t}{c}s - \frac{ap}{c^2}s^2 = \beta s - \gamma s^2,\ \beta = \frac{v_t}{c},\ \gamma = \frac{ap}{c^2}. \tag{117}$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis β nehmen wir im Folgenden durchweg gleich 2 an; wir untersuchen also die Möglichkeit des Durchgangs durch die doppelte Lichtgeschwindigkeit, zunächst bei verzögerter, später bei beschleunigter Bewegung. Das „Beschleunigungsverhältnis" γ ist in der Figur 11 zunächst gleich -1 gewählt und wird im Folgenden variirt werden. Man beachte, daß $\gamma = -1$ schon eine äußerst starke Verzögerung bedeutet. Mit $\gamma = -1$ wird nämlich $p = -c\frac{c}{a}$, d. h. die Geschwindigkeit sinkt in derjenigen Zeit a/c, in der das Licht den Radius des Elektrons überstreicht, um c herab. Wir haben eine so starke Verzögerung deshalb gewählt, weil sich bei erheblich geringerer Verzögerung kein nennenswerter Unterschied gegen den Fall der stationären oder quasi-stationären Bewegung ergeben würde.

ächst zur Abscisse s die
$= S + s$, $z = S - s$. Aus
urch die Gerade $1 \ldots 1$ im
sgeschnitten. Wir bilden
ge die Curve $1/S^2$, welche
enzt. Die Fläche F_1 ist,
F_5 durch Schraffirung her-
o wie später $F_2 \ldots F_5$ mit
ist als Quadrat $0\ 1\ 1\ s$ in
den eingetragen.



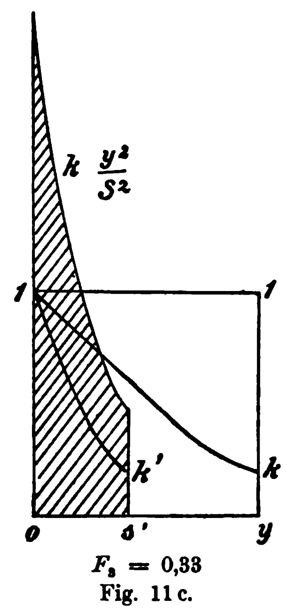
$F_2 = 0{,}55$
Fig. 11 b.

der Abscisse y für den Be-
vgl. Gl. (114). Aus h con-
rhältnis zusammengehöriger
y und S aus Fig. 11 a ab-
ltnis 0/0 wird und sich aus
t, liefert die Definition von
lle ($\beta = 2$):

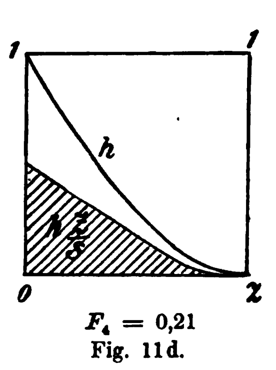
$$\frac{3}{2}.$$

scisse y zwischen 0 und 1 die
als Curve $1 \ldots k$. Mit Rück-
und s, der sich aus Fig. 11a er-
die Curve $1 \ldots k'$, welche $k(y)$

als Funktion von s darstellt, wobei die Endordinate dieser Curve zur Abscisse s' gehört. Schließlich sind die Ordinaten von $1 \ldots k'$ mit dem Verhältnis y^2/S^2 multiplicirt, welches wieder aus Fig. 11a zu entnehmen ist. Der Anfangswert dieses Verhältnisses für $s = 0$ beträgt $(3/2)^2$.



$F_3 = 0{,}33$
Fig. 11c.



$F_4 = 0{,}21$
Fig. 11d.

In Fig. 11d geht die Abscisse von $0 < z < 1$. Zunächst ist die Funktion $h(z)$ aufgetragen und aus ihr durch Mnltiplikation mit z/S, welches Verhältnis aus Fig. 11a zu entnehmen ist, die Curve hz/S gewonnen. Der Anfangswert des Verhältnisses z/S ist dabei in unserem Falle

$$\frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{1}{2}.$$

$F_5 = 0{,}11$
Fig. 11e.

Endlich ist in Figur 11e $k(z)$ als Funktion von z aufgetragen als Curve $1 \ldots k$ und mittels des aus Fig. 11a ersichtlichen graphischen Zusammenhanges zwischen z und s in die Curve $1 \ldots k'$, die $k(z)$ als Funktion von s darstellt, verwandelt, wobei die Endordinate zur Abscisse s'' gehört. Diese Curve ist schließlich mit dem Verhältnis z^2/S^2 multiplicirt, dessen Anfangswert $(\beta - 1)^2/\beta^2 = 1/4$ beträgt.

Aus den den Figuren beigeschriebenen Planimetrirungen unserer schraffirten Flächen ergibt sich nach (116)

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{10}\,0{,}31 + 0{,}55 - \frac{1}{2}\,0{,}33 + 0{,}21 + \frac{1}{2}\,0{,}11$$
$$= -0{,}62.$$

In ganz entsprechender Weise wurden für die Verzögerungen $\gamma = -5/3$ und $\gamma = -3$ die Werte

$$\mathfrak{f} = 0{,}63 \qquad \mathfrak{f} = 0{,}65$$

ermittelt, woraus bereits ersichtlich ist, daß mit zunehmender Verzögerung der auf das Elektron auszuübende Zwang nicht absondern zunimmt.

Wir besprechen noch den Grenzfall einer unendlich starken Verzögerung. In diesem Grenzfalle steigt die Curve für S in Fig. 11a unendlich stark an und die Grenzen s', s'' rücken zu Null zusammen. Ferner wird das Verhältnis y/S sowie z/S in der Grenze gleich 1 außer in der unmittelbaren Nähe von $s = 0$, wo unter der Annahme $\beta = 2$ nach wie vor wird $y/S = 3/2$, $z/S = 1/2$.

Man erkennt hieraus unmittelbar, daß die Flächen F_3 und F_5 verschwinden, da es sich bei ihnen um die Integration einer durchaus endlichen Funktion innerhalb eines in der Grenze verschwindend kleinen Intervalles handelt. Auch F_1 verschwindet, wie eine genauere Grenzbetrachtung zeigt. Dagegen bleiben die Flächen F_2 und F_4 endlich; setzt man in ihnen, was mit verschwindendem Fehler gestattet ist, $y/S = z/S = 1$, so werden sie:

$$F_2 = F_4 = \int_0^1 h(y)\,dy = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\,y + \frac{1}{2}\,y^2\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

und wir haben einfach

$$\mathfrak{f} = F_2 + F_4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Dies ist derselbe Kraftbedarf, der bei stationärer Bewegung zu unendlich großer Geschwindigkeit gehört. In der Tat ist es verständlich, daß bei unendlicher Verzögerung, wo unmittelbar vor dem betrachteten Zeitmomente die Geschwindigkeit ∞ geherrscht hat, diese bei der Berechnung der Kraft maßgebend ist. Eine einfache Ueberlegung macht jetzt auch plausibel, warum wir oben bei wachsender Verzögerung einen wachsenden Kraftbedarf ge-

funden haben. Wenn wir nämlich wie am Ende des vorigen § den ganzen Kraftbedarf aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, einer Trägheitswirkung und einer Strahlungswirkung, so wird hier ebenso wie früher im Falle von Ueberlichtgeschwindigkeit die Strahlungswirkung überwiegen. Da die letztere bei Ueberlichtgeschwindigkeit [1]) wesentlich durch die Geschwindigkeit bestimmt wird und da für ein vorangehendes Zeitintervall eine um so höhere Geschwindigkeit als mittlere Bewegungsgeschwindigkeit des Elektrons anzusetzen ist, je größer die Verzögerung ist, so wird mit wachsender Verzögerung diese mittlere Geschwindigkeit und daher auch ihre Strahlungswirkung sowie schließlich der gesamte Kraftbedarf wachsen.

Die Zunahme der Kraft mit zunehmender Verzögerung, die mit den Grundsätzen der gewöhnlichen Mechanik in so krassem Widerspruch steht, erklärt sich also unmittelbar aus den Grundtatsachen der Elektronentheorie: In der Elektronenmechanik kommt es nicht nur auf den augenblicklichen sondern im Allgemeinen auch auf den vorangehenden Bewegungszustand und bei Ueberlichtgeschwindigkeit namentlich auf die Geschwindigkeit desselben an. Wir haben es als eine Ausnahme oder besser als einen Grenzfall anzusehen, daß in der gewöhnlichen Mechanik (Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit) die Betrachtung der augenblicklichen Beschleunigung ausreicht und daß die augenblickliche oder die vorangehende Geschwindigkeit belanglos wird. Schon in den einfachsten quasi-stationären Fällen der Elektrodynamik beliebiger Unterlichtgeschwindigkeiten tritt die augenblickliche Geschwindigkeit in die Berechnung des Kraftbedarfs ein, wobei allerdings die augenblickliche Beschleunigung maßgebend bleibt. In der Elektrodynamik der Ueberlichtgeschwindigkeiten dagegen bemißt sich der Kraftbedarf wesentlich nach der augenblicklichen und vorangehenden Geschwindigkeit, während die Größe der Beschleunigung oder Verzögerung verhältnismäßig einflußlos ist.

Hiermit hängt die Folgerung zusammen, daß es bei Ueberlichtgeschwindigkeit auf die genauere Form des Bewegungsgesetzes, das wir zu Grunde legen mögen, garnicht wesentlich ankommt, daß nämlich der Kraftbedarf für eine ungleichförmig verzögerte Bewegung der Größenordnung nach gleich ausfallen wird mit demjenigen für gleichförmige Verzögerung, vorausgesetzt, daß in beiden Fällen für das in Betracht kommende vorangehende

---

1) Bei Unterlichtgeschwindigkeit ist sie im Gegenteil von der Geschwindigkeit nur wenig abhängig und in den einfachsten quasi-stationären Fällen dem Quadrat der Beschleunigung proportional (Larmor); vgl. auch Gl. (123) der vorliegenden Note.

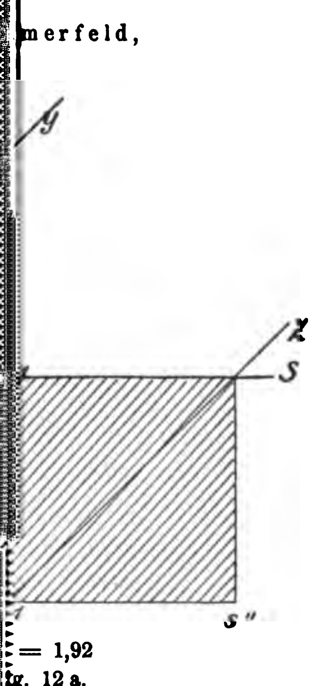
Zeitintervall die Bewegungsgeschwindigkeit im Mittel die gleiche ist. In der Tat, denken wir uns in Fig. 11a die Curve für S statt durch eine Parabel durch eine anders geartete Curve von im Mittel gleichem Anstieg gegeben, so wird sich an den Flächen $F_1 \ldots F_5$ nur wenig ändern und der gesamte Kraftbedarf $\mathfrak{f}$ wird ungefähr der gleiche bleiben. Insbesondere ist es ausgeschlossen, daß man bei irgend einem Bewegungsgesetz, bei welchem das Elektron sich von Geschwindigkeiten mit $\beta > 2$ auf $\beta = 2$ verzögert, zu dem Werte $\mathfrak{f} = 0$ gelangen könnte. Mit anderen Worten: Es giebt keine mögliche kräftefrei verzögerte Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit.

b. Beschleunigte Bewegung.

Wenn die Geschwindigkeit mit wachsender Zeit zunimmt, also $v_{t-\tau}$ mit wachsendem τ abnimmt, so wird die Curve S über der Abscissenaxe s dieser die concave Seite zukehren, da die Neigung ihrer Tangente gegen die Abscissenaxe mit $v_{t-\tau}$ proportional ist. Setzen wir insbesondere constante Beschleunigung voraus, so gilt wieder Gl. (117). In den folgenden Figuren ist die sehr starke Beschleunigung $\gamma = +1$ angenommen und als Geschwindigkeitsverhältnis $\beta = 2$ beibehalten, so daß $S = 2s - s^2$. S erreicht sein Maximum für $s = 1$, wo $S = 1$ wird. Wegen der horizontalen Tagente im Punkte $s = S = 1$ ist die zugehörige Geschwindigkeit gleich Null. Die Tangentenneigung ist gleich 1 und die Geschwindigkeit gleich c für $s = \frac{1}{2}$ oder $c\tau = a$. Bei unserem Bewegungsgesetz befindet sich das Elektron also zur Zeit $s = 1$, d. i. $c\tau = 2a$ in Ruhe, wird in solchem Maße beschleunigt, daß es zur Zeit $s = \frac{1}{2}$, d. i. $c\tau = a$ durch die Lichtgeschwindigkeit hindurchgeht und für $s = 0$ die doppelte Lichtgeschwindigkeit erreicht hat. Die Bedeutung der Zeichen y, z, h, k, $\mathfrak{f}$ ist die frühere, in den Gl. (113)—(116) angegebene.

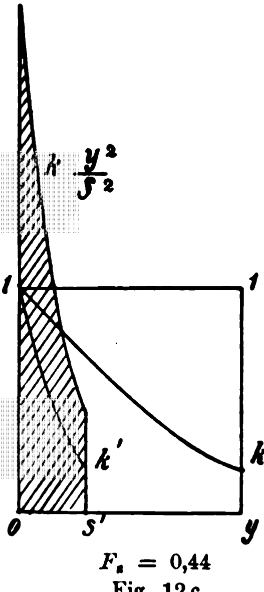
Wir beschreiben jetzt die Figuren 12a bis 12e soweit dieses nach dem früher Gesagten noch erforderlich erscheint.

In Fig. 12a läuft von 0 die Curve S aus, zuerst als Parabel bis zu dem dem Punkte 0 gegenüberliegenden Eckpunkt des Einheitsquadrates und weiterhin als horizontale Gerade. Die Curve $y = S + s$ ist für $s < 1$ eine steilere Parabel, für $s > 1$ eine unter 45° geneigte Gerade; ähnlich die Curve $z = |S - s|$, welche für $s < 1$ eine flache Parabel und weiterhin eine unter 45° geneigte Gerade ist. Die Linie $1/S^2$ erhebt sich über die Linie $1 \ldots 1$ da, wo $S < 1$ und fällt mit $1 \ldots 1$ zusammen da, wo $S = 1$. Sie begrenzt unsere schraffirte Fläche nach oben hin.

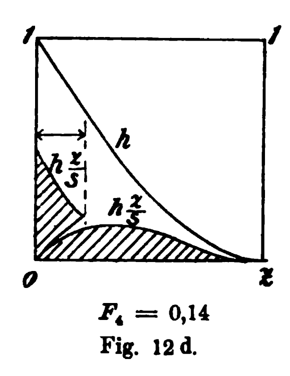


$= 1{,}92$
g. 12 a.

lichkeit mit 11b. Die Curve h in
tisch, die Curve hy/S vermöge des
valle 0 bis s' nur wenig verschieden.
welche sich nur darin von Fig. 11c
$0 \ldots s'$ jetzt etwas länger ausfällt

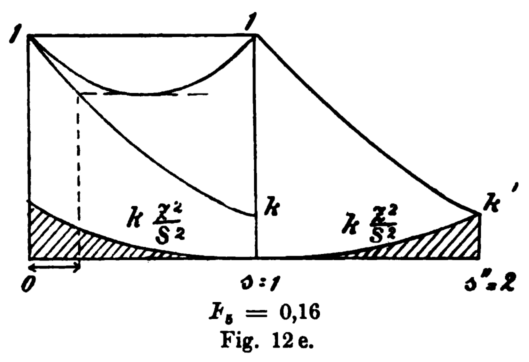


$F_s = 0{,}44$
Fig. 12c.



$F_4 = 0{,}14$
Fig. 12 d.

Dagegen macht sich in Fig. 12d der Umstand bemerklich, daß (vgl. Fig. 12a) S und s keine eindeutigen Funktionen von z, unserer Abscisse in Fig. 12d, sind. In Fig. 12a wächst z zunächst von 0 bis zu einem Maximum, der Pfeilhöhe der flachen Parabel, um dann wieder zu Null abzunehmen. Aehnlich verhält sich z/S, mit welchem Verhältnis wir die Ordinaten von h in Fig. 12d zu multipliciren haben. Dabei entsteht das krummlinige Dreieck, welches sich in Fig. 12d an die Ordinatenaxe anlegt; der Abstand der rechten Ecke dieses Dreiecks von der Ordinatenaxe ist gleich der genannten Pfeilhöhe. Der weitere geschwungene Verlauf der Begrenzung der schraffirten Fläche in Fig. 12d entspricht dem geradlinigen Verlauf der Linie $1 \ldots z$ in Fig. 12a.



$F_5 = 0{,}16$
Fig. 12 e.

Auch der Charakter der Fig. 12e wird dadurch bestimmt, daß S und s keine eindeutigen Funktionen von z sind. Tragen wir uns in $1 \ldots k$ die Funktion $k(z)$ über der Abscisse $z = 0$ bis $z = 1$ ein, so haben wir diese in die Linie $1 \ldots 1 \ldots k'$ zu verwandeln, die k als Funktion von s darstellt. Der Ast $1 \ldots 1$ derselben ist gegen seine Mitte symmetrisch; es liegt dieses daran, daß, während s von 0 bis 1 läuft, z von 0 bis zu der vorher genannten Pfeilhöhe der Parabel in Fig. 12a ansteigt und dann wieder auf 0 zurückgeht. Wie die Durchhängung des Astes $1 \ldots 1$ in Fig. 12e mit jener Pfeilhöhe zusammenhängt, ist in der Figur angedeutet. Die Ordinaten von $1 \ldots 1 \ldots k'$ sind dann noch mit z^2/S^2 zu multipliciren, welches Verhältnis für $s = 0$ gleich $(\beta - 1)^2/\beta^2 = 1/4$, für $s = 1$ gleich Null und für $s = s'' = 2$ (vgl. Fig. 12a) gleich 1 wird.

Der gesamte Kraftbedarf berechnet sich nun für unsere im

Verhältnis $\gamma = +1$ beschleunigte Bewegung beim Durchgange durch die doppelte Lichtgeschwindigkeit ($\beta = 2$) zu

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{10}1{,}92 + 0{,}70 - \frac{1}{2}0{,}44 + 0{,}14 + \frac{1}{2}0{,}16$$
$$= 0{,}51$$

Uebrigens sind die hier beigegebenen Figuren Verkleinerungen nach Originalfiguren, aus denen die Planimetrirung der Flächen mit größerer Genauigkeit möglich war.

In ganz entsprechender Weise habe ich eine Reihe anderer Beschleunigungen graphisch behandelt, von denen ich folgende mitteile:

$$\gamma = \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 5 \quad ,$$
$$\mathfrak{f} = 0{,}39 \quad , \quad 0{,}34 \quad , \quad 0{,}15.$$

Wir haben also mit wachsender Beschleunigung einen abnehmenden Kraftbedarf und für keine der hier betrachteten schon außerordentlich großen Beschleunigungen eine kräftefreie, ohne äußeren Zwang mögliche Bewegung. Daß dieses Resultat von der in den Figuren zu Grunde gelegten Gleichförmigkeit der Beschleunigung unabhängig ist, liegt auf der Hand.

Der Grenzfall $\gamma = \infty$ erledigt sich sehr leicht rechnerisch. Denkt man sich in Fig. 12a die Krümmung der für S gewählten Parabel wachsen, so reducirt sich dieselbe für $\gamma = \infty$ auf den Punkt 0 und die Linie S auf die Abscissenaxe. Gleichzeitig wird $y = z = s$, $s' = s'' = 1$. Diese erste Näherung reicht aber nicht aus, weil wegen des verschwindenden Nenners S alle unsere Flächen unendlich werden würden. Wir rechnen daher genauer, indem wir, unter ω eine sehr große positive Zahl verstanden, setzen:

$$\gamma = \omega, \; S = \beta s - \omega s^2.$$

Der Scheitel der Parabel S hat die Abscisse $s_0 = \beta/2\omega$ und die Ordinate $S_0 = \beta^2/4\omega$. Die Linien y und z, welche außer in nächster Nähe des Nullpunktes geradlinig unter 45° verlaufen, haben in diesem Teile die Ordinaten $s \pm \beta^2/4\omega$. Für ihre Schnittpunkte mit einer Parallelen zur Abscissenaxe im Abstande 1 ergiebt sich daher: $s' = 1 - \beta^2/4\omega$, $s'' = 1 + \beta^2/4\omega$. Hiernach wird

$$F_1 = \int_{s'}^{s''} \frac{ds}{S^2} = \frac{s'' - s'}{S_0^2} = \frac{8\omega}{\beta^2}$$

Bei der Bestimmung von F_3 zerlegen wir die Integration von $y = 0$ bis $y = 1$ in zwei Teile, welche durch den dem Werte s_0 entsprechenden Wert y_0 getrennt werden:

$$F_3 = \int_0^1 h(y)\frac{y}{S}\,dy = \int_0^{y_0} h(y)\frac{y}{S}\,dy + \frac{1}{S_0}\int_{y_0}^1 h(y)y\,dy.$$

Der erste Teil verschwindet, weil in diesem y/S durchweg kleiner als $y_0/S_0 = (\beta+2)/\beta$ ist und y_0 mit wachsendem ω verschwindet. Genau dieselbe Ueberlegung, auf F_4 angewandt, zeigt, daß bis auf einen mit ω verschwindenden Betrag

$$F_3 = F_4 = \frac{4\omega}{\beta^2}\int_0^1 h(y)y\,dy = \frac{1}{10}\,\frac{4\omega}{\beta^2}.$$

Entsprechend werden F_3 und F_5 unter sich gleich. Mithin wird der Wert von $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{10}\,\frac{8\omega}{\beta^2} + \frac{1}{10}\,\frac{4\omega}{\beta^2} - F_3 + \frac{1}{10}\,\frac{4\omega}{\beta^2} + F_5 = 0.$$

Dieses Resultat war vorauszusehn. Das unendlich beschleunigte Elektron, welches zu der Zeit, da es das Geschwindigkeitsverhältnis β erlangt, überhaupt noch keinen endlichen Weg zurückgelegt hat, verhält sich für die Berechnung der zu jener Zeit erforderlichen Kraft ebenso wie das ruhende Elektron. In diesem Grenzfall ist es besonders anschaulich, daß die besondere analytische Form des Beschleunigungsgesetzes, das wir zu Grunde legen mögen, keine Rolle spielen kann.

§ 25. *Zusammenfassung. Die Bedeutung der negativen Maße bei Quasi-Beschleunigung.*

Die bisherigen Ergebnisse werden durch Fig. 13 übersichtlich zusammengefaßt. Die Abscisse γ dieser Figur ist mit der z. B constant gedachten Beschleunigung oder Verzögerung, die Ordinate $\mathfrak{f}$ mit derjenigen äußeren Kraft $\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}$ proportional, welche im Augenblicke des Durchganges durch die doppelte Lichtgeschwindigkeit bei der betr. Beschleunigung oder Verzögerung hinzukommen muß, um die vorausgesetzte Bewegung zu ermöglichen. Die Figur stellt also nicht wie Fig. 9 den Verlauf der Kraft bei ein und demselben Bewegungsgesetz zu verschiedenen Zeiten, sondern ihr Verhalten bei verschiedenen Bewegungsgesetzen jedesmal in demjenigen Zeitpunkte dar, wo die Geschwindigkeit den

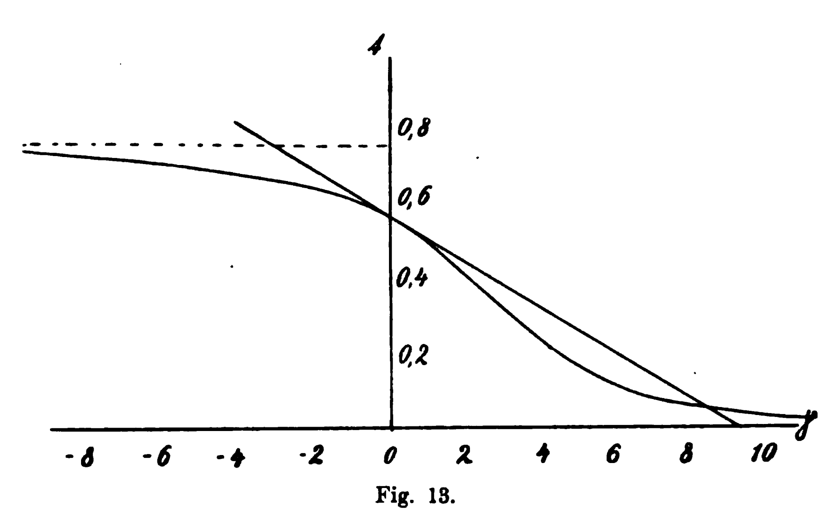


Fig. 13.

gleichen Wert $2c$ hat. Es ist mehrfach hervorgehoben worden, daß wir wesentlich dieselben Verhältnisse gefunden hätten, wenn wir statt der constanten eine variable Beschleunigung zu Grunde gelegt hätten; auch würde sich die Figur nur unwesentlich ändern, wenn wir jedesmal statt der doppelten irgend eine andere Ueberlichtgeschwindigkeit betrachtet hätten.

Wir vervollständigen die früheren Angaben dadurch, daß wir den Schnitt der $\mathfrak{f}$-Curve mit der Ordinatenaxe berechnen. Da hier $\gamma = 0$, so handelt es sich um den Kraftbedarf der stationären Bewegung. Dieser beträgt nach meinen früheren Ergebnissen (Gl. (65)) für $\beta = 2$:

$$\mathfrak{f} = -\frac{4\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = \frac{3}{4}\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2} = \frac{9}{16} = 0{,}56$$

und ordnet sich naturgemäß stetig zwischen die $\mathfrak{f}$ für $\gamma \lesseqgtr 0$ ein. Auch an der Stelle $\gamma = 0$ fällt die $\mathfrak{f}$-Curve mit steigendem γ, wie überall sonst. Die Neigung der Tangente an dieser Stelle liefert ein direktes Maß für das, was wir die elektromagnetische longitudinale Maße zu nennen haben. In der Tat, vergleichen wir die stationäre Bewegung $\gamma = 0$ mit einer benachbarten quasistationären Bewegung vom Beschleunigungsverhältnis $d\gamma$, sowie die zugehörigen Werte des Kraftbedarfes $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$ mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + d\mathfrak{f}$, so ist $\mathfrak{f}_0$ der Strahlungs- oder Geschwindigkeits-Bestandteil, $d\mathfrak{f}$ der Trägheits- oder Beschleunigungs-Bestandteil der Kraft. Das Verhältnis $d\mathfrak{f}/d\gamma$ von Beschleunigungskraft durch Beschleunigung kann daher als die scheinbare Masse gedeutet werden. Daß dieselbe negativ ist, geht aus dem Verlauf unserer $\mathfrak{f}$-Curve, ins-

besondere aus ihrer Tangentenneigung für $\gamma = 0$ unmittelbar hervor und verliert jeden Schein des Absonderlichen.

Auch eine frühere Rechnung[1]), die zu Gl. (78′) meiner zweiten Note führte, wird durch unsere jetzige Figur geklärt. Wir extrapolirten dort die Formeln der quasistationären Bewegung soweit, daß wir scheinbar zu einer kräftefreien Ueberlichtgeschwindigkeitsbewegung gelangten. Der durch Gl. (78′) gegebene Wert von γ wird, wenn wir wieder $\beta = 2$ annehmen, $\gamma = 9{,}3$. In unserer jetzigen Figur bedeutet dieses, daß wir den wirklichen Verlauf der $\mathfrak{f}$-Curve extrapolatorisch durch ihre Tangente im Punkte $\gamma = 0$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0$ ersetzten und den Schnittpunkt dieser Tangente mit der positiven Abscissenaxe als eine scheinbare kräftefreie Bewegung ansprechen. Daß dieses nicht zulässig, daß nämlich der so erhaltene Schnittpunkt weit außerhalb des Gültigkeitsgebietes der quasistationären Formeln liegt, wurde bereits in meiner zweiten Note betont und geht aus unserer jetzigen Figur aufs Deutlichste hervor. In Wirklichkeit erreicht unsere $\mathfrak{f}$-Curve die Abscissenaxe nicht bei $\gamma = 9{,}3$ sondern erst bei $\gamma = \infty$, welch letzterer Fall aber ohne physikalisches Interesse ist.

§ 26. *Die Ablenkbarkeit der Lichtgeschwindigkeits-Elektronen.*

Daß die Gesetze der quasistationären Bewegung auf den Fall der Lichtgeschwindigkeit selbst nicht übertragen werden dürfen, ist wohlbekannt. Im Falle der quasistationären Kreisbewegung folgt es unmittelbar aus dem Kriterium (88) meiner zweiten Note, welches für $v = c$ selbst bei beliebig großem Bahnradius r nicht mehr erfüllt ist. Man muß also auf die genauen Ausdrücke der Kraft $\mathfrak{F}$, im Falle gleichförmiger Volumladung, die wir zu Grunde legen wollen, Gl. (84′) und (85′) meiner zweiten Note, zurückgehen und muß diese den Umständen entsprechend neu entwickeln.

Folgendes sei vorausgeschickt: Gerade bei einer Convektivbewegung mit Lichtgeschwindigkeit muß der Anfangszustand des Elektrons sorgsam beachtet werden, weil sich die Wirkungen desselben mit derselben Geschwindigkeit wie die Convektion fortpflanzen. Wir bestimmen daher: Das Elektron sei bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe, werde plötzlich auf Lichtgeschwindigkeit gebracht und beschreibe bis zur Beobachtungszeit t einen Kreisbogen vom

1) Bemerkt sei, daß in meiner früheren Note γ durch $2ap/c^2$ definirt war, während wir es jetzt bequemer fanden $\gamma = ap/c^2$ zu setzen. In Gl. (78′) ist daher γ durch $\gamma/2$ zu ersetzen, wenn wir jene Gl. in die jetzigen Bezeichnungen übertragen wollen.

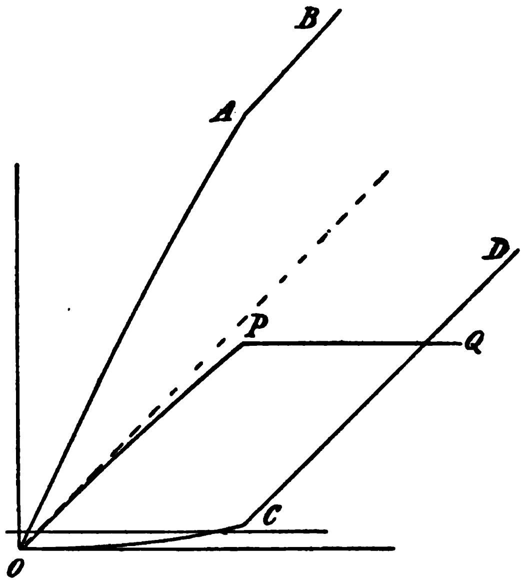


Fig. 14.

Radius r (groß gegen a); die Sehne des so durchlaufenden Kreisbogen-Weges heiße T_0. Trägt man sich diesen Sachverhalt nach Art der Fig. 8 auf, so erhält man für T einen Linienzug OPQ von folgender Beschaffenheit: OP ist eine schwach gekrümmte Sinuslinie, deren Tangente in O mit der Geraden $c\tau$ zusammenfällt, also unter 45° ansteigt, PQ ist eine horizontale Gerade (vgl. Fig. 14). Die Abscisse von P ist ct, die Ordinate T_0. Die Linienzüge OAB und OCD haben teils sinus-förmigen Verlauf (OA, OC) teils geradlinigen (AB, CD). Schneidet man OAB und OCD mit einer Parallelen zur Abscissenaxe im Abstande $2a$, so erhält man die in (84'), (85') vorkommenden Integrationsgrenzen τ', τ''. Hinsichtlich τ'' sind zwei Fälle möglich, je nachdem jene Parallele die sinus-förmige Linie OC oder die Gerade CD trifft, welche Fälle durch die folgenden Bestimmungsgleichungen gekennzeichnet werden (vgl. den Ausdruck (81') für T, der für $\tau < t$ gilt, während für $\tau > t$ wird $T = T_0 = \frac{2c}{n}\sin\frac{nt}{2}\Big)$:

$$118)\quad \begin{cases} c\left(\tau' + \frac{2}{n}\sin\frac{n\tau'}{2}\right) = 2a \\ c\left(\tau'' - \frac{2}{n}\sin\frac{n\tau''}{2}\right) = 2a < c\left(t - \frac{2}{n}\sin\frac{nt}{2}\right) \text{ oder} \\ c\left(\tau'' - \frac{2}{n}\sin\frac{nt}{2}\right) = 2a > c\left(t - \frac{2}{n}\sin\frac{nt}{2}\right). \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

(119) $\xi = \frac{n}{2}\tau,\ \xi' = \frac{n}{2}\tau',\ \xi'' = \frac{n}{2}\tau'',\ \eta = \frac{n}{2}t,\ \alpha = \frac{an}{c} = \frac{a}{r}$

gehen die Gl. (118) über in:

$$\xi' + \sin\xi' = \alpha, \quad \xi'' - \sin\xi'' = \alpha < \eta - \sin\eta \quad \text{oder}$$
$$\xi'' - \sin\eta = \alpha > \eta - \sin\eta.$$

α ist nach Annahme sehr klein. Mithin wird auch ξ', ξ'' und allgemein ξ sehr klein; indessen sind ξ' und ξ'' von verschiedener Ordnung. Indem man den Sinus entwickelt, erhält man die Näherungsformeln:

120) $$\xi' = \frac{\alpha}{2},\ \xi''^3 = 6\alpha \quad \text{falls } \eta^3 > 6\alpha \quad \text{oder}$$
$$\xi'' = \alpha + \eta \quad \text{„} \quad \eta^3 < 6\alpha.$$

Wir wollen annehmen, daß t hinreichend groß ist, so daß der erste Fall $\eta^3 > 6\alpha$ vorliegt, welche Annahme später zu rechtfertigen sein wird.

Die in die Bahnrichtung fallende Componente von $\mathfrak{F}$. Wir setzen in (84') $v = c$, drücken $\cos n\tau$ durch $\sin\frac{n\tau}{2}$ aus und machen $\sin\frac{n\tau}{2} = \frac{n\tau}{2} = \xi$, $\cos\frac{n\tau}{2} = 1$; für die Funktion f führen wir nach (102) und (103) g ein. Dann folgt aus (84')

$$-\frac{20\pi ac}{3\varepsilon^2 n}\mathfrak{F}_s = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

$$\mathrm{I} = \int_{\xi'}^{\xi''} d\xi = \xi'' - \xi'$$

$$\mathrm{II} = \frac{n}{4c}\int_0^{2a}\left(\frac{x}{2}\frac{d(x^2 g)}{dx} + x^2 g\right)dx = \frac{n}{8c}\left\{(x^2 g)_{2a} + \int_0^{2a} x^2 g\,dx\right\},$$

wobei $x = c\tau + T = 2c\tau$,

$$\mathrm{III} = \frac{n}{6c}\int_0^{2a}\left(\left(\frac{24c^2 x}{n^2}\right)^{1/3}\frac{d(x^2 g)}{dx} - x^2 g\right)\left(\frac{24c^2 x}{n^2}\right)^{1/3}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{n}{6c}\left\{\left(\left(\frac{24c^2 x}{n^2}\right)^{2/3} xg\right)_{2a} + \int_0^{2a}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{24c^2 x}{n^2}\right)^{2/3} - \left(\frac{24c^2 x}{n^2}\right)^{1/3} x\right) g\,dx,\right.$$

wobei $x = c\tau - T = \frac{n^2}{24c^2}(c\tau)^3$.

fliegenden Elektron erzeugt. Aus (125) und (122) folgt nämlich durch Division:

$$\frac{H}{H'} = \frac{3}{2\log(1/\alpha)}\left(-\frac{1}{\beta} + \frac{1+\beta^2}{2\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{6{,}44}{\log(1/\alpha)}.$$

Für den Elektronenradius a kann man den Wert $a = 10^{-13}$ cm zu Grunde legen, daher wird $1/\alpha = r/a = 10^{16}$, $\log(1/\alpha) = 36{,}84$ und

$$H' = \frac{36{,}84}{6{,}44} H = 5{,}7\, H.$$

Es genügt also eine mäßige Steigerung des Magnetfeldes, um die Lichtgeschwindigkeits-Elektronen ebenso stark abzulenken, wie die schnelleren Unterlichtgeschwindigkeits-Elektronen.

Daß diese Rechnung mit unserer durchweg festgehaltenen Annahme $\eta^3 > 6\alpha$ verträglich ist, erkennt man leicht wie folgt. Es war

$$\eta = \frac{nt}{2} = \frac{ct}{2r} = \frac{l}{2r},$$

wenn l die Bahnlänge vom Ursprung des Lichtgeschwindigkeits-elektrons bis zum Beobachtungspunkte ist. Nun besagt unsere Bedingung mit $r = 10^3$, $\alpha = 10^{-16}$

$$l^3 > 48 \,.\, 10^{-7}, \quad l > 1{,}7 \,.\, 10^{-2} \text{ cm};$$

sie ist also schon in nächster Nähe des Ursprungs erfüllt.

Wir heben, wie schon in der Einleitung hervor, daß die hier behandelte Bewegung außer dem transversalen, ablenkenden Felde, auch ein longitudinales, antreibendes Feld erfordert. Letzteres ist sogar stark überwiegend. Denn das Verhältnis beider Felder, welches gleich $\mathfrak{F}_s/\mathfrak{F}_n$ ist, beträgt nach (121) und (122) mit $\alpha = 10^{-16}$:

$$\frac{3}{2}\,\frac{81}{56}\,\frac{1}{\log(1/\alpha)}\sqrt[3]{\frac{4}{3\alpha}} = 1{,}4 \,.\, 10^4.$$

Ohne diese longitudinale Kraftzufuhr ist die gleichmäßige Kreisbewegung mit Lichtgeschwindigkeit in der hier vorausgesetzten Weise vom Standpunkt der Elektronen-Dynamik unmöglich. Auch unsere Behauptung der Ablenkbarkeit der Lichtgeschwindigkeits-Elektronen will so verstanden sein, daß diese Ablenkbarkeit erfolgt unter dem Einfluß eines transversalen und eines gleichzeitigen sehr viel stärkeren longitudinalen Kraftfeldes.

Welche Bewegung unter dem alleinigen Einfluß eines transversalen, magnetischen Kraftfeldes eintritt, läßt sich aus den vor-

stehenden Rechnungen nicht schließen sondern nur vermuten. Am nächsten liegt es, anzunehmen, daß die Abwesenheit der longitudinalen Kraftzufuhr eine Abnahme der Geschwindigkeit zur Folge haben wird, derart, daß aus dem Lichtgeschwindigkeits- ein Unterlichtgeschwindigkeits-Elektron wird. Dabei ist der folgende Gegensatz hervorzuheben: Die stationäre Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit kann, ohne äußere Störung, dauernd bestehen, ebenso wie die stationäre Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit. Kommt aber eine transversale Kraft hinzu, so bewirkt diese nicht nur eine Ablenkung in normaler Richtung sondern auch, wenn unsere vorstehende Annahme zutrifft, eine Abnahme der Bahngeschwindigkeit. Die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit erscheint in diesem Sinne als labil.

Zusatz bei der Korrektur. E. Wiechert hät inzwischen auf sehr überzeugende Weise dargetan, daß man von einer elektromagnetischen Trägheit bei Ueberlichtgeschwindigkeit nicht mehr reden könne, was mit den Ergebnissen unserer §§ 24 und 25 übereinstimmt. Er schließt dieses aus dem Umstande, daß für die von ihm betrachteten geladenen Körper die hemmende Kraft des Eigenfeldes vollständig unabhängig ist sowohl von der Geschwindigkeit wie von der Beschleunigung, was mit unseren Erörterungen zunächst in Widerspruch zu stehen scheint. Hierzu ist zu bemerken: Wiechert läßt die Gestalt seiner Körper in gewisser Weise von der Geschwindigkeit oder von einer unteren Geschwindigkeitsgrenze abhängen und erhält darauf eine Unabhängigkeit des elektromagnetischen Widerstandes von der Geschwindigkeit. Die von uns zu grunde gelegte Kugelgestalt entspricht nicht den Wiechertschen Bedingungen; daher hängt bei dieser der elektromagnetische Widerstand tatsächlich von der Geschwindigkeit etc. ab.

Wie ein planetarischer Urnebel in Rotation kommen kann.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Mai 1905.

Kant nahm bekanntlich zur Erklärung der Rotation seines planetarischen Urnebels einen excentrischen Fall seiner Theile nach dem Centrum an. Laplace wußte, daß innere Bewegungen ein Ganzes nicht bewegen können und nahm deshalb die Rotation seines Urnebels als eine gegebene an. Meines Wissens ist seitdem die Frage nach der Ursache solcher Rotation nicht erörtert worden.

Da innere Bewegungen ausgeschlossen sind, können nur äußere Bewegungen in Betracht kommen, Bewegungen andrer Weltkörper, welche in grösserer oder geringerer Entfernung an der fraglichen Masse vorbeigehn und auf diese eine Anziehung üben. Die anziehenden Kräfte aber können nur die allgemeine Massenanziehung oder die Elektricität sein.

Wann muß nun in Folge der Massenanziehung der Urnebel in Rotation kommen? Wenn er von vornherein nicht völlig rund oder homogen ist, oder in Folge selbiger Anziehung unrund und unhomogen geworden ist. Es ist wohl zweifellos, daß er sich nach dem Weltkörper hin in die Länge zieht, und daß nach der Stelle, welche diesem am nächsten liegt, mehr Masse hinfließt. In beiden Fällen muß besagte Stelle dann dem Weltkörper, wenn er vorbei geht, folgen und so eine Drehung bewirken.

Und wann muß in Folge elektrischer Anziehung der Nebel in Rotation kommen? Unter gleichen Bedingungen, wie vorher, aber er müßte es auch, wenn er völlig rund und homogen bliebe, sofern er nur halbleitend ist. An der Stelle, welche dem elektrischen Körper zunächst liegt, entsteht die entgegengesetzte Elektricität, und geht dieser schneller vorbei, als jene sich in der Masse

bewegen kann, muß die Stelle dem Körper folgen und so eine Drehung bewirken.

Da ich mit der Massenanziehung nicht experimentieren konnte, versuchte ich es mit der Elektricität. Mit Hülfe eines größern aus Glas und Ebonit bestehenden Statives hing ich an einem ungedrehten Coconfaden[1]) eine 5 Cm. große, äußerst dünne Glaskugel auf und führte seitlich in 30 Cm. Abstand, die Kante voran, eine längliche Ebonitplatte vorbei. War diese unelektrisch, so bewegte sich die Kugel wenig oder garnicht, auch wenn ich den Versuch öfter wiederholte, weil die Luft wenig in Bewegung kam. War sie elektrisch, und war die Kugel vorher etwas angefeuchtet, so trat in vielen Fällen, aber nicht in allen, die erwartete Drehung ein. Der Effect war also nicht sicher, und das kam daher, daß die Kugel nicht ganz rund und homogen war und so der Schwerpunkt nicht in der Mitte lag. Der Punkt der Kugelfläche, welcher diesem ferner war, bewegte sich nach der Platte hin, und je nachdem er links oder rechts lag, mußte der Drehungssinn ein andrer werden. Dann rotierte die Kugel aber in diesem Sinne weiter auch der Verschiebung der Platte entgegen, weil sie nicht leicht genug war.

In Folge dessen ersetzte ich, da es im Grunde gleich war, ob die rotierende Masse kugelförmig oder flach sei, die Kugel durch eine genau rund geschnittene 12 Cm. große Papierscheibe und brachte den Coconfaden genau in der Mitte derselben an. Natürlich lag die Scheibe horinzontal. Hiermit gelang der Versuch sicher. Die Scheibe kam immer in die richtige Drehung. Als ich dann aber eine Stanniolscheibe darunter klebte, drehte sie sich nicht. Nun konnte sich, während die Platte vorbeiging, die Elektricität in der Scheibe verschieben, ohne daß diese in Drehung kam.

Ein Urnebel kann also leicht in Rotation kommen, sei es durch die allgemeine Massenanziehung, sei es durch elektrische Fernwirkung, sei es durch beide zugleich. Für die Ausschließung der Elektricität liegt jedenfalls kein Grund vor, seit wir von der Sonne und den Cometen so gut wie sicher wissen, daß sie elektrisch sind.

---

1) Ich erhielt solche Fäden von der Firma Hartmann u. Braun in Frankfurt-Bockenheim. Ich erwähne dies, da man oft undrellierte Coconfäden gebraucht und die käuflichen meistens drelliert sind.

Weshalb die Sterne als Sterne erscheinen.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Mai 1905.

Soviel ich weiß, ist es noch nicht bekannt, weshalb die Sterne, wenn man sie mit bloßem Auge ansieht, als Sterne erscheinen d. h. in Form einer Figur, welche man auch sonst einen Stern zu nennen pflegt. In Lehrbüchern der Physik und Astronomie findet man hierüber kein Wort, und doch ist die Erscheinung nicht so selbstverständlich, daß man darüber schweigen dürfte. Ich glaubte einmal, die Strahlenbildung sei ein Interferenzphänomen daher rührend, daß die Pupille, weil von einem Muskel begrenzt, keinen glatten Umriß habe und sich etwa verhalte, wie ein eckiges oder rissiges Loch. Aber ich fand, als ich in Blech völlig runde Löcher bohrte, die etwas kleiner als die Pupille waren, und hindurchsah, dasselbe Bild. Da begann ich die Sterne lange und aufmerksam zu betrachten, indem ich mich verflossenen Winter stundenlang ins Freie setzte und Venus und Jupiter, welche nahe bei einander standen, fixierte und mit einander und mit andern Sternen verglich.

Hierbei fand ich die folgenden Thatsachen heraus. Alle Sterne zeigen genau dieselben Strahlen, nur daß sie bei den helleren deutlicher und wohl auch etwas länger sind. Diese Strahlen sind keineswegs regelmäßig, sondern bald mehr bald weniger krumm, und an einzelnen Stellen laufen Strahlen über andere Strahlen fort. Mit dem einen Auge sieht man andre als mit dem andern, aber wie man sie heute sieht, sieht man sie der Hauptsache nach morgen, nur daß zeitweise bald die einen bald die anderen etwas deutlicher sind. Momentan hat man freilich zeitweise ein andres Bild, aber das ist nur die Folge der mouches

volantes, welche bald hier, bald dort runde dunkle Flecke erzeugen. Verscheucht man sie durch eine Bewegung des Auges, so sieht man immer wieder das frühere Bild. Neigt man den Kopf seitlich, so neigen sich die Strahlen mit; ein Strahl, der vorher oben stand, liegt jetzt horizontal. Führt man eine Karte mit einem Nadelstich über die Pupille fort, so sieht man nur einen schwach leuchtenden Punkt, der während der Verschiebung bald heller bald dunkler wird. Nimmt man die Brille ab, so werden die Strahlen länger, natürlich auch dunkler, in der Mitte aber zeigen sie dieselbe Gestalt.

Aus Alledem schließe ich, daß die Ursache der Strahlenbildung nicht in den Sternen, sondern in unserem Auge liegt und zwar darin, daß die Mitte der Netzhaut nicht völlig homogen in der Empfindung ist. Wegen unvollkommener Accommodation wird kein Punkt, sondern eine kleine runde Fläche bestrahlt, aber in dieser giebt es Linien, im Ganzen radial verlaufend, welche empfindlicher und andre, welche unempfindlicher sind. Voraussichtlich laufen feinste Blutadern oder feinste Nervenzweige nach der Mitte des gelben Fleckes hin, und nun mag es vorläufig dahingestellt bleiben, ob an solchen Stellen die Lichtempfindung stärker oder ob sie schwächer ist, wenn ich das letztere auch für wahrscheinlicher halten möchte. Bei grellem Licht oder länglichen Bildern wird diese Unhomogenität nicht empfunden. Nur bei dem schwachen Licht der Sterne kann sie zur Wahrnehmung gelangen.

Ein neuer Apparat zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft.

Von

H. Gerdien.

(Mit einer Figur).

Vorgelegt von E. Wiechert am 3. Juni 1905.

Vor zwei Jahren[1]) habe ich an dieser Stelle eine Methode zur absoluten Messung der spezifischen Leitfähigkeit beschrieben, welche auf folgendem Prinzip beruht. Einem Luftstrome wird innerhalb eines Cylinderkondensators ein Bruchteil der in ihm enthaltenen Ionen eines Vorzeichens entzogen und dieser auf der inneren isolierten, mit einem Elektrometer verbundenen Elektrode niedergeschlagen; bei geeigneter Wahl der Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden, der Luftgeschwindigkeit und der Dimensionen des Cylinderkondensators ergiebt dann die Beobachtung der Spannungsabnahme des isolierten Systems ein Maaß für die spezifische elektrische Leitfähigkeit. Die früher von mir benutzten instrumentellen Anordnungen waren so getroffen, daß sie zugleich eine Messung des Ionengehaltes[2]) der Luft, und somit auch der spezifischen Ionengeschwindigkeit ermöglichten. Durch diese Vereinigung mit der Ionengehaltsmessung war die ganze apparative Einrichtung nicht nur etwas schwerfällig geworden, sondern sie hatte auch gerade in der Lösung ihrer Hauptaufgabe, der Leitfähigkeits-

1) H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1903, S. 382 bis 399, ibid. 1904, S. 277—299 und Phys. ZS. 4, S. 632—635. 1903.

2) H. Ebert, Arch. sc. phys. et nat. Genève (4) 12, 97, 1901; Phys. ZS. 2, 662, 1901; Illust.-Aeron. Mittlgn. 6, 178, 1902; Verh. d. d. Phys. Ges. 7, 2, 34, 1905.

messung, nicht den wünschenswerten Grad der Leistungsfähigkeit erreicht. Allerdings war es schon mit der älteren Anordnung gelungen, bei verhältnismäßig großer spezifischer Leitfähigkeit der Luft, wie sie an sehr klaren Tagen am Erdboden und bei Ballonfahrten fast regelmäßig in Höhen über 3000 m angetroffen wird, die Dauer der Aspiration, welche zur Erreichung eines meßbaren Spannungsrückganges am Elektrometer erforderlich ist, auf 5 Minuten herabzudrücken; für mittlere und geringe Leitfähigkeit der Luft war aber immer noch eine Zeit von 10 bis 15 Minuten erforderlich. Der Apparat war also trotz seiner gegenüber der Ebertschen Originalkonstruktion[1]) schon erheblich gesteigerten Leistungsfähigkeit noch immer für die Lösung der Aufgabe, welche ich ihm gestellt hatte, der Erforschung der Dichte des vertikalen Leitungsstromes in der freien Atmosphäre durch zusammenhängende Messungen der spezifischen Leitfähigkeit und des Potentialgefälles, wenig geeignet. Will man nämlich im Freiballon nicht nur Mittelwerte der Leitfähigkeit für ein größeres Höhenintervall erhalten, sondern wirkliche Einzelmessungen der Leitfähigkeit, die für eine wohldefinirte Höhenlage des Ballons gelten, so muß man an den Leitfähigkeitsapparat die gleiche Anforderung bezüglich der Dauer einer Messung stellen, wie an das Assmann'sche Aspirationspsychrometer. Diese Aufgabe läßt sich für die Messung der spezifischen Leitfähigkeit in der Tat noch bei handlichen Apparat-Dimensionen lösen, wenn man auf die Kombination mit der Ionengehaltsmessung, d. h. also auch auf die Messung der spezifischen Ionengeschwindigkeit verzichtet. Dieser Verzicht schien mir auch aus anderen Gründen zur Zeit geboten, denn es kann bei dem heutigen Stande unserer Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität nicht darauf ankommen, Spezialuntersuchungen mit möglichster Präzision durchzuführen, sondern es muß vielmehr die Erforschung der wichtigsten in Betracht kommenden Faktoren: des Potentialgefälles, der Leitfähigkeit und damit des vertikalen Leitungsstromes in ihren quantitativen Beziehungen zu einander und zu den meteorologischen Elementen an die Spitze gestellt werden.

Die Messung der Leitfähigkeit ist meines Erachtens wichtiger als die Messung des Ionengehaltes nach H. Ebert, da sie die unmittelbare Grundlage bildet für die weitere Erforschung des Elektrizitätshaushalts der Atmosphäre, während die Bestimmung des Gehalts an leicht beweglichen Ionen — diesen allein liefert das Ebert'sche Verfahren — nur einen unvollständigen Auf-

1) H. Ebert, l. c.

schluß giebt über die den Elektrizitätshaushalt der Atmosphäre in erster Linie bestimmende Grösse des vertikalen Leitungsstromes.

Bei der neuen instrumentellen Ausführung meiner Methode beabsichtigte ich vor allem, die zur Erzielung eines am Blättchenelektrometer gut meßbaren Spannungsrückganges notwendige Dauer der Aspiration möglichst abzukürzen.

Bezeichnet ε die Ladung des Ions, n_p bezw. n_n die Zahlen der positiven bezw. negativen Ionen im ccm, v_p bezw. v_n die spezifischen Geschwindigkeiten der positiven bezw. negativen Ionen in elektrost. Mass., V', V'' das Anfangs- bezw. Endpotential des geladenen Systems, t die Dauer der Aspiration in Sekunden, C die Kapazität des geladenen Systems, r_a bezw. r_i den Radius der äußeren bezw. inneren Elektrode des Cylinderkondensators, l die Länge der inneren Elektrode, so gilt für den Anteil der positiven Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit [1]):

$$\text{I)} \qquad \lambda_p = \varepsilon . n_p . v_p = \frac{\lg V' - \lg V''}{t} \cdot C \frac{\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi l}$$

und ein entsprechender Ausdruck für λ_n oder

$$\text{II)} \qquad t = \frac{\lg V' - \lg V''}{\varepsilon . n_p . v_p} \cdot \frac{C}{C'} \cdot \frac{1}{4\pi},$$

worin mit

$$C' = \frac{l}{2 \lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

die auf den Cylinderkondensator entfallende Kapazität bezeichnet ist. Will man also bei gegebener spezifischer Leitfähigkeit einen Rückgang der Anfangsspannung des geladenen Systems auf einen in gegebenem Verhältnis kleineren Endwert in möglichst kurzer Zeit erreichen, so ist es vorteilhaft, das Verhältnis der Gesammtkapazität des geladenen Systems zu der auf den Cylinderkondensator entfallenden Kapazität möglichst klein zu machen; es kommt also bei der Messung der spezifischen Leitfähigkeit nicht auf die absolute Größe der Kapazität C an, sondern lediglich darauf, die Kapazität des dem Luftstrome ausgesetzten Teiles groß zu machen gegen die Kapazität des zur Messung benutzten Elektrometers.

Andererseits war bei der Konstruktion die Bedingung dafür zu erfüllen, daß innerhalb des Cylinderkondensators dem Luft-

1) H. Gerdien, l. c. und Terr. Magn. 1905. Juni-Nummer.

strome nicht alle Jonen eines Vorzeichens entzogen werden, sondern nur ein Bruchteil; diese lautet

$$\text{III)} \qquad G > \frac{2 v_{\max} V' l}{\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \cdot (r_a^2 - r_i^2)},$$

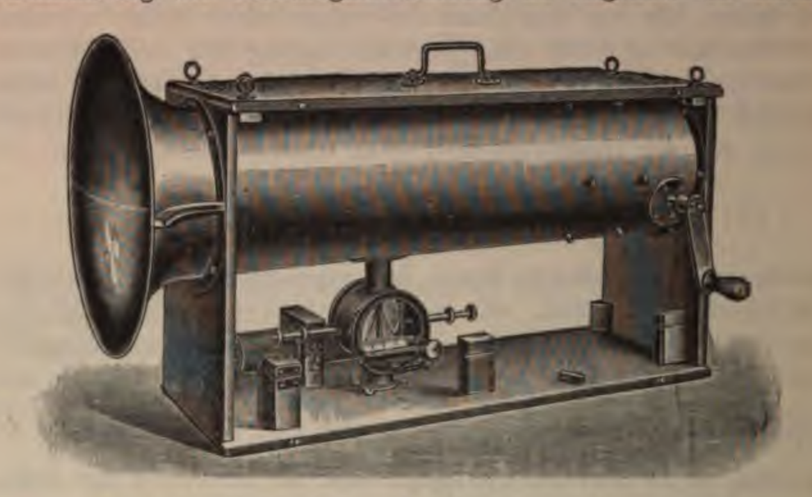
worin G die Geschwindigkeit des Luftstromes im Innern des Cylinderkondensators, und $v_{\max}$ die maximale unter den in der Luft enthaltenen Ionen vorkommende spezifische Geschwindigkeit bezeichnet. Ich war natürlich bestrebt, den zur Unterhaltung des Luftstromes erforderlichen Energieaufwand nicht größer werden zu lassen, als zur Erreichung des vorgesteckten Zieles unbedingt erforderlich ist. Der ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände erforderliche Energiebetrag, welcher pro Sekunde aufgewendet werden muß, um in dem Cylinderkondensator den Luftstrom von der Geschwindigkeit G zu unterhalten, ist

$$\text{IV)} \qquad E = G^3 . \mu . (r_a^2 - r_i^2) \cdot \frac{\pi}{2},$$

worin μ die spezifische Masse des aspirierten Gases bezeichnet. Es ist also vorteilhaft, mit möglichst kleinen Geschwindigkeiten zu arbeiten und die Erfüllung der Ungleichung III) durch Vergrößerung des Querschnitts, also des Gliedes $(r_a^2 - r_a^2)$ zu erreichen. Das Glied $\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$ ändert sich nur langsam mit dem Verhältnis der Radien, es ist also nicht geeignet, mit zur Erfüllung der Bedingung beizutragen. Die Länge der inneren Elektrode ist im wesentlichen durch andere konstruktive Anforderungen festgelegt; damit das elektrische Feld innerhalb des Cylinderkondensators einen leicht berechenbaren Verlauf hat, wie er bei Ableitung der Formel I) zu Grunde gelegt wurde, muß die Länge der inneren Elektrode groß sein gegen ihren Radius auch ist es vorteilhaft, die Länge des durchströmten Rohres nicht zu klein gegen den Radius zu wählen, da sonst der in der Rechnung vorausgesetzte achsenparallele Verlauf der Stromlinien des Luftstromes nur unvollkommen verwirklicht werden kann. Auch mußte der Anforderung genügt werden, die Capazität des Cylinderkondensators groß zu machen gegen diejenige des Elektrometers; dieser Anforderung kann infolge der Bedingung III) nicht durch Verkleinerung des Verhältnisses $\frac{r_a}{r_i}$, sondern nur durch entsprechende Wahl von l genügt werden.

Sollte der Apparat transportabel werden, so mußte diesen Anforderungen genügt werden unter Verwendung des Aluminiumblattelektrometers nach Exner-Elster-Geitel; es war also die Bedingung III) für Anfangspotentiale von etwa 200 Volt zu erfüllen; von der Verwendung einer variabeln Kapazität nahm ich Abstand, da es durch den so herbeigeführten Kapazitätszuwachs nur bei unhandlichen Apparatdimensionen gelungen wäre, das Verhältnis $\frac{C}{C'}$ klein zu machen.

Die aus diesen Überlegungen hervorgegangene instrumentelle Durchführung der Leitfähigkeitsmessung ist folgende. In einem



Rohre aus geschwärztem Magnaliumblech von 16 cm Durchmesser und 56 cm Länge wird durch einen vierflügeligen Fächer-Aspirator ein kräftiger Luftstrom erzeugt; der Aspirator ist am hinteren Ende des Rohres eingebaut und beansprucht für sich 16 cm der Rohrlänge. Der Antrieb erfolgt mittels einer außerhalb des Rohres befindlichen Kurbel, deren Welle die Rohrwand durchdringt und innen ein Schneckenrad mit 36 Zähnen trägt. Dieses greift in eine stählerne zweigängige Schraube ohne Ende ein, welche auf der Achse des Fächeraspirators sitzt; dieser macht also 18 Umdrehungen bei jeder Umdrehung der Kurbel. Der vordere Teil des Rohres ist von dem hinteren, in welchem der Aspirator arbeitet, durch eine Querwand aus Drahtnetz von etwa 1 mm Maschenweite geschieden, deren Zweck weiter unten erklärt werden wird. Das Rohr ist in einen leichten, festen Holzkasten (20 × 56 × 33 cm) eingebaut, dessen Seitenbretter herausnehmbar sind; die vordere und hintere Rohröffnung kann durch je einen

in Scharnieren nach unten wegklappbaren Deckel verschlossen werden. Vor der Einströmungsöffnung des Rohres läßt sich zur Verhütung der Wirbelbildung ein schalltrichterartig von 30 cm bis auf 16 cm Durchmesser verjüngter, aus Messingblech gedrückter Vorsatz mittels Bajonnettverschlusses befestigen; der Einströmungstrichter ist in einer Meridianebene aufgeschnitten und wird zum Transport im Innern des Kastens verpackt. Der vordere Teil des Rohres enthält die innere Elektrode aus geschwärztem Aluminiumrohr von 24 cm Länge und 1,44 cm Durchmesser; die Elektrode ist vorne und hinten mit abgerundeten Blechkappen verschlossen und wird in der Mitte von einer Stahlnadel von 2 mm Durchmesser getragen, die mit ihrem unteren Ende in dem Blättchenträger des Elektrometers befestigt werden kann. Das Elektrometer ist mit seinem Halse dicht in einen 2,5 cm weiten und langen Rohrstutzen eingepaßt, welcher mit dem 16 cm weiten Magnaliumrohre unten in der Mitte seines vorderen freien Teiles verschraubt ist; der Träger der inneren Elektrode tritt frei mit etwa 1 mm Spielraum durch eine Blechplatte hindurch in das Elektrometer ein, welche das untere Ende des Elektrometerhalses abschließt. Die Schubstangen, durch welche die Schutzbacken des Elektrometers bewegt werden, sind in 4 cm langen, am Gehäuse befestigten Rohren geführt und mit Stopfbüchsen abgedichtet, wodurch jede Luftströmung im Innern des Gehäuses ausgeschlossen wird. Die vordere und hintere Glaswand des Elektrometers ist unter Zwischenlage von Dichtungsringen am Gehäuse festgeschraubt. Der Bernsteinisolator ist im Boden so befestigt, daß er sammt dem Blättchenträger zum Einkleben neuer Blättchen leicht nach unten herausgezogen werden kann; gegen das Innere des Gehäuses ist seine Oberfläche nach einem Vorschlage von H. Schering[1]) mit einer metallenen Schutzkappe abgedeckt, welche bis auf etwa 1 mm an den Blättchenträger herantritt. Dadurch ist zwar eine kleine Kapazitätsvermehrung gegen die ursprüngliche Elster-Geitel'sche Konstruktion bedingt, aber es ist ein vorzüglicher Schutz des Isolators gegen Staub und Feuchtigkeit erreicht, sowie der Einfluß von reibungselektrischen Ladungen des Bernsteins auf die Blättcheneinstellung beseitigt. Gleichzeitig scheint durch die metallene Schutzkappe die Zeit, welche für die Annahme einer neuen Ladung durch den Bernstein benötigt wird, auf Bruchteile einer Minute herabgedrückt zu sein[2]). Die innere Elektrode mit ihrem Träger

1) H. Schering, Dissert. Göttingen, 1904.

2) Bei dem Elster-Geitel'schen Zerstreuungs-Apparat mußte vorschriftsmäßig eine Zeit von 5 Minuten nach dem Laden des isolierten Systems bis zum

wird zum Transport im Kasten verpackt und das Elektrometergehäuse mit einem Stopfen verschlossen.

Die zum Laden des isolierten Systems dienende Zambonisäule ist in der Mitte durch eine Metallplatte unterbrochen, welche die Plättchen um einige Millimeter im Durchmesser übertrifft; mittels dieser Platte wird die Säule zum Transport in einem entsprechend ausgedrehten Holzfutter so befestigt, daß ihre beiden Pole frei sind, sie ist so besser gegen Abnahme ihrer Spannung geschützt, als wenn ihre beiden Enden in ungeschützten Bernsteinisolatoren gefaßt wären, die mit der Zeit doch an Isolationswiderstand Einbuße erleiden.

Der Apparat kann zum Gebrauch entweder an vier Ösen aufgehängt oder auf einem aus den heruntergeklappten Deckelbrettern und den Seitenbrettern zusammengesetzten Unterbau aufgestellt werden. Das Gewicht des ganzen Apparates beträgt 8 kg.

Experimentelle Untersuchung des Apparates.

Bevor der Apparat zu definiven Messungen in Gebrauch genommen werden konnte, galt es, ihn auf seine Wirkungsweise hin experimentell zu untersuchen und insbesondere die Grenzen der Luftgeschwindigkeit und des Potentials am geladenen System festzustellen, innerhalb welcher er bei gegebener maximaler spezifischer Ionengeschwindigkeit den theoretischen Anforderungen genügt. Wünschenswert für solche Untersuchungen, bei denen eine Versuchsbedingung unter Konstanterhaltung der übrigen systematisch variiert werden muß, ist vor allem eine möglichst geringe zeitliche Änderung der spezifischen Leitfähigkeit der Luft; diese gesuchte Konstanz der Leitfähigkeit ist im Freien im Allgemeinen nur selten auf längere Zeit anzutreffen, dazu kam, daß bei den Vorversuchen gerade auch die Luftgeschwindigkeit im Cylinderkondensator den Versuchsvariabeln angehörte — es mußte also zunächst in einem geschlossenen Raume gearbeitet werden. Das Arbeiten in einem geräumigen, längere Zeit nicht gelüfteten Zimmer bietet mancherlei Vorteile: die Leitfähigkeit variiert nur sehr langsam, Störungen durch Windstösse sind ausgeschlossen und dazu ist die Leitfähigkeit in solchen Räumen fast stets einige Male grösser als im Mittel im Freien — es ist also die Beobachtungszeit im entsprechenden Verhältnis kürzer.

Beginn der Messung verstreichen, „damit der Isolator sich polarisieren konnte“; vermutlich war diese Zeit nur durch die auf der Bernstein-Schutzplatte ausgebreitete Staubschicht bedingt, über welche sich die Ladung entsprechend ihrem geringen Leitvermögen langsam ausbreitete.

Die im Folgenden beschriebenen Versuche wurden im Auditorium des geophysikalischen Instituts angestellt; bei einer großen Zahl von Beobachtungsreihen unterstützte mich in dankenswerter Weise Herr J. E. Burbank (Washington).

Es wurde zunächst die Geschwindigkeit des Luftstroms variiert und zwar wurde stets mit dem gleichen Vorzeichen der Ladung (—) und nahezu dem gleichen Anfangspotential gearbeitet; es wechselten stets Versuchsreihen mit zwei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten mit einander ab. So konnte der Wert der mit der Geschwindigkeit a erhaltenen Leitfähigkeit für die Zeit der Messung mit der Geschwindigkeit b interpoliert werden und umgekehrt. Wurde also bei der Luftgeschwindigkeit a in der Versuchsreihe 1 die Leitfähigkeit λa_1, bei der Luftgeschwindigkeit b in der Versuchsreihe 2 die Leitfähigkeit λb_2 u. s. w. gemessen, so gelangten zum Vergleich die Werte

$$\frac{\lambda a_1 + \lambda a_3}{2} \text{ mit } \lambda b_2$$

$$\lambda a_3 \text{ mit } \frac{\lambda b_2 + \lambda b_4}{2} \text{ u. s. w.}$$

Bei den ersten Versuchsreihen, bei denen das oben erwähnte Drahtnetz noch nicht zwischen Cylinderkondensator und Aspirator eingeschaltet war, ergab sich der nach der Formel I berechnete Wert der Leitfähigkeit kleiner bei großen Luftgeschwindigkeiten als bei kleinen, und zwar wurde gearbeitet mit Luftgeschwindigkeiten, die durch $^1/_2$ Umdrehung der Kurbel pro Sekunde, durch 1 Umdrehung pro Sekunde und 2 Umdrehungen pro Sekunde erzeugt waren. Dieses Resultat konnte nur dadurch erklärt werden, daß eine oder mehrere der Grundannahmen, welche der Ableitung der Formel zu Grunde gelegt wurden, nicht erfüllt waren. Ich vermutete, daß die Annahme, nach welcher die Luftgeschwindigkeit über den ganzen Querschnitt des Cylinderkondensators als konstant gesetzt ist, in einem weiten kurzen Rohr bei Benutzung eines nicht gerade zu diesem Zweck besonders verfertigten Fächeraspirators wohl schwerlich erfüllt sein könnte. Eine Überschlagsrechnung ergab, daß bei einer Geschwindigkeitsverteilung, nach welcher die Luftgeschwindigkeit innerhalb des Cylinderkondensators mit wachsendem Abstand von der Achse zunimmt, in der Tat der beobachtete Effekt eintreten muß. Ich bemühte mich also zunächst eine homogene Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Rohres zu erzielen. Es erschien mir wenig aussichtsvoll, dieses Ziel durch eine besondere Gestalt der

Schraubenflügel des Aspirators zu erreichen, da sich bei kleinen Dimensionen die Herstellung einer vorgegebenen Fläche wohl nur schwer und ungenau durchführen läßt. Es ergab sich bald eine andere Lösung, die zwar die Ökonomie des Aspirationsprozesses herabmindert, sich aber durch leichte Herstellungsart und sichere Wirkungsweise auszeichnet. Schaltet man nämlich unmittelbar vor dem ansaugenden Aspirator eine Querwand aus Drahtnetz ein, so erfährt der Luftstrom dadurch bei hinreichend kleiner Maschenweite einen so erheblichen Widerstand, daß die ungleichmässig über den Querschnitt des Rohres verteilte Saugwirkung des Flügelaspirators in dem Raume vor dem Drahtnetz ausgeglichen werden kann — der Aspirator schafft dicht hinter dem Drahtnetz einen luftverdünnten Raum, in den durch alle Maschen des Netzes die Luft ziemlich gleichmässig hineinströmt[1]). Der Versuch ergab, daß durch ein Drahtnetz von etwa 1 mm Maschenweite die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsmessung von der Luftgeschwindigkeit merklich beseitigt wurde. Es sollen noch weitere Versuche darüber angestellt werden, ob diese Unabhängigkeit vielleicht durch eine verbesserte Konstruktion des Aspirators schon bei einem Netz mit weiteren Maschen zu erzielen ist, das den Wirkungsgrad des Aspirators etwas weniger herabmindert.

Weitere Versuchsreihen bezogen sich darauf, festzustellen, bei welchen Anfangspotentialen für jede Geschwindigkeitsstufe in Luft von Atmosphärendruck die gewünschte Wirkungsweise des Apparates gesichert ist. Es wurde bei einer möglichst konstant gehaltenen Luftgeschwindigkeit (bei einem Teil der Versuchsreihen wurde ein Elektromotor zum Antrieb des Apparates benutzt) das isolierte System auf ein möglichst hohes Anfangspotential geladen und nun in Intervallen von 30 zu 30 Sekunden die Blättchendivergenz abgelesen. In denjenigen Spannungsintervallen, in welchen die Abnahme nach dem logarithmischen Gesetze erfolgt, ist der Apparat zur Messung der spezifischen Leitfähigkeit brauchbar, in denjenigen Intervallen, in welchen die Spannungsabnahme nach einem linearen Gesetz erfolgt, wirkt der Apparat als Ionenzähler, ist also zur Messung der spezifischen Leitfähigkeit unbrauchbar. Es stellte sich heraus, daß das lineare Gesetz bei einer Luftgeschwindigkeit entsprechend $^1/_2$ Kurbel-Umdrehung/sec. noch gilt bei Spannungen bis zu etwa 150 Volt herab, bei 1 Kurbelumdrehung/sec. und 2 Umdrehungen/sec. wurde

1) Anm. bei der Korrektur: Wie mir mitgeteilt wird, hat Herr L. Prandtl schon früher eine ähnliche Vorrichtung benutzt.

von 200 Volt abwärts das logarithmische Gesetz festgestellt. Der Apparat arbeitet also schon bei einer Luftgeschwindigkeit, die durch eine Kurbelumdrehung pro Sekunde erzeugt wird, bei Atmosphärendruck vollkommen sicher. Bei Ballonfahrten bis zu etwa 7000 m Höhe kann der Apparat unbedenklich ohne Änderung auch bei den dort vorkommenden spezifischen Ionengeschwindigkeiten benutzt werden, wenn man mit 2 Kurbel-Umdrehungen/sec. arbeitet und nur Anfangsspannungen unter 150 Volt anwendet. Ich habe daher in den für Ballonfahrten bestimmten Apparat ein Elektrometer einbauen lassen, das durch etwas verringerten Abstand der Schutzbacken vom Blättchenträger und Verwendung von nur etwa 2 mm breiten Aluminiumblättchen etwas empfindlicher gemacht ist, so daß die Blättchen schon bei etwa 170 Volt durchschlagen.

In weiteren Versuchsreihen wurden mit der inneren Electrode von 24 cm Länge und 1,44 cm Durchmesser solche von gleicher Länge und 0,5 bezw. 2,4 cm Durchmesser verglichen. Die einzelnen Elektroden wurden zunächst bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten untersucht, dann wurde für jede Elektrode bei verschiedenen Geschwindigkeiten der zeitliche Verlauf der Spannungsabnahme bestimmt und schließlich bei sonst gleichen Versuchsbedingungen je zwei verschiedene Elektroden mit einander verglichen. Wie zu erwarten war, trat das logarithmische Gesetz für den Spannungsrückgang bei der Elektrode von 2,4 cm bei gleicher Luftgeschwindigkeit ($^1/_2$ Umdrehung/sec.) erst bei niedrigerem Potential ein als bei der Elektrode von 1,44 cm Durchmesser und bei dieser wiederum bei niedrigerem Potential als bei der Elektrode von 0,5 cm Durchmesser. Die Elektroden von größerem Durchmesser lieferten bei unmittelbarem Vergleich stets den größeren Spannungsrückgang in der gleichen Aspirationszeit. Die bei Vergleichsmessungen je zweier Elektroden nach der Formel I) berechneten Leitfähigkeiten stimmten bei den Elektroden von 1,44 und 2,4 cm Durchmesser merklich überein, die Elektrode von 0,5 cm Durchmesser lieferte etwas zu große Werte, was wohl auf den störenden Einfluß des Trägers zurückzuführen ist, der bei allen drei Elektroden in gleicher Stärke ausgeführt war und daher bei der Elektrode von kleinerem Durchmesser am meisten als störend hervortreten mußte.

Diese Störungsursache wie auch die Wirbelbildung an der inneren Elektrode gedenke ich noch eingehender zu untersuchen; insbesondere sollen noch Elektroden aus vorn und hinten offenen Röhren erprobt werden.

Die Konstantenbestimmung.

Die einzige in der Formel auftretende Konstante des Apparates ist das Kapazitätsverhältnis $\frac{C}{C'}$; man könnte daran denken, es in ähnlicher Weise zu bestimmen, wie es nach Elster und Geitel für den Zerstreuungsapparat ermittelt wird. Sicherer und bei weitem leichter ausführbar erschien es mir, direkt die Gesamtkapazität des Apparates mittels zweier geeigneter Cylinderkondensatoren von verschiedener Länge, deren Kapazitätsdifferenz als Normale gilt [1]) zu bestimmen und in die Formel die gemessenen Apparatdimensionen einzusetzen. So ergab sich für die Kapazität des Apparates (mit der inneren Elektrode von 1,44 cm Durchmesser) 12,6 cm und somit für das Glied

$$\frac{C \cdot \lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi l} = 0{,}20_2$$

oder als Apparatkonstante für die Rechnung mit Briggschen Logarithmen 0,465.

Die Praxis der Leitfähigkeitsmessungen.

Im Freien stellt man den Apparat nach Möglickkeit vor Windstössen geschützt auf, am besten mit der Längsachse senkrecht zur vorherrschenden Windrichtung. Man ladet das isolierte System mittels der Zambonisäule und beginnt möglichst schnell nach der Ablesung des Elektrometers mit der Aspiration; wie man sich nämlich leicht überzeugt, ist der Spannungsrückgang am Elektrometer infolge der durch Diffusion in den Cylinderkondensator gelangenden Ionen ein merklicher. Man aspiriert nur solange, bis am Elektrometer eine merkliche Spannungsabnahme eingetreten ist und liest unmittelbar nach Beendigung der Aspiration die Endspannung ab. Bei Atmosphärendruck ist es hinreichend, die Kurbel 1→2 mal in der Sekunde zu drehen; man kontrolliert das Tempo nach der Uhr oder bequemer mittels eines kleinen — etwa 25 cm langen Fadenpendels, das man an dem Apparat befestigt. Beträgt der Anteil einer Ionenart an der spezifischen Leitfähigkeit 10^{-4} elektrost. Einheiten — was den im Freien am Boden vorkommenden Verhältnissen entspricht — so erhält man etwa nach 3 Minuten Aspirationsdauer bei 200 Volt

1) H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. in Göttingen, Math.-phyl. Kl. 1904, S. 85.

Anfangspotential einen Spannungsrückgang von etwa 19 Volt; in der freien Atmosphäre, wo in Höhen über 3000 m nicht selten der zehnfache Wert der spezifischen Leitfähigkeit vorkommt, erhält man in der gleichen Zeit einen Spannungsrückgang von 200 auf 82 Volt — das sind Zahlen, die wohl den Fortschritt, der mit der Konstruktion dieses neuen Apparates erzielt wurde, veranschaulichen können.

Die Prüfung der Isolation des Elektrometers geschieht in der üblichen Weise, durch Aufladen mittels eines dem Apparat beigegebenen, mit isolierendem Handgriff versehenen Kontaktstiftes; dieser kann bequem nach Entfernung der inneren Elektrode in das Elektrometergehäuse eingeführt werden. Nach dem Aufladen mit der Zambonisäule wird er entfernt und das Elektrometergehäuse mittels des Stopfens verschlossen. Sowohl die Spannungsabnahme des Elektrometers allein als auch diejenige im vorn und hinten geschlossenen Cylinderkondensator bei aufgesetzter innerer Elektrode ist so klein gegenüber der beim Aspirieren eintretenden, daß sie bei der Leitfähigkeitsmessung nur in Ausnahmefällen berücksichtigt zu werden braucht [1]). Die Mittel zur Ausführung der vorstehenden Untersuchung waren von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen zur Verfügung gestellt.

1) Der Apparat wird von der Firma Spindler u. Hoyer, Göttingen, verfertigt.

Ueber die numerische Auflösung totaler Differentialgleichungen.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Mai 1905.

Um die Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen numerisch aufzulösen, sind Näherungsmethoden entwickelt worden analog denen, die bei der Berechnung bestimmter Integrale Verwendung finden[1]). Es fehlt indessen noch der Beweis, dass diese Näherungs-Verfahren convergent sind oder, was practisch wichtiger ist, es fehlt ein Kriterium, um zu ermitteln, wie klein die Schritte gemacht werden müssen, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen.

Für das Eulersche Verfahren ist jener Beweis und das Kriterium der Genauigkeit von Cauchy gegeben worden. Das Eulersche Verfahren besteht einfach darin, dass man in der Differentialgleichung den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzt und damit von einem Werthsystem zu einem benachbarten übergeht. Aber dies Näherungsverfahren ist nicht brauchbar, weil seine Genauigkeit im Allgemeinen zu wünschen übrig lässt. Wenn man die Zahl der Schritte für ein gegebenes Intervall der unabhängigen Veränderlichen n-Mal so groß macht, so wird der Fehler der Näherung nur etwa auf den n^{ten} Teil reducirt. Um einige Genauigkeit zu erzielen, wird daher im Allgemeinen die Zahl der Schritte so groß, daß die Rechenarbeit ein annehmbares Maß überschreitet.

---

1) C. Runge, Mathematische Annalen Bd. 46, p. 167, 1895. — K. Heun, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 45, p. 23, 1900. — Kutta, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, p. 435, 1901.

In der vorliegenden Arbeit wird Cauchys Beweis auf die neueren Annäherungsmethoden ausgedehnt. Es wird sich zeigen, daß die Verhältnisse, auch was die Genauigkeit betrifft, geradeso liegen wie bei der Berechnung eines bestimmten Integrals durch die Simpsonsche Regel.

Von den neueren Verfahren halte ich das folgende von Herrn Kutta angegebene für das beste.

Es sei eine Differentialgleichung erster Ordnung vorgelegt

$$\frac{dy}{dx} = f(xy).$$

Der Uebergang von einem Werthsystem x, y zu einem benachbarten Werthsystem $x' = x+h$, $y' = y+\varkappa$ soll durch die folgende Rechnung bewirkt werden. Mit einem beliebig gewählten Werth von h berechne man die Größen $\varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_3\, \varkappa_4$ durch die Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= f(xy)\,h \\
\varkappa_2 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{\varkappa_1}{2}\right)h \\
\varkappa_3 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{\varkappa_2}{2}\right)h \\
\varkappa_4 &= f(x+h, y+\varkappa_3)\,h
\end{aligned}$$

und setze $\frac{\varkappa_1+\varkappa_4}{2} = p$, $\frac{\varkappa_2+\varkappa_3}{2} = q$. Dann bilden p und q Näherungswerthe für $\varkappa$, deren Fehler von der dritten Ordnung in h ist. Addirt man dann den dritten Teil des Unterschiedes $p-q$ zu q, so erhält man einen neuen Näherungswerth

$$q+\tfrac{1}{3}(p-q),$$

dessen Fehler von der fünften Ordnung in h ist. D. h. wenn man $\varkappa-(q+\frac{1}{3}(p-q))$ nach Potenzen von h entwickelt, so fängt die Entwicklung mit h^5 an. Das eben ist der Gedanke, der auf das Näherungsverfahren geführt hat. Man kann diesen Umstand nun noch etwas präciser fassen, indem man zeigt: für ein beschränktes Gebiet der Veränderlichen x, y lässt sich eine positive Größe M ermitteln, derart, daß der Fehler $\varkappa-(q+\frac{1}{3}(p-q))$ absolut genommen nicht größer ist als Mh^5. Es ist dazu gar nicht erforderlich, daß $f(xy)$ eine analytische Function sei. Sondern es genügt,

daß $f(xy)$ Ableitungen nach x und y bis zur vierten Ordnung besitzt, die für das betrachtete Gebiet dem absoluten Betrage nach eine endliche obere Grenze besitzen. Zu dem Ende denke man sich die Taylorsche Entwicklung von $\gamma = \varkappa - (q + \frac{1}{6}(p-q))$ nach Potenzen von h bei dem Gliede mit h^4 abgebrochen. Der Coefficient von h^4 ist $\frac{1}{4!}\frac{d^4\gamma}{dh^4}$. Hier ist aber nicht $h = 0$ einzusetzen, sondern statt h ist ein Zwischenwerth zwischen 0 und h anzunehmen. Die vorhergehenden Glieder verschwinden sämmtlich. Nun läßt sich mit Hülfe der Differentialgleichung und dem Bildungsgesetz von $q + \frac{1}{6}(p-q)$ der Ausdruck $\frac{1}{4!}\frac{d^4\gamma}{dh^4}$ als Function von $x, y, h, \varkappa$ ausdrücken. Es kommen darin die partiellen Differentialquotienten von f bis zur vierten Ordnung vor. Die Differentialquotienten vierter Ordnung kommen nur durch die Differentiation von $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ hinein und sind mit h multiplicirt. Dieser Theil von $\frac{1}{4!}\frac{d^4\gamma}{dh^4}$ ist also mindestens von erster Ordnung in h. Der andere Theil der nicht mit h multiplicirten Glieder muß nach der Kuttaschen Entwicklung für $h = 0$ verschwinden. Da er nur Differentialquotienten bis zur 3ten Ordnung enthält und die Differentialquotienten 4ter Ordnung eine endliche Grenze ihres absoluten Betrages besitzen, so ist auch dieser Teil mindestens von der ersten Ordnung in h. Es läßt sich eine Größe M ermitteln, derart daß $\frac{1}{4!}\frac{d^4\gamma}{dh^4}$ für das betrachtete Gebiet absolut genommen nicht größer ist als Mh. Das gilt auch noch, wenn statt h ein Zwischenwerth zwischen 0 und h eingesetzt wird, und somit wird der Fehler des Näherungswerthes $q + \frac{1}{6}(p-q)$ absolut genommen nicht größer als Mh^5, so lange die vorkommenden Werthe $x + h, y + \varkappa$ dem betrachteten Gebiete angehören.

Für die Beurtheilung der Genauigkeit des Verfahrens ist nun aber die Kenntniß des Fehlers, den wir bei einem einzigen Schritt begehen, nicht ausreichend. Vielmehr ist es nothwendig zu erörtern, wie sich der bei einem Schritt begangene Fehler nun bei dem nächsten Schritte fortpflanzt. Zu dem Ende haben wir zu untersuchen, wie der Näherungswerth $q + \frac{1}{6}(p-q)$ durch einen Fehler in dem der Rechnung zu Grunde liegenden Werthe von y beeinflußt wird. Welcher Fehler entsteht in $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ dadurch, daß statt des richtigen Werthes y ein fehlerhafter $y \pm \varepsilon$ eingesetzt wird?

Es sei in dem ganzen betrachteten Bereich $\frac{\partial f}{\partial y}$ dem absoluten Betrage nach nicht größer als m. Wenn man nun in dem Ausdruck für $\varkappa_1$ statt y den Werth $y \pm \varepsilon$ einsetzt, so wird dadurch $\varkappa_1$ absolut genommen, um nicht mehr als $mh\varepsilon$ geändert. In dem Ausdruck für $\varkappa_2$ ändert sich mithin der Werth von $y + \varkappa_1/2$ um höchstens $\varepsilon + \frac{1}{2} mh\varepsilon$, und dadurch wird $\varkappa_2$ um höchstens $mh\varepsilon(1 + \frac{1}{2} mh)$ geändert. Damit ändert sich wieder $\varkappa_3$ um nicht mehr als

$$mh\varepsilon\left(1 + \frac{mh}{2}(1 + \tfrac{1}{2} mh)\right)$$

und $\varkappa_4$ um nicht mehr als

$$mh\varepsilon\left(1 + mh\left(1 + \frac{mh}{2}(1 + \tfrac{1}{2} mh)\right)\right)$$

$\frac{\varkappa_1 + \varkappa_4}{2}$ ändert sich um nicht mehr als $mh\varepsilon(1 + \frac{1}{2} mh + \frac{1}{4} m^2 h^2 + \frac{1}{8} m^3 h^3)$

$\frac{\varkappa_2 + \varkappa_3}{2}$ ändert sich um nicht mehr als $mh\varepsilon(1 + \frac{1}{2} mh + \frac{1}{8} m^2 h^2)$

$q + \frac{1}{3}(p - q) = \frac{2}{3} q + \frac{1}{3} p$ ändert sich um nicht mehr als

$$mh\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} mh + \frac{1}{6} m^2 h^2 + \frac{1}{24} m^3 h^3\right)$$

Für kleine Werthe von mh ist demnach die Aenderung von $q + \frac{1}{3}(p - q)$ von derselben Ordnung wie $mh\varepsilon$, z. B. für $mh < 1$ kleiner als $\frac{41}{24} mh\varepsilon$. Es läßt sich folglich eine feste positive Größe m_1 angeben, der Art, daß der absolute Betrag der Aenderung von $q + \frac{1}{3}(p - q)$, die der Aenderung ε von y entspricht, nicht größer ist als $m_1 h\varepsilon$.

Geht man von einem Werthsystem $x_0 y_0$ aus und berechnet $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + q_0 + \frac{1}{3}(p_0 - q_0)$, so wird der Fehler von $q_0 + \frac{1}{3}(p_0 - q_0)$ und damit der Fehler von y_1 absolut genommen nicht größer als Mh^5 sein.

$$\varepsilon_1 \leqq Mh^5$$

(wo ε_1 den absoluten Betrag des Fehlers von y_1 bedeutet).

Geht man von $x_1 y_1$ weiter zu dem nächsten Werthepaar $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{3}(p_1 - q_1)$, so wird der Fehler von y_2 sich aus dem Fehler von y_1 und dem von $q_1 + \frac{1}{3}(p_1 - q_1)$ zusammensetzen.

Der absolute Betrag ε_2 des Fehlers von y_2 wird demnach nicht größer als

$$\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1 + Mh^5 + m_1 h \varepsilon_1.$$

Und in analoger Weise schließt man, daß der absolute Betrag ε_3 des Fehlers von y_3 nicht größer ist als

$$\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2 + Mh^5 + m_1 h \varepsilon_2$$

u. s. w.

$$\varepsilon_n \leqq \varepsilon_{n-1} + Mh^5 + m_1 h \varepsilon_{n-1}.$$

Oder wenn man rückwärts substituirt

$$\varepsilon_n \leqq Mh^5 + (1 + m_1 h) Mh^5 + (1 + m_1 h)^2 Mh^5 + \cdots + (1 + m_1 h)^{n-1} Mh^5$$

oder

$$\varepsilon_n \leqq Mh^5 \frac{(1 + m_1 h)^n - 1}{m_1 h}.$$

Wird $x_n - x_0 = H$ gesetzt, so ist $h = \frac{H}{n}$ und damit

$$\varepsilon_n \leqq \frac{M}{m_1} \cdot \frac{H^4}{n^4} \cdot \left(\left(1 + \frac{m_1 H}{n}\right)^n - 1\right) < \frac{M}{m_1} \cdot \frac{H^4}{n^4} (e^{m_1 H} - 1).$$

Für ein gegebenes Intervall H ist die für den Fehler des Näherungswerthes y_n gefundene Grenze der vierten Potenz von n umgekehrt proportional. Käme noch ein Fehler von y_0 hinzu, so müßte vorne an die Kette von Ungleichheiten noch

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0 + Mh^5 + m_1 h \varepsilon_0$$

angefügt werden. Damit ergiebt sich

$$\varepsilon_n \leqq \frac{M}{m_1} \frac{H^4}{n^4} (e^{m_1 H} - 1) + (1 + m_1 h)^n . \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_n \leqq \frac{M}{m_1} \frac{H^4}{n^4} (e^{m_1 H} - 1) + e^{m_1 H} . \varepsilon_0.$$

Diese Grenze wird zur Anwendung kommen, wenn man die Veränderlichen ihre Rollen vertauschen läßt. Man wird das z. B. thun, wenn man sich einem Punkte der Curve nähert, in dem $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird. Um y zur unabhängigen Veränderlichen zu machen, wird man zunächst ausrechnen, um wie viel x höchstens geändert werden müßte, wenn der berechnete Werth von y der richtige

sein sollte. Das geschieht mit Hilfe des Maximalwerthes von $\left|\frac{dx}{dy}\right|$ in der Umgebung der betreffenden Stelle. Beim Weiterrechnen mit y als unabhängiger Veränderlichen fängt man also schon mit einem möglichen Fehler ε_0 von x an.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich in analoger Weise auf eine Differentialgleichung von beliebiger Ordnung ausdehnen. Man hat sie nur in der bekannten Weise als ein System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung zu schreiben.

Messungen der Dichte des vertikalen elektrischen Leitungsstromes in der freien Atmosphäre bei der Ballonfahrt vom 11. V. 1905.

Mit 1 Figur und 1 Tafel.

Von

H. Gerdien.

Vorgelegt von E. Wiechert am 3. Juni 1905.

Am Schlusse meines Berichts[1]) über die luftelektrischen Arbeiten bei den Ballonfahrten vom 14. IV. und 5. V. 1904 hatte ich die Erwartung ausgesprochen, daß es mir möglich sein werde, die Dichte des vertikalen elektrischen Leitungsstroms durch zusammenhängende Messungen des Potentialgefälles und der spezifischen Leitfähigkeit als Funktion der Höhe in der freien Atmosphäre messen zu können; ich war damals nur im Besitze meines älteren Apparates zur Messung der spezifischen Leitfähigkeit, der spezifischen Ionengeschwindigkeit und der spezifischen Ionenzahl, dessen etwas umständliche Handhabung mich einen Fortschritt auf dem Wege zu meinem Ziel erst von der Mitwirkung eines zweiten luftelektrischen Beobachters erhoffen ließ. Inzwischen war[2]) es mir gelungen, unter Verzicht auf die Messung der spezifischen Ionenzahl und Ionengeschwindigkeit die eigentliche Leitfähigkeitsmessung so zu vervollkommnen, daß ich hoffen durfte, meinen lange gehegten Plan nunmehr allein ausführen zu können. Wiederum wurde mir durch das Entgegenkommen von Herrn Geheimrat R. Aßmann die Teilnahme an einer Ballonfahrt er-

1) H. Gerdien, Nachr. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1904, 277—299.

2) Vgl. die vorstehende Mitteilung.

möglicht; über die dabei gewonnenen luftelektrischen Resultate will ich im folgenden im Zusammenhang mit den meteorologischen Ergebnissen, soweit diese zum Verständnis der ersteren notwendig sind, berichten.

Das luftelektrische Instrumentarium.

Die Messungen der spezifischen Leitfähigkeit wurden mit dem neuen, in der vorstehenden Mitteilung beschriebenen Apparat durchgeführt; der Apparat war in Augenhöhe des Beobachters am Ringe so aufgehängt, daß der Einströmungstrichter sich außerhalb der Korbleinen befand. Der Aspirator wurde durchweg mit mindestens 2 Kurbel-Umdrehungen in der Sekunde angetrieben; die dazu erforderliche Arbeitsleistung ist zwar in geringen und mittleren Höhen ohne erhebliche Anstrengung aufzubringen, in größeren Höhen läßt sie sich nur unter dauernder Sauerstoff-Atmung durchführen, allerdings beansprucht hier infolge der gewöhnlich sehr großen Leitfähigkeit jede Messungsreihe nur eine Aspirationsdauer von höchstens 2 Minuten.

Der Apparat zur Messung des Potentialgefälles war der gleiche, wie der am 5. V. 1904 benutzte[1]). Die Kollektorgefäße hatten insofern eine kleine aber das Arbeiten erheblich erleichternde Verbesserung erfahren, als sie mit Flüssigkeitsstandgläsern versehen waren, an welchen das Ausfließen des Alkohols aus den Kollektoren leicht und sicher kontrolliert werden konnte. Da ich bei der Fahrt vom 5. V. 1904 durch das Versagen und notwendig werdende Auswechseln der Ausflußöffnungen einen unerwünschten Zeitverlust gehabt hatte, nahm ich zu dieser Fahrt nur noch Spritzkollektoren mit etwas weiteren Oeffnungen (über 0,2 mm Durchmesser) mit; diese verbrauchten zwar etwas mehr Alkohol als die Kollektoren mit feinen Oeffnungen, aber es tritt dafür auch ein Versagen weit seltener ein. Wiederum wurde mit Erfolg das Elektrometer mit zwei verschiedenen Meßbereichen benutzt, und zwar war das untere mit besonderer Sorgfalt hergestellte Blättchenpaar zwischen 25 und 240 Volt, das obere Blättchenpaar zwischen 200 und 700 Volt benutzbar, so daß ohne Aenderung des Elektrodenabstandes von 10 m Potentialgefälle zwischen 2,5 und 70 Volt/m gemessen werden konnten. Die Isolation des Potentialgefälle-Apparates war durchweg vorzüglich.

---

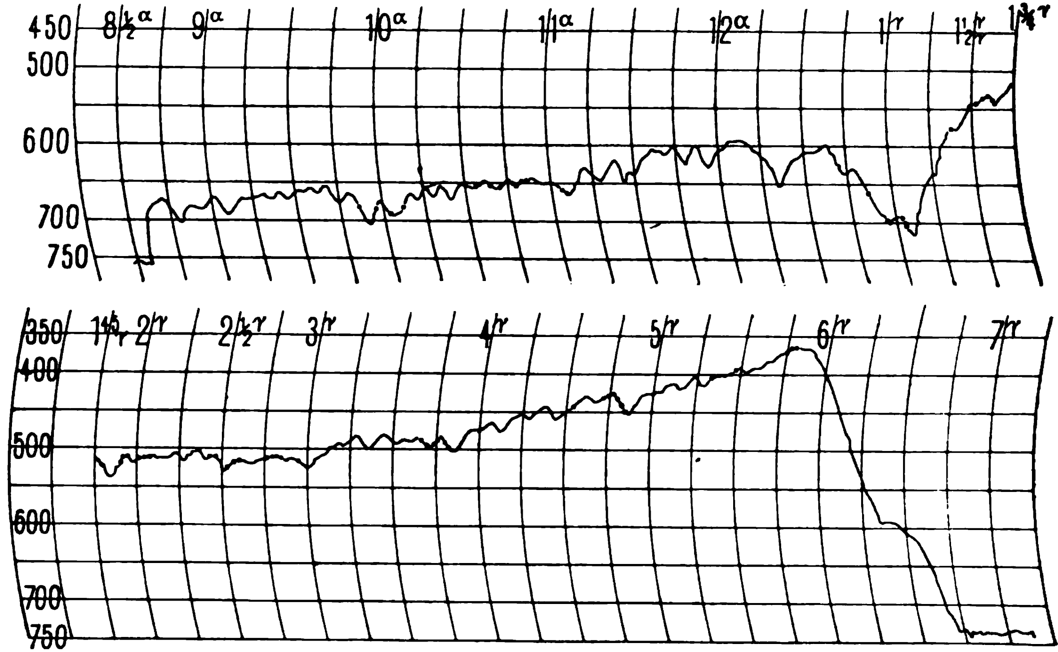
1) H. Gerdien, l. c.

Verhütung von Ballonladungen; Ballast.

Wieder war, wie bei den früheren Fahrten ein Spritzkollektor zur Entladung des Ballons dicht unter dem Korbboden angebracht. Alle luftelektrischen Messungen wurden, soweit nicht etwas anderes in dem unten folgenden Bericht ausdrücklich hervorgehoben ist, mindestens 5 Minuten nach jeder Ausgabe von Sandballast begonnen, während der Messungen wurde kein Sandballast gegeben — der Entladekollektor war ununterbrochen wirksam. Während der luftelektrischen Messungen wurde nur Wasserballast gegeben, der wieder in zwei Ballonstoffsäcken zu je 50 kg Inhalt auf etwa 70° C. erwärmt mitgenommen wurde. Es wurde, wie bei den früheren Fahrten mit eingenommenem Schlepptau gefahren.

Resultate.

Fahrtbericht: Ballon „Brandenburg" (1280 cbm), Füllung 1200 cbm Wasserstoff; Ballast: 29 Sack Sand, 100 kg Wasser, 20 kg Alkohol; Abfahrt von Berlin, Uebungsplatz des Luftschiffer-Bat. 11. Mai 1905, 8h 34m a. Landung bei Tost (Oberschlesien) 6h 50m p. Ballonführer: Prof. A. Berson, Teilnehmer: Dr. A. Wegener (Meteorologische Beobachtungen, Astronomische Ortsbestimmungen), H. Gerdien (Luftelektrische Beobachtungen). Da der Ballon fast völlig mit Gas gefüllt war, erreichte er schon nach wenigen Minuten in rund 1000 m die Prallhöhe (vgl. das Barogramm);



Barogramm, 11. V. 1905.

während des Aufstiegs wurde dauernd Wind im Korbe verspürt. Nach etwa einer Stunde war die Montage der Apparate beendigt und es konnte mit den Messungen begonnen werden. Der Ballon hatte in den geringen Höhen eine sehr unruhige Höhenlage und fiel während der ersten Messungsreihe plötzlich so schnell, daß der Fall mit Sandballast gehemmt werden mußte. Trotz der unruhigen Höhenlage des Ballons gelangen in den Höhen zwischen 600 und 800 m einige einwandfreie Messungsreihen. Gegen Mittag drang der Ballon in eine zwischen etwa 900 und 1500 m Höhe liegende Strato-Cumulus-Schicht ein, die am Morgen zeitweise fast geschlossen war, nun aber mehr und mehr aufbrach. Die Höhenlage des Ballons wurde nun noch unruhiger als sie unterhalb der Cumulus-Region gewesen war. Ein Defekt am Psychrometer zog die Aufmerksamkeit der drei Korbinsassen längere Zeit auf sich; Reparaturversuche wollten nicht glücken und es mußte schließlich zu dem mitgeführten kleinen Reserveinstrument gegriffen werden. In einer Lücke zwischen den Cumuli geriet der Ballon in einen intensiven abwärts gerichteten Luftstrom hinein; erst nach Ausgabe von 3 Sack Sandballast konnte der Fall gebremst werden. Infolge dieses erzwungenen Ballastopfers drang nun der Ballon nach Ueberwindung des absteigenden Stromes unmittelbar in Höhen von 2600—2800 m vor; hier, oberhalb des Reiches der Cumuli war ein ruhigeres Fahren möglich. Wieder gelangen einige Messungsreihen; dann wurde der Ballon höher getrieben und zeigte in etwa 3300 m eine auffallend stabile Höhenlage: mit ganz geringen Ballastgaben war er etwa eine Stunde lang in dieser Höhe zu erhalten. Auf die Ursachen dieser Stabilität des Ballons wird noch weiter unten eingegangen werden. In der Höhe von 3200 bis 3400 m konnte eine große Anzahl von Messungen ausgeführt werden; dann wurde die Sauerstoffvorrichtung bereit gemacht und der Ballon stufenweise in größere Höhen getrieben. So wurde der Reihe nach in etwa 3600 m, 4500 m, 5000 m und der Maximalhöhe von 5760 m luftelektrisch gemessen.

Die Fahrt war über die südöstliche Mark, über Schlesien ungefähr dem Laufe der Oder folgend bis nach Oberschlesien gegangen; gegen 6 Uhr Abends war der verfügbare Ballast verbraucht, der Ballon begann zu fallen und sank, nachdem er noch durch etwas Ballast im Falle aufgehalten war, langsam bis das mittlerweile ausgebrachte Schlepptau sich auf den Boden legte. Die Landung erfolgte bei fast vollkommener Windstille auf einer Waldblöße (Windbruch); die Bergung und Verpackung des Ballons war schwierig.

Wetterlage. Am 10. Mai lag eine Depression nordwestlich von Schottland, vom Kanal schob sich über Nordfrankreich eine Zunge hohen Druckes gegen Mitteldeutschland hin vor; ein anderes Hochdruckgebiet lagerte über dem Innern Rußlands, über dem Golf von Genua und dem Adriatischen Meer lagen Depressionen. Am Morgen der Fahrt hatte sich die Zunge hohen Druckes westwärts zurückgezogen und unter geringer allgemeiner Druckabnahme war über dem zentralen Festlande Europas ein ost-westlich gelagerter Hochdruckrücken entstanden. Die nord-westliche Depression vom Vortage war in nord-östlicher Richtung unter erheblicher Abnahme der Gradienten vorgerückt und hatte ein Teilminimum über die Ostsee hin entsandt; über dem Mittelmeer lag noch eine flache Depression. Im Laufe des Tages vertiefte sich die Depression über der Ostsee und die Mittelmeerdepression verlagerte sich unter Druckausfüllung etwas nord-westwärts; der ost-westliche Hochdruckrücken blieb unter allgemeiner geringer Druckabnahme bis zum 12. Mai bestehen.

Die Fahrt zeigte die oben erwähnte Strato-Cumulus-Schicht in etwa 900–1500 m Höhe; darüber war eine ganze Anzahl mehr oder minder auch für das Auge merklicher Dunstschichten vorhanden. So wurde eine Stratus-Decke von geringer Mächtigkeit aber merklicher Dichte zwischen etwa 2300—2400 m Höhe durchfahren, eine dünne Altostratus-Decke von erheblicher Mächtigkeit lagerte zwischen etwa 3900 und 4400 m Höhe; die ganze Atmosphäre erschien recht unsichtig und diese allgemeine Trübung erschwerte die sichere Erkennung der Grenzen von Schichten mit gesteigerter Trübung. Dennoch kann nach dem vorgefundenen Verlauf der Temperatur und der Feuchtigkeit mit der Höhe wohl kaum ein Zweifel darüber herrschen (vgl. die Tafel), daß außer den vom Auge deutlich wahrgenommenen Dunstschichten noch solche mit geringerer Trübung in etwa 3300 m (stabile Höhenlage des Ballons) und in etwa 5300 m vorhanden waren; in der beigegebenen Tafel sind diese beiden Dunstschichten nur durch gestrichelte Linien bezeichnet. In großen Höhen wechselte die Bewölkung im Laufe des Tages; es wurden Alto-Cumuli, Cirro-Cumuli und Cirro-Stratus bemerkt.

Der vertikale Temperaturgradient (vgl. die Tafel) war vom Boden bis zur Basis der Cumuli wohl nahezu der adiabatische; in der Region der Cumuli war der Verlauf des Gradienten ein sehr wechselnder — vielleicht lag in etwa 1100 m Höhe eine schwache Umkehrschicht. Das Vordringen der Cumuli wurde begrenzt durch den nahezu isothermen Verlauf der Temperatur zwischen 1550 und

1900 m Höhe. Immerhin scheinen unter dem Einfluß der mittäglichen Sonnenstrahlung hier und da einzelne Cumuli diese Stabilitätsschicht durchbrochen zu haben; ein solcher Cumuluskopf mit seinem „falschen Cirrusschirm“ konnte auf der photographischen Platte festgehalten werden. Ueber 2000 m Höhe nimmt die Temperatur wieder schneller ab, bis in 3200 m Höhe eine Inversionsschicht mit nahezu 2° Temperaturzunahme erreicht wird. Diese verhältnismäßig starke Stabilitätsschicht war die Grundlage der im Fahrtbericht hervorgehobenen Tendenz des Ballons zu ruhiger Fahrt. Von 3300 m bis etwa 4600 m besteht wieder starke Temperaturabnahme, zwischen 4600 m und etwa 5300 m äußerst schwache Abnahme, die darüber wieder in stärkere Abnahme übergeht.

Der Verlauf der relativen Feuchtigkeit mit der Höhe ist entsprechend den verwickelten Schichtungsverhältnissen ein recht wechselvoller, auffällig ist die verhältnismäßig hohe Feuchtigkeit, die noch in den höheren Schichten vorgefunden wurde. Vom Boden bis zur Basis der Cumuli nimmt die Feuchtigkeit offenbar zu; innerhalb der Lücke zwischen den Cumuli, in der der Ballon starke Höhenschwankungen durchmachte, ändert sich die relative Feuchtigkeit sprunghaft. In der Tafel sind lediglich die zeitlich auf einander folgenden Messungen eingetragen und mit einander verbunden. Oberhalb der Cumuli scheint der Verlauf ein ruhiger zu sein; über das Verhalten innerhalb der untersten Dunstschicht konnte ebenso wenig wie bei der Lufttemperatur Aufschluß erhalten werden, da der Ballon durch das oben erwähnte starke Ballastopfer, das infolge des plötzlich einsetzenden absteigenden Luftstromes notwendig geworden war, diese Schicht zu schnell passierte, um erst über ihr zur Ruhe zu kommen. Die Inversion in 3200—3300 m ist auch im Feuchtigkeitsdiagramm deutlich erkennbar. Auch die Alto-stratus-Decke in 3900—4400 m Höhe ist durch eine geringe Abnahme der relativen Feuchtigkeit ausgezeichnet. Darüber wurden starke Schwankungen der relativen Feuchtigkeit beobachtet, die vielleicht auch im Zusammenhang mit Schichtungen stehen; immerhin muß berücksichtigt werden, daß die Feuchtigkeitsmessung bei den dort herrschenden niedrigen Lufttemperaturen schon recht ungenau ist.

Zur Linken der Mittellinie des Diagramms ist der Verlauf der spezifischen Feuchtigkeit $\left(1 \text{ Intervall} = 5 \frac{\text{gr Wasserdampf}}{\text{kg Luft}}\right)$ aufgetragen. Diese Darstellung des Wasserdampfgehaltes der Luft, die ja besonders geeignet ist für die Beurteilung der Her-

kunft verschiedener über einander gelagerter Luftströmungen, zeigt in diesem Falle wenig hervortretende Merkmale; nur in der Höhe von etwa 3200 m ist eine starke Aenderung mit der Höhe zu erkennen — diese Schicht scheidet die Luftmassen mit geringerer spezifischer Feuchtigkeit in der Höhe von denjenigen mit größerer spezifischer Feuchtigkeit in der Tiefe. Eine ähnliche Rolle spielt diese Schicht, wie weiter unten hervortreten wird, auch in Bezug auf die horizontale Strömungsgeschwindigkeit.

Da während der ganzen Fahrt die Orientierung aufrecht erhalten werden konnte, liegen mehrere gute Bestimmungen der Windgeschwindigkeit in den verschiedenen Höhen vor. Diese zeigen ebenso geringe Aenderungen wie die Windrichtung, die während der ganzen Dauer der Fahrt N. W. blieb. Um die graphische Darstellung nicht zu überlasten, gebe ich die Resultate der Geschwindigkeitsmessungen nur in der folgenden Tabelle wieder:

Zwischen den aufeinander folgenden Höhen und Zeiten wurden die nebenstehenden Geschwindigkeiten gemessen:

Höhe m	Zeit h m	Geschwindigkeit in m/sec.
40	$8^h\ 34^m$ a.	
		11,9
995	$8^h\ 40^m$ a.	
		11,8
1086	$9^h\ 14^m$ a.	
		12,1
1148	$9^h\ 43^m$ a.	
		11,5
1350	$10^h\ 38^m$ a.	
		12,5
1553	$11^h\ 12^m$ a.	
		11,7
2196	$1^h\ 23^m$ p.	
		12,0
3100	$2^h\ 42^m$ p.	
		9,7
3190	$3^h\ 07^m$ p.	
		13,5
3470	$3^h\ 49^m$ p.	
		14,6
4150	$4^h\ 18^m$ p.	
		11,6
4500	$4^h\ 44^m$ p.	
		10,9
260	$6^h\ 50^m$ p.	

Wie die Tabelle zeigt ergiebt sich keine besonders charakteristische Geschwindigkeitsverteilung für die verschiedenen Höhenstufen; fast die ganze Luftmasse zwischen dem Erdboden und der Maximalhöhe von 5760 m hat sich mit nahezu gleicher Geschwindigkeit von im Mittel 11,9 m/sec. in süd-östlicher Richtung fortbewegt. Die einzige mit einiger Sicherheit festzustellende merkliche Aenderung der Geschwindigkeit mit der Höhe scheint in etwa 3200 m

stattgefunden zu haben; in dieser Höhe lag die schon mehrfach erwähnte Inversions- und Stabilitätsschicht, die also auch in Bezug auf die Strömungsgeschwindigkeit eine Grenze zwischen den darüber und darunter liegenden Luftmassen gebildet zu haben scheint. In Anbetracht der etwas verwickelten Wetterlage, von der zur Zeit ja nur die am Boden und die bei einem Vertikalschnitt erhaltenen Daten vorliegen, ist es noch nicht mit Sicherheit möglich, etwas über die Herkunft der untersuchten Luftströme auszusagen; wahrscheinlich entstammte die Luft der höheren Schichten in dem Hochdruckrücken den nördlich und südlich über der Nord- und Ostsee und dem Mittelmeer liegenden Depressionen. In diesen großen Wirbeln stieg sie erwärmt und mit Wasserdampf beladen auf, um in dem Rücken hohen Druckes über dem zentralen Festlande herabzusinken; nimmt man diese Strömungsverhältnisse an, so wird die verhältnismäßig hohe relative Feuchtigkeit, die wir noch in den Höhen von 5700 m vorfanden, erklärlich. Allerdings ist es zur Zeit wohl noch nicht zu entscheiden, welchen Depressionsgebieten die Luft in den verschiedenen Höhen entstammte, das wird vielleicht erst nach Veröffentlichung des gesammten bei den internationalen Terminaufstiegen vom 11. Mai 1905 erhaltenen Materials möglich sein. Auf die Beziehungen, die zwischen der Herkunft der Luftmassen bei dieser Fahrt und ihren elektrischen Eigenschaften vermutet werden können, wird weiter unten eingegangen werden.

Luftelektrische Messungen.

Die Resultate der Leitfähigkeits- und Potentialgefällemessungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt mit den daraus berechneten Dichten des vertikalen Leitungsstromes; in der graphischen Darstellung ist auch der Verlauf des Potentialgefälles in der Cumulusschicht eingetragen; da bei den hier vorkommenden schnellen Änderungen des Gefälles von einer Feststellung des Gefälles als Funktion der Höhe nicht die Rede sein kann, giebt die Kurve hier lediglich die zeitliche Aufeinanderfolge der einzelnen Messungen an.

Die Anteile der positiven und der negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit sind rechts und links von der Mittellinie des Diagramms gesondert eingetragen. Die gemessenen Werte sind (1 Intervall = 5.10^{-4} elektrostatische Einheiten) durch vertikale Striche bezeichnet, deren Länge die Änderung der Höhenlage des Ballons während der betreffenden Messungsreihe angiebt.

[illegible] .10⁴	$\lambda . 10^4$	Potentialgefälle Volt/m	Potentialgefälle in elektr. Einheit. 10^4	Dichte d. vertikalen Leitungsstromes in elektr. Maß $.10^7$	
[illegible]	(0,49₁)	> + 70	> + 23	(> + 1,15)	Während d. Messung muß Sandballast gegeben werden.
[illegible]	1,18₈	+ 24,4	+ 8,1	+ 0,69₀	Es läuft langsam Wasser aus. In einer Lücke zwischen den Cumuli.
		+ 29,0	+ 9,7		¹) Nach dieser Messungsreihe muß Sandballast gegeben werden.
		+ 50,5	+ 16,8		
		+ 62,4	+ 20,8		
		+ 63,4	+ 21,1		
		+ 21,1	+ 7,0		
[illegible]5)²)		(> + 70)	(> + 23)		²) Nach dieser Messungsreihe 3 Sack Sandballast, dann erst kehrt der Ballon um!
[illegible]74	11,70	+ 6,6	+ 2,2	+ 2,58	Über der Stratus-Decke.
[illegible]91	7,56	+ 9,3	+ 3,1	+ 2,34	
[illegible]75	8,39	+ 9,7	+ 3,2	+ 2,71	
[illegible]34	6,35	+ 6,1	+ 2,0	+ 1,29	
[illegible]30	4,24	+ 5,1	+ 1,7	+ 0,72	
[illegible]96	6,88	+ 3,6	+ 1,2	+ 0,82	Über einer Dunstschicht.
[illegible]90	7,82	+ 3,0	+ 1,0	+ 0,78	
[illegible]14	13,65	+ 2,9	+ 1,0	+ 1,32	

Der zwischen je zwei Messungen interpolierte Verlauf der Leitfähigkeit mit der Höhe ist ohne Berücksichtigung der Dunstschichten eingetragen, er ist also frei von jeder Annahme über die Einwirkung solcher Schichten auf die Leitfähigkeit. Auf der rechten Seite der Mittellinie findet sich auch der Verlauf der Dichte des vertikalen Leitungsstromes (1 Intervall $= 5.10^{-7}$ elektrostatische Einheiten) eingetragen.

Mehrmals konnte ich meinen beiden Korbgenossen das Auftreten einer positiven Ballonladung beim Ausgeben von Sandballast demonstrieren.

Diskussion der Resultate.

Das Potentialgefälle und damit auch die Dichte des vertikalen Leitungsstromes wurde dauernd positiv gefunden; in der Region der Cumuli zeigt das Gefälle starke Schwankungen, bei denen sich leider zeitliche und räumliche Änderungen nicht mit Sicherheit von einander trennen lassen. Unmittelbar über der Cumulusschicht zeigte das Gefälle einen ruhigeren Charakter, es nimmt von 1570 bis 2770 im Durchschnitt um 0,012 Volt/m² ab, entsprechend einer in diesen Höhen häufig angetroffenen positiven räumlichen Ladungsdichte von 3,2 10^{-10} elektrost. (zeitliche Konstanz vorausgesetzt). Leider mußten Messungen in der Nähe der Stratusdecke bei 2300 m wegen des zu schnellen Steigens des Ballons unterbleiben. Von 2770—3330 m ist eine kleine Zunahme des Gefälles bemerkbar; ob sie lediglich auf Rechnung einer zeitlichen Änderung zu setzen ist, oder einer schwachen negativen räumlichen Ladungsdichte entspricht, läßt sich nicht entscheiden. Die Messungen innerhalb der schon oft erwähnten Inversionsschicht bei 3200 m Höhe scheinen eine beträchtliche positive Ladungsdichte in dieser anzudeuten. Oberhalb der Schicht nimmt das Potentialgefälle langsam und stetig ab, um in der Maximalhöhe von 5760 m den sehr kleinen Wert + 2,9 Volt/m zu erreichen.

Die Anteile der positiven und der negativen Ionen an der Leitfähigkeit sind unterhalb der Basis der Cumuli beide äußerst klein; dieser Befund steht in guter Übereinstimmung mit den Messungen bei früheren Fahrten (2. VIII. 1903, 14. IV. 1904), wo auch in der nahe am Kondensationspunkte befindlichen feuchten, trüben Luft in der Nachbarschaft von Cumuluswolken, sehr kleine Leitfähigkeiten gemessen wurden. Innerhalb der Lücke zwischen den Cumuli, wo vermutlich ein absteigender Strom weniger getrübter Luft bestand, nahmen beide Anteile etwas zu.

Die durch Ausgabe von Sandballast gestörten Messungsreihen (vergl. die Tabelle) zeigen den charakteristischen Überschuß an negativen Ionen in der Nachbarschaft des positiv elektrisierten Ballons an. Die nächsten Messungen konnten infolge des schon mehrfach erwähnten schnellen Aufstieges erst über der Stratus-Decke vorgenommen werden und ergaben hier, vielleicht infolge geringerer Dichte der Adsorptionskerne sehr große Werte der Leitfähigkeit. In der Nähe und innerhalb der Inversionsschicht bei 3200 m zeigen die drei aufeinander folgenden Messungsreihen übereinstimmend wieder eine Abnahme der Leitfähigkeit, wohl infolge des Vorhandenseins von Adsorptionskernen, die zwar dem Auge des Beobachters entgangen sind, aber nach dem Verlauf der meteorologischen Elemente mit Sicherheit angenommen werden können. Oberhalb der Inversionsschicht nimmt der Anteil der positiven Ionen weniger ab als derjenige der negativen Ionen, entsprechend dem gewöhnlichen Verhalten der beiden Anteile über einer Schicht von Adsorptionskernen im normalen Felde: die negativen Ionen müssen die Schicht von unten nach oben passieren, dabei werden sie teilweise adsorbiert und ihr Anteil an der Leitfähigkeit muß sinken — die positiven Ionen wandern dagegen aus der weniger getrübten Luft oberhalb der Adsorptionsschicht nach unten gegen diese hin, ihr Anteil an der Leitfähigkeit hat also noch keine Einbuße erlitten. Oberhalb der Alto-Stratus-Decke ist wieder sehr deutlich das Überwiegen des positiven Anteils über den negativen erkennbar. Die Leitfähigkeitsanteile, welche in rund 5000 m Höhe gemessen wurden, zeigen sehr deutlich das umgekehrte Verhalten: der negative Anteil überwiegt den positiven. Vielleicht ist dieser Befund durch das Vorhandensein einer auch im Temperatur- und Feuchtigkeitsverlauf angedeuteten Adsorbtionsschicht in etwa 5200 m Höhe zu erklären, die in diesem Falle den Anteil der von oben durch sie hindurch wandernden positiven Ionen an der Leitfähigkeit verringern mußte. Die Messungen in der Maximalhöhe ergaben auch die maximale Leitfähigkeit; der positive Anteil überwiegt nur wenig den negativen, entsprechend der Abwesenheit einer Adsorbtionsschicht in dieser Höhe. Dennoch ist offenbar die Leitfähigkeit etwas kleiner, als sie sonst in dieser Höhe angetroffen wurde, was wohl mit der noch merklichen Lufttrübung, oder auch mit einer durch die vermutete Herkunft dieser Luftströme zusammenhängenden Armut an radioaktiver Emanation zusammenhängt.

Die vorliegenden zusammenhängenden Messungen des Potentialgefälles gestatten zum ersten Male einen Einblick in den Ver-

lauf der Dichte des vertikalen Leitungsstromes mit der Höhe. Es ergiebt sich das bemerkenswerte Resultat: obgleich die Einzelwerte des Potentialgefälles und der Leitfähigkeit im Laufe der Fahrt im Verhältnis von etwa 1:25 bezw. 1:27 sich ändern, schwankt die Dichte des vertikalen Leitungsstromes nur im Verhältnis 1:4. Dieses Verhalten nähert sich also merklich demjenigen, welches man erwarten müsste, wenn in großer Höhe eine zeitlich konstante Nachlieferung positiver Ladungen stattfinden würde und auf der ganzen zwischen dieser Höhe und der Erdoberfläche gelegenen Strecke sich der stationäre Zustand eingestellt hätte. Die geringe Änderung des vertikalen Leitungsstromes mit der Höhe ist um so bemerkenswerter, als vermutlich in der Höhe eine sehr beträchtliche Zeit zur Herstellung des stationären Zustandes notwendig ist; in etwa 5500 m Höhe ist die spezifische Ionengeschwindigkeit[1]) zwar etwa doppelt so groß als am Boden, nämlich etwa 900 bis 1200 elektrostatische Einheiten, da aber das Feld hier nur noch sehr klein (nämlich etwa 1.10^{-4} elektrost.) ist, so ist die wirkliche vertikale Wanderungsgeschwindigkeit der leicht beweglichen Ionen nur etwa 0,1 cm/sec. Tritt also in der vorher ungetrübten Luft eine Adsorbtionsschicht auf, so wird in 10 Stunden erst in einer Schicht von 36 m Mächtigkeit über und unter der Adsorbtionsschicht die Verminderung des Anteils der negativen bezw. positiven Ionen merklich sein, sofern man Diffusion, Konvektion, Molisierung und Ionisierung außer Acht läßt. Eine noch größere Zeit wird im allgemeinen verstreichen müssen, bis innerhalb der Schicht eine merkliche Steigerung des Gefälles eingetreten ist, die der verringerten Leitfähigkeit entspricht. Baut man auf dieser Überlegung weiter, so wird man aus dem Befunde vom 11. Mai, nach welchem die vorhandenen Adsorbtionsschichten in 3200 m, 3700 bis 4400 und 5200 m Höhe zwar schon die Anteile der positiven und negativen Ionen an der Leitfähigkeit in ihrer Nachbarschaft, aber anscheinend noch nicht das Gefälle in ihrem Innern beeinflußt hatten, vielleicht den Schluß ziehen können, daß diese Schichten schon seit mehreren Stunden bestanden, nicht aber seit erheblich längerer Zeit, was in Anbetracht der geringen Änderung, die vom 10. zum 11. Mai in der Witterung des Hochdruckrückens eintrat, wohl zutreffen könnte. Aus der verhältnismäßig langsamen Änderung der Wetterlage am 11. Mai wird man wenigstens für die Luftmassen oberhalb der Cumulus-Region eine geringe

1) H. Gerdien, l. c.

zeitliche Änderung der elektrischen Verhältnisse annehmen können; danach würde der im Laufe von etwa 6 Stunden gewonnene luftelektrische Vertikalschnitt durch die Schichten zwischen 2500 und 5760 m Höhe merklich die räumlichen Änderungen allein wiedergeben. Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, zeigt die Dichte des vertikalen Leitungsstromes einen beachtenswerten Zusammenhang mit den meteorologischen Verhältnissen: oberhalb der Inversion in 3200 m ein verhältnismäßig kleiner und nur gegen die Maximalhöhe hin etwas ansteigender Wert — unterhalb der Inversionsschicht ein etwa dreimal so großer Wert, der erst unterhalb der Stratus-Decke in 2300 m Höhe kleiner zu werden scheint. Auffällig ist die Zunahme der Vertikalstromdichte gerade unterhalb derjenigen Schicht, die schon in mancherlei Beziehung hervorgetreten ist, sie enthält nach den Potentialgefällemessungen wahrscheinlich erhebliche positive räumliche Ladungsdichte, sie war auch als Geschwindigkeits-Grenzfläche zwischen den Luftmassen der größeren und geringeren Höhen aufgetreten. Danach liegt der Schluß nahe, daß diese Schicht in horizontalem Konvektionsstrome positive Ladung mitführte, unter deren Wirkung in der darunter liegenden Luft ein stärkerer Leitungsstrom unterhalten werden konnte, als in der darüberliegenden.

Es ließen sich noch eine Reihe von Schlüssen aus diesem Befund, insbesondere in Bezug auf die Höhe ziehen, in der dieser horizontale Konvektionsstrom vorgefunden wurde, doch will ich davon Abstand nehmen, solange mir für diese Folgerungen nur das Material von einer Fahrt als Grundlage dienen kann.

Herrn Geheimrat R. Assmann bin ich für die gütigst erteilte Erlaubnis zur Teilnahme an dieser Fahrt zu Dank verpflichtet; ebenso sage ich auch an dieser Stelle Herrn Prof. A. Berson und Herrn Dr. A. Wegener für ihre vielfach mir gewährte Unterstützung herzlichen Dank. Die Kosten der Untersuchung wurden aus dem von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften für luftelektrische Arbeiten zur Verfügung gestellten Fond bestritten.

Göttingen, Geophysikalisches Institut; Juni 1905.

Beiträge zur Kenntnis der Farblacke.

Von

Wilhelm Biltz.

(Gemeinschaftlich mit Kurt Utescher).

Mit 2 Figuren.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. Juni 1905 durch O. Wallach.

Wenn man die Vorgänge bei der Beizfärberei unter Berücksichtigung der Resultate der Colloidchemie in ähnlicher Weise, wie dies in zwei früheren Untersuchungen[1]) an dem Beispiel der substantiven Färbungen geschehen ist, quantitativen Messungen zugänglich zu machen wünscht, so wird sich bei der complicierteren Natur dieser Processe, bei welchen neben der Faser und dem Farbstoffe als dritte Componente das Fixationsmittel zu berücksichtigen ist, eine Teilung empfehlen; und zwar eine solche in die Bindung von Farbstoff und Fixationsmittel und in die Aufnahme des entstandenen Lackes durch die Faser. Die Analogisierung zunächst dieses zweiten Vorganges mit der substantiven Färbung liegt sehr nahe: Krafft und Preuner[2]) haben die Colloidnatur, insbesondere der Tanninlacke bewiesen, und ferner sind durch Knapstein[3]) Lösungen von Präparaten aus Metallbeizen und Alizarinfarbstoffen in inniger noch nicht näher definierter Vereinigung dargestellt worden, welche als solche unmittelbar der Faser einverleibt werden können. Die Möglichkeit andererseits, dass in den Lacken, z. B. den aus Oxyden mehrwertiger Metalle und Alizarinen gebildeten Stoffen, andere, als salzartige Körper vorliegen, ist bisher, wenn auch vielleicht erwogen, so doch nicht

1) Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse 1904 Heft 1; ebenda 1905 Heft 1. Ber. 37, 1766 [1904].

2) Preuner, Dissertation, Heidelberg 1898.

3) D. R. P. 143801 Chem. Centralbl. 1903 II, 472.

zum Gegenstande experimenteller Prüfung gemacht worden. Vielmehr gingen die Forscher, welche sich mit ihrer Untersuchung beschäftigten, unmittelbar von dieser allerdings naheliegenden Voraussetzung, der Salznatur der Lacke, aus. So konnte Liebermann[1]) die von ihm aufgefundene Regel, nach welcher die Fähigkeit der Alizarinfarbstoffe zur Lackbildung von der Stellung der Hydroxylgruppen im Farbstoffmolekül abhängt, dadurch dem Verständnisse näher bringen, daß er auf die Entstehungsmöglichkeit gewisser aus Metall-, Sauerstoff- und Kohlenstoffatomen bestehender Ringe hinwies. Wie indessen Liebermann betonte, und wie dies besonders gegenüber den Ergebnissen der Studien von C. O. Weber[2]) und der Versuche von Suida und Liechti[3]) über die Lacke gilt, ist es noch in keinem einzigen Falle gelungen, die stöchiometrische Zusammensetzung eines typischen Lackes festzustellen, sodass eine Constitutionsbetrachtung bei diesen Stoffen also von vornherein auf schwachen Füssen ruht. Denn daß die aus Gemischen stöchiometrisch berechneter Mengen erhaltenen Lacke wiederum stöchiometrisch stimmende Analysenzahlen liefern, dürfte als Beweis für die Existenz entsprechend zusammengesetzter Salze nicht wohl zu verteidigen sein.

Einer nach Möglichkeit präcisen Beantwortung der angeregten Frage nach der Natur der aus Oxyden und Beizfarbstoffen gebildeten Lacke sind wir durch die folgenden Versuche nähergetreten.

Zwischen den drei für die Vereinigung zweier Stoffe hier in Frage kommenden Möglichkeiten: Bildung einer flüssigen oder festen Lösung, Bildung einer Adsorptionsverbindung und Bildung einer chemischen Verbindung kann unter Umständen exact durch Untersuchung der Abhängigkeit der Zusammensetzung des entstandenen Gebildes von der Concentration der Componenten entschieden werden[4]). Bei konstant gehaltener Menge des als Fixationsmittel dienenden Oxydhydrates und bei wachsender Concentration der dargebotenen Farbstofflösung wird in den beiden ersten Fällen die Farbstoffaufnahme continuirlich wachsen. Im dritten Falle handelt es sich um die Ausbildung eines im Sinne der Phasenregel vollständigen heterogenen Gleichgewichtes aus zwei unabhängigen Bestandteilen (Beize und Farbstoff) inner-

1) Ber. **26**, 1574 [1893].
2) Dingl. polyt. J. **289**, 160, 186.
3) Mitt. d. technolog. Gewerbe-Museums in Wien **2**, Mai 1885.
4) vgl. Wilhelm Biltz, Chem. Ztg. **29**, 325 [1905].

halb zweier festen Phasen (Beize und Lack) und einer flüssigen Phase (Farbstofflösung); dieser Fall wird sich dadurch markieren, daß die bei wachsender, aber nicht zur Absättigung des Substrates ausreichender Anfangsconcentration des Farbstoffes erreichte Endconcentration jeweils gleich und zwar dem Dissociationsgrade der gebildeten Verbindung entsprechend, unter Umständen also praktisch Null wird und daß ferner nach Ueberschreitung des Absättigungspunktes eine weitere Aufnahme von Farbstoff über die zur Bildung der Verbindung nötige Menge hinaus nicht mehr erfolgt. Es wäre demnach dieser Vorgang durchaus mit der gewissermaßen paradigmatischen [1]) Bildung von Calciumcarbonat aus Calciumoxyd und gasförmigem Kohlendioxyd vergleichbar, insofern der Beize das Calciumoxyd, dem Farbstoff das Kohlendioxyd und dem Lacke das Carbonat entspricht. Trägt man die von konstanter Menge Oxyd aus gleichen Raumteilen verschieden concentrierter Farbstofflösungen aufgenommene Menge Farbstoff als Ordinate, die jeweilige Endconcentration des Farbstoffes als Abscisse auf, so würde das Ideal der in Rede stehenden Möglichkeit durch eine der Ordinatenaxe zunächst parallel in einem von der hydrolytischen Zersetzung des Salzes abhängigen Abstande verlaufenden oder mit ihr zusammenfallenden Geraden dargestellt werden, welche in einem die Zusammensetzung des gebildeten Salzes ausdrückenden Abstande von der Abscissenaxe unter scharfem Knick nunmehr dieser parallel wird. Wie man sieht, ergiebt eine solche Versuchsdurchführung neben der Aufklärung über die Gattung des entstehenden Stoffes zugleich dessen Zusammensetzung.

Auf dem geschilderten Wege gelang es uns nur in einem einzigen Falle — bei der Combination von Eisenoxydhydrat und Alizarin in alkalischer Lösung — die Existenz eines bestimmten Alizarates nachzuweisen.

Die Technik der Versuche war die gleiche, wie früher. Die durch Fällung von Salzlösungen mit Ammoniak bereiteten und durch Dekantieren bis zum Verschwinden jeweils charakteristischer Reaktionen innerhalb der Waschflüssigkeiten ausgewaschenen Oxydhydrate wurden entweder in der Kälte mit den Farbstofflösungen geschüttelt oder mit diesen unter Rückfluß gekocht. In jedem Falle überzeugte man sich, daß die Farbstofflösungen selbst unter gleichen Bedingungen unverändert blieben, daß ferner innerhalb der angewandten Zeiten die Ausfärbung praktisch vollendet und daß schließlich von dem gebildeten Lacke nichts durch „Peptisie-

1) vgl. Nernst, theor. Chem. 1893, 377.

rung“ in Lösung gegangen war. Die quantitative Bestimmung der in der Flotte zurückgebliebenen Farbstoffe geschah durch colorimetrischen Vergleich, wobei die früher [1]) angegebenen Vorsichtsmaßregeln: Erzielung gleicher Farbnüance durch Zusatz von Natronlauge, Reinigung der Lösungen von suspendierten Teilchen mittelst Filtration durch Thon [2]), schnelles Arbeiten bei leicht veränderlichen Lösungen sorgfältig inne gehalten wurden.

Eine Schwierigkeit lag in dem Umstande, daß gerade die einfachen Beizfarbstoffe in Wasser so gut, wie unlöslich sind. Man war daher auf die Prüfung alkalischer oder alkoholischer Farbstofflösungen, sowie auf die Untersuchung einiger der allerdings complicierter zusammengesetzten, neueren, wasserlöslichen Beizfarbstoffe beschränkt.

1. Alizarin [3]) in alkalischer Lösung gegen Eisenoxyd.

A. Je 2.220 ccm Eisenoxydhydrogel = 0.1141 gr Fe_2O_3 wurden 6—8 Stunden lang mit je 200 ccm einer Lösung variabler Menge Alizarin in 0.8 % Natronlauge geschüttelt. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Spalte die Anfangsconcentrationen, in der zweiten die Endconcentrationen in Procenten und in der dritten Spalte die hieraus berechneten von je 1 gr Oxyd aufgenommenen Mengen Farbstoff in Grammen enthalten.

0.0050	0.00114	0.0677
0.0075	0.00201	0.0964
0.010	0.00234	0.134
0.020	0.00242	0.308
0.040	0.00261	0.655
0.060	0.00281	1.01
0.10	0.00326	1.695
0.15	0.00369	2.57.

Wie die Spalte 2 zeigt, stellen sich im Gegensatz zu allen bisherigen Versuchen für stark variierende Anfangsconcentrationen (0.0075 %—0.060 %) nur wenig von einander verschiedene Endconcentrationen ein.

---

1) Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse 1905 Heft 1, 49.

2) Hierbei muß natürlicherweise der zuerst filtrierende Anteil verworfen und im übrigen controlliert werden, ob nicht durch die weitere Filtration eine Concentrationsänderung eintritt.

3) Wie auch die folgenden Farbstoffe ein Präparat der Höchster Farbwerke.

B. Durch steigenden Alkalizusatz, 1% NaOH, zu den Flotten wird die Endconcentration, wie die folgende Tabelle zeigt, ein wenig erhöht.

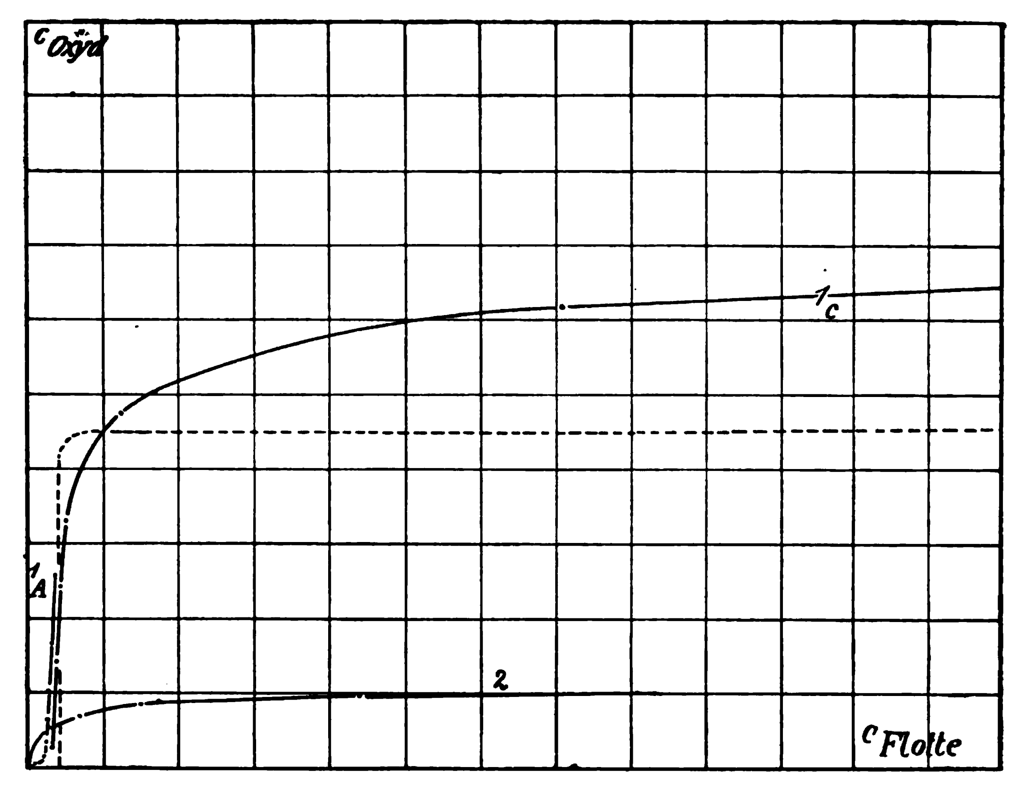
0.010	0.0027	0.128
0.020	0.0027	0.303
0.060	0.00321	0.995
0.080	0.00343	1.34
0.10	0.00370	1.69.

C. Einen vollständigen Ueberblick über die Absättigung des Eisenoxydhydrogels liefert die nächste Versuchsreihe, in welcher zur Erzielung eines relativ stärkeren Ueberschusses an Farbstoff nur die Hälfte des übrigens einem anderen Präparate entstammenden Eisenoxydhydrogels (je 1.025 ccm = 0.05818 gr Fe_2O_3) verwandt wurde.

0.010	0.003125	0.236
0.020	0.00314	0.579
0.045	0.00355	1.425
0.075	0.00417	2.44
0.10	0.005175	3.27
0.15	0.0125	4.73
0.25	0.07075	6.16
0.35	0.159	6.57.

Die in Curventafel I enthaltene graphische Darstellung dieser Ergebnisse zeigt aufs deutlichste, daß hier eine Realisierung des einleitend an dritter Stelle besprochenen Falles, also eine Salzbildung, vorliegt. Der Abstand der Vertikalen von der Ordinatenaxe ist der Ausdruck für den Betrag der Dissociation des Ferrializarates in Eisenoxydhydrat und Natriumalizarat und wächst, wie die Versuchsreihe B zeigt, ganz im Einklange mit dieser Interpretation mit steigender Alkalität der Lösung. Ein deutlich ausgeprägter Knick zeigt die Ueberführung des gesamten Substrates in eine gesättigte chemische Verbindung an und zwar, wie der Abstand dieses Punktes von der Abscissenaxe lehrt, einer solchen aus einem Molekül Fe_2O_3 und drei Molekülen Alizarin. Daß von hier ab die Curve nicht der gestrichelten Horizontalen folgt, sondern, wenn auch nur schwach, weiter ansteigt, deutet darauf hin, daß das entstandene Alizarat vermöge seiner amorphen Beschaffenheit durch Adsorption noch weitere Farbstoffmengen nach bekannter Gesetzmäßigkeit zu binden vermag; die in den verdünntesten Lösungen erhaltenen, übrigens nur unwesentlich von der erwarteten Vertikalen entfernten Werte lassen vielleicht auf noch unvoll-

kommene Erreichung des sich innerhalb dieser Concentrationen nur äußerst langsam einstellenden Gleichgewichts schließen.



Curventafel I.

$C_{Flotte} \times 100$; $C_{Oxyd} \times 1$.

Im ganzen deutet die dem idealen, durch die gestrichelte Linie ausgedrückten Verlauf sich gut fügende Curve mit unleugbarer Schärfe auf die Existenz der erwähnten Verbindung, wodurch ein Beweis und, wie vielleicht zu betonen richtig ist, der erste Beweis für die Bildung bestimmter Ferrializarate geliefert ist. Außerdem liefert ein Vergleich dieser Curve mit früheren und folgenden von ausgesprochen continuirlichem Verlauf für den Adsorptionscharakter jener Vorgänge gewissermaßen einen Beweis ex contrario.

Wenn schon der über der idealen Horizontalen liegende Teil der Curve I_c dafür spricht, daß auch bei der Lackbildung Adsorptionserscheinungen nicht ausgeschlossen sind, so wird dies durch die folgenden Versuche bestätigt. Merkwürdiger Weise hatte bereits der Versuch, Alizarin aus ammoniakalischer Lö-

sung unter den gleichen Arbeitsbedingungen auf Eisenoxyd zu fixieren ein solches Ergebnis.

2. Alizarin in ammoniakalischer Lösung gegen Eisenoxyd.

200 ccm Flotte enthaltend 20 ccm Ammoniak vom spec. Gew. 0.978. 5.460 ccm Eisenoxydhydrogel = 0.3171 gr Fe_2O_3.

0.10	0.00261	0.615
0.15	0.0150	0.8515
0.20	0.04445	0.981
0.25	0.0833	1.05.

In diesem Falle ist — vgl. die graphische Darstellung (Curventafel I) — keine Andeutung für die Bildung eines Eisenalizarates vorhanden.

Ebensowenig lieferte die Untersuchung zweier wasserlöslicher Beizfarbstoffe, die in der Siedehitze auf die Hydrogele des Eisenoxyds und Chromoxyds ausgefärbt werden konnten, eine solche.

3. Säurealizarinblau[1]) gegen Eisenoxyd.

200 ccm Flotte. 2.220 ccm Hydrogel = 0.09253 gr Fe_2O_3. Konstans nach 1 Stunde.

0.0090	>0	<0.194
0.0180	0.00422	0.298
0.0224	0.00646	0.345
0.0320	0.0133	0.403
0.0480	0.0288	0.415
0.0608	0.0414	0.418
0.0900	0.070	0.432.

4. Alizarinrot SW[2] gegen Chromoxyd.

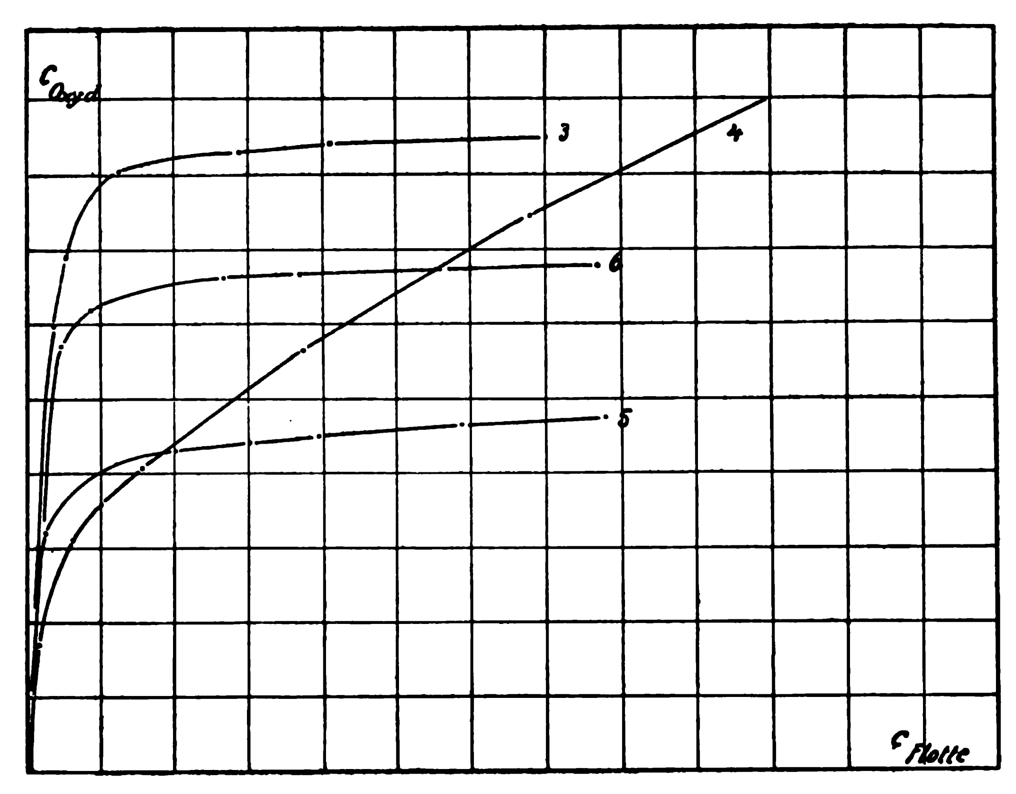
200 ccm Flotte. 5.460 ccm Hydrogel = 0.1106 gr Cr_2O_3. Konstans nach 1.5 Stunden.

		gef.	ber.	Differenz in Procenten.
0.010	0.00034	0.175	0.147	+16
0.020	0.0031	0.306	0.306	0
0.025	0.0052	0.358	0.364	−1.65
0.030	0.00776	0.402	0.416	−3.4
0.050	0.01875	0.565	0.558	+1.2
0.075	0.0341	0.740	0.681	+8.0
0.10	0.0500	0.904	0.774	+14.4
0.50	0.417	1.50	1.57	−4.6.

1) Eine Polyoxyanthrachinonsulfosäure. Constitution vgl. Schultz-Julius 4. Aufl. No. 531.

2) Constitution vgl. Schultz-Julius 4. Aufl. No. 531.

Die Resultate der Serie 4 lassen sich, wie die Zahlen der Spalten 4 und 5 zeigen, leidlich nach der für Adsorptionsvorgänge so häufig [1]) anwendbaren Interpolationsformel: $\frac{C^n_{Oxyd}}{C_{Flotte}} = K$ darstellen, wenn $n = 3$ und $K = 2.1$ gesetzt wird, ein Umstand, der um so weniger über den Charakter dieses Vorganges einen Zweifel läßt. Vgl. Curventafel II.



Curventafel II.

3) $C_{Flotte} \times 100$, $C_{Oxyd} \times 20$.
4) $C_{Flotte} \times 200$, $C_{Oxyd} \times 10$.
5) $C_{Flotte} \times 200$, $C_{Oxyd} \times 20$.
6) $C_{Flotte} \times 20$, $C_{Oxyd} \times 1$.

In einer etwas anderen Weise scheint indessen die Bindung zwischen Eisenoxyd und Säurealizarinblau zu verlaufen; und auch die folgenden Versuche, bei welchen Alizarin auf Eisenoxyd und Galleïn auf Aluminiumoxyd in alkoholischer Lösung in der Siede-

1) vgl. z. B. Ber. 37, 3142 [1904].

hitze gefärbt wurden, ließen ein Gebiet erkennen, in welchem scheinbar eine Absättigung des Oxyds durch den Farbstoff erfolgt ist.

5. Alizarin in alkoholischer Lösung gegen Eisenoxyd.

200 ccm Flotte. 2.220 ccm Hydrogel = 0.09253 gr Fe_2O_3. Konstans nach 1 Stunde.

0.0075	>0	<0.162
0.020	0.0100	0.216
0.025	0.0148	0.2205
0.030	0.0195	0.227
0.040	0.0295	0.227
0.050	0.0390	0.238.

6. Galleïn in alkoholischer Lösung gegen Aluminiumoxyd.

200 ccm Flotte. 5.000 ccm Hydrogel = 0.03411 gr Al_2O_3. Konstans nach 1.5 Stunden.

0.075	—	4.40
0.10	0.0026	5.72
0.15	0.045	6.16
0.25	0.1365	6.65
0.30	0.1875	6.60
0.40	0.286	6.68
0.50	0.3845	6.77.

Aus dem Mittel der höchsten Werte, d. h. dem ungefähren Abstande einer etwaigen Horizontalen (vgl. Curventafel II) von der Abscissenaxe, berechnet sich, daß von einem Molekül Aluminiumoxyd (M = 102) 1.88 Moleküle Galleïn (M = 364) und daß von einem Molekül Eisenoxyd (M = 160) 0.15 Moleküle Alizarin (M = 240) aufgenommen sind. Im ersten Falle ist die Möglichkeit, daß mit wachsender Concentration ein stöchiometrisch erklärbares Mengenverhältnis erreicht wird, gegeben. Eine im Vergleich zu anderen Gelen starke Farbstoffaufnahme war aber auch vom Standpunkte der Colloidchemie zu erwarten; denn das Präparat von Aluminiumoxydhydrat war äusserst fein verteilt und nicht einmal filtrierbar [1]). Immerhin legte dieser Befund eine weitere Prüfung nahe. Es wurde einerseits die Größe der scheinbaren Absättigung durch Beizfarbstoffe möglichst verschiedener Molekulargröße bestimmt und dadurch ähnlich, wie dies Knecht in

1) Nicht filtrierbare Hydrogele werden zweckmäßig durch Dialyse gereinigt.

anderen Fällen zu zeigen versucht hat, ermittelt, ob die jeweils aufgenommenen Mengen im Aequivalentverhältnisse stehen. Andererseits wurde der Einfluß untersucht, den die nach der Art der Herstellung verschiedene Beschaffenheit des Hydrogels auf die Farbstoffaufnahme ausübt.

Zum Vergleiche der Werte der scheinbaren Absättigung wurden je 2.220 ccm Eisenoxydhydrogel = 0.1141 gr Fe_2O_3 in 200 ccm alkoholischer Lösungen von Alizarin, Galleïn, Alizaringelb GGW [1]), Tuchrot GA [2]) und Tuchrot 3 GA [2]) in einer solchen Concentration siedend ausgefärbt, daß das Bad nach Eintritt des Endzustandes noch einen beträchtlichen Farbstoffüberschuß enthielt, daß man sich also sicher im Gebiete der scheinbaren Absättigung befand.

Farbstoff	Mole-kular-Gewicht	Anfangs-concen-tration	Endcon-centration	Farbstoff von 1 gr Oxyd gebunden	Moleküle gebundenen Farbstoffs pro 1 Mol. Fe_2O_3
Alizarin	240	0.06	0.0429	0.30	0.21
Galleïn	364	0.15	0.1285	0.377	0.173
Alizaringelb GGW	303	0.10	0.064	0.631	0.333
Tuchrot GA	482	0.01	0.0064	0.0631	0.021
Tuchrot 3GA	481	0.01	0.0077	0.0403	0.013.

Unter den Versuchsbedingungen ziehen diese Farbstoffe demnach nicht im Verhältnisse ihrer Molekulargewichte oder einem anderen plausibeln Aequivalentverhältnisse auf die Beize. Daß die Farbstoffaufnahme verhältnismäßig geringfügig ist, dürfte mit der Leichtlöslichkeit der Stoffe in Alkohol correspondieren.

Zur Behandlung der zweiten Frage wurden zwei Präparate von Eisenoxyd verwandt, deren eines schon für die vorhergehenden Versuche gedient hatte, eine rein braune Farbe besaß und sich auch mikroskopisch bei schwacher Vergrößerung als ein nahezu homogener Brei erwies. Das zweite Präparat war 10 Tage lang unter häufiger Zugabe von Ammoniak mit siedendem Wasser ausgewaschen worden und hatte eine hell gelbrote Farbe und körnige Struktur angenommen. Beide Präparate wurden beim Ausfärben völlig gleich behandelt.

Farbstoff	Anfangs-conc.	Endconc.	Farbstoff von 1 gr Oxyd gebunden a. körniges Präparat	b. gelatinöses Präparat	a : b
Alizarin	0.060	0.04615	0.049	0.30	1 : 6
Galleïn	0.15	0.141	0.03325	0.377	1 : 11
Alizaringelb GGW	0.10	0.0811	0.06685	0.631	1 : 9.5.

1) Ein beizenfärbender Azofarbstoff; vgl. Schultz-Julius 4. Aufl. No. 30.

2) Beizenfärbende Tetrazofarbstoffe; Schultz-Julius 4. Aufl. No. 170 u. 165.

Die Unterschiede in der Wirkung des körnigen und gelatinösen Oxyds sind sehr ausgeprägt und liefern einen, wie es scheint, einwandsfreien Beweis dafür, daß für die Stärke der Farbstoffbindung durch Beizen deren colloidale Beschaffenheit, wenn auch nicht ausschlaggebend, so doch ein wesentliches Accedens ist.

Im Verein mit den übrigen Resultaten läßt sich demnach dahin resümiren, daß die Frage nach der Natur der Lacke von einer Entscheidung a priori weit entfernt, vielmehr überhaupt keiner einheitlichen Beantwortung fähig ist, wie eine solche bei den substantiven Färbungen möglich war. Die unter Umständen nachweisbaren echten, aus Farbstoff und Oxyd bestehenden Salze vermögen gemäß ihrer colloidalen Beschaffenheit noch weitere Farbstoffmengen durch Adsorption zu binden. Unter anderen Verhältnissen tritt eine Salzbildung entweder überhaupt nicht ein, sodaß man den Eindruck eines reinen Adsorptionsvorganges erhält, oder sie wird durch diesen mehr oder minder verschleiert.

Göttingen und Clausthal i. H.

Zur Zustandsgleichung einatomiger Stoffe.

Von

H. Happel.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 25. Febr. 1905.

Geht man bei der Ableitung der Zustandsgleichung von den gewöhnlichen, zuerst von van der Waals angewandten, später von Boltzmann in strengerer Weise verarbeiteten Vorstellungen über die Beschaffenheit der Gase und Flüssigkeiten aus, so gelangt man bekanntlich zu einer Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad p = \frac{RT}{v}\left\{1 + \frac{b}{v} + \alpha_1\left(\frac{b}{v}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^3 + \cdots\right\} - \frac{a}{v^2},$$

wo p, v, T, bezw. Druck, spezifisches Volumen und absolute Temperatur bedeuten, während a die Attraktionskonstante, b das vierfache Volumen aller in der Masseneinheit enthaltenen und als kugelförmig vorausgesetzten Moleküle ist und die α_i Zahlenfaktoren sind. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß durch Gleichung (1) das Verhalten der mehratomigen Stoffe nicht quantitativ richtig wiedergegeben wird, selbst dann nicht, wenn man die Volumkorrektion gleich einer willkürlichen Funktion von v setzt und statt a eine beliebige Funktion der Temperatur einführt. In derselben Arbeit wurde ferner gezeigt, daß die einatomigen Stoffe Argon, Krypton, Xenon und Quecksilber mit einander korrespondieren, daß aber ihre reduzierten Isothermen nicht mit denen der mehratomigen Stoffe zusammenfallen. Es erscheint daher denkbar, daß die Gleichung (1) welche ebenfalls zum Gesetz der übereinstimmenden Zustände führt, das thermische Verhalten der

1) H. Happel, Annalen d. Physik 13, pag. 340, 1904.

genannten einatomigen Stoffe richtig wiedergibt, und diese Frage ist es, welche in diesen Zeilen näher untersucht werden soll. Zu dem Zwecke ist es nötig, zunächst auf das Problem der Volumkorrektion etwas näher einzugehen. Dies geschieht im Abschnitt I, welcher von der Ermittelung der Koeffizienten α_1 und α_2 handelt. Alsdann wenden wir uns im Abschnitt II zur Prüfung der Zustandsgleichung sowohl bei hohen, als auch bei tiefen reduzierten Temperaturen, wobei wir uns auf die Beobachtung an Argon, Krypton, Xenon und Quecksilber stützen. Es ergibt sich, daß Formel (1), in welcher wir die unbekannten Glieder höherer Ordnung $\alpha_3\left(\frac{b}{v}\right), \ldots$ vernachlässigen, das thermische Verhalten der genannten Stoffe richtig darstellt. Nur bei sehr tiefen reduzierten Temperaturen weit unterhalb der kritischen ergeben sich Abweichungen.

I. Zur Volumkorrektion der Zustandsgleichung.

Zur Ermittelung der Koeffizienten α_i hat man, wie bekannt, verschiedene Methoden ausgearbeitet. Sie alle führen dazu, daß der Koeffizient von $\frac{b}{v}$ gleich Eins sein muß. Der Koefffzient α_1 ist zuerst von G. Jäger[1]) und bald darauf von Boltzmann[2]) ermittelt, es ergab sich stets derselbe Wert, nämlich $\alpha_1 = \frac{5}{8}$, obwohl Boltzmann nicht weniger als drei verschiedene Wege zur Berechnung einschlug. Zwar erhielt van der Waals[3]) für denselben Koeffizienten einen anderen Wert, es lassen sich jedoch gegen die von ihm angewandte Beweisführung berechtigte Bedenken anführen, wie van der Waals jun.[4]) zuerst erkannte, welcher außerdem die Methode seines Vaters verbesserte und dabei ebenfalls $\alpha_1 = \frac{5}{8}$ erhielt. Nachdem man somit zu diesem Werte auf allen fünf bis jetzt eingeschlagenen Wegen gelangt ist, kann man nicht mehr daran zweifeln, daß dies der richtige Weg für α_1 ist.

Nicht so günstig ist es hinsichtlich des Koeffizienten α_2 be-

1) G. Jäger, Wiener Sitzungsber. II. 105, pag. 15. 1896.
2) L. Boltzmann, Gastheorie II. § 51—61.
3) J. D. v. d. Waals, Continuität d. gasf. u. fl. Zustandes I. pag. 65. 1899.
4) J. D. v. d. Waals jun., Kon. Acad. v. Wetenschappen te Amsterdam. Wis en natuurk. afdeeling. pag. 640. 1902/03.

stellt. Ihn hat zuerst van Laar[1]) nach der von van der Waals bei der Ableitung des Wertes von α_1 eingeschlagenen Methode berechnet, gegen welche, wie schon erwähnt, prinzipielle Einwände vorliegen, und deshalb verdient der von van Laar erhaltene Wert kein Zutrauen. Außerdem liegt noch eine Bestimmung des Faktors α_2 von Boltzmann[2]) vor, nach einer von ihm schon bei der Berechnung von α_1 angewandten Methode, welche er im § 61 des 2. Teiles seiner Vorlesungen auseinandersetzt. Aber auch der Wert von Boltzmann, welcher natürlich von dem von van Laar erhaltenen verschieden ist, berechtigt noch zu gewissen Zweifeln. Boltzmann muß nämlich bei seiner Berechnung unter anderen die Summe der Volumina ermitteln, welche den Deckungssphären je dreier Moleküle gleichzeitig angehören und welche wir mit $2\beta \frac{b^3}{v^3}$ bezeichnen wollen; die Masse des Gases wird dabei gleich 1 angenommen. Da die nämliche Größe β in der Arbeit van Laars auftritt und von diesem berechnet ist, so hat Boltzmann den Wert von β der Abhandlung van Laars entnommen. Die Berechnung von β ist indessen derart kompliziert, daß selbst eine Nachprüfung der van Laarschen Formeln noch mit außerordentlich großer Mühe verbunden ist. Bevor also das Resultat als gesichert betrachtet wird, ist es, wie auch Boltzmann und van der Waals jun. hervorheben, unbedingt nötig, den Wert des Koeffizienten nochmals in der einen oder anderen Weise zu verifizieren, womöglich dadurch, daß man ihn in einer anderen als der von Boltzmann eingeschlagenen Methode berechnet.

Es ist jedoch sehr einfach eine zuverlässige untere Grenze für α_2 anzugeben. Wie Boltzmann gezeigt hat, ergibt sich nach seiner Methode und zwar ohne allzu große Rechnung für α_2 der Wert:

$$(2) \qquad \alpha_2 = \frac{1283}{8960} + \frac{3}{2}\beta = 0{,}1432 + \frac{3}{2}\beta.$$

Setzt man hier für β den van Laarschen Wert, nämlich $\beta = 0{,}0958$, ein, so ergibt sich

$$(3) \qquad \alpha_2 = 0{,}2869.$$

Aus der geometrischen Deutung von β folgt jedenfalls daß $\beta > 0$ ist; setzen wir also $\beta = 0$, so ergibt sich für α_2 als untere Grenze:

$$(4) \qquad \alpha_2 > 0{,}1432.$$

1) J. J. v. Laar, Archives du Musée Teyler Sér. 2 Vol. 6. pag. 237. 1900.

2) L. Boltzmann, Kon. Acad. v. Wet. Amsterdam Wis en natuurk. afdeeling. pag. 477. 1898/99.

Dagegen dürfte die Ermittelung einer brauchbaren obern Grenze nach der eben angedeuteten Boltzmannschen Methode nur mit Schwierigkeiten verbunden sein. Ich habe daher versucht in anderer Weise α_2 zu ermitteln und dabei die Methode benutzt, die Boltzmann im 2. Teil seiner Gastheorie auf pag. 143—151 beschreibt, doch habe ich daran gewisse Aenderungen angebracht, um die Rechnung nach Möglichkeit zu kürzen; aus dem nämlichen Grunde habe ich mich mit der Ermittelung von Grenzen für α_2 begnügt. Es könnte vielleicht scheinen, daß dies unbefriedigend sei, doch bleibt mein Hauptresultat, nämlich die Giltigkeit der van der Waalschen Anschauungen bei einatomige Stoffen bestehen, wenn α_2 innerhalb seiner Grenzen variirt, da die Unterschiede in den Werten für α_2 erst in der Gegend der Flüssigkeitsvolumina, welche sehr klein sind, merkbar werden.

Wie bekannt, handelt es sich bei der hier anzuwendenden Methode zunächst darum, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, daß zu irgend einem Zeitmoment der Mittelpunkt eines bestimmten „hervorgehobenen" Moleküls vom Mittelpunkt der anderen Moleküle unseres Gases eine Entfernung hat, die zwischen σ und $\sigma+\delta$ liegt. Dabei ist δ eine im Vergleich zum Durchmesser σ unendlich kleine Größe. Die eben genannte Wahrscheinlichkeit ist offenbar ebenso groß wie die durchschnittliche Anzahl dn derjenigen Moleküle, deren Mittelpunkt von dem des hervorgehobenen eine Entfernung zwischen σ und $\sigma+\delta$ hat. Ist n die Anzahl aller Moleküle unseres Gases, dessen Masse gleich eins sei, so ergibt sich, wie bereits Boltzmann erwähnt, für dn in erster Annäherung

$$(5) \qquad dn = \frac{4\pi\sigma^2 n\delta}{v}$$

Will man dn genau berechnen, so hat man im Nenner von (5) statt v die Reihe

$$(6) \qquad v - \frac{4}{3}\pi\sigma^3 n + \frac{17}{36}\frac{\pi^2\sigma^6 n^2}{v} + \beta_1\frac{\pi^3\sigma^9 n^3}{v^2} + \beta_2\frac{\pi^4\sigma^{12} n^4}{v^3} + \cdots$$

zu setzen, in welcher jedoch die Zahlenfaktoren β_i noch nicht ermittelt sind. Außerdem haben wir im Zähler von (5) von jeder Kugelschale von der Dicke δ den Teil abzuziehen, der durchschnittlich von den Deckungssphären anderer Moleküle eingeschlossen ist. Mithin erhalten wir für dn den streng giltigen Ausdruck:

$$(7)\quad dn = \frac{4\pi\sigma^2 n\delta\left(1 - \frac{\text{Inhalt des eingeschlossenen Teils aller Kugelsch. } \delta}{\text{Summa der Inhalte aller Kugelsch. } \delta}\right)^{1)}}{v - \frac{4}{3}\pi\sigma^3 n + \frac{17}{36}\frac{\pi^2\sigma^6 n^2}{v} + \beta_1\frac{\pi^3\sigma^9 n^3}{v^2} + \cdots}$$

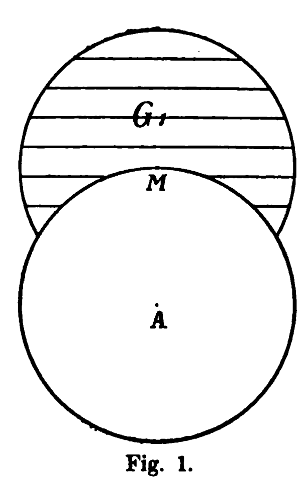


Fig. 1.

Es sei nun A der Mittelpunkt irgend eines der „restirenden Moleküle", (siehe Boltzmann Gastheorie II. pg. 144) dessen Deckungssphäre der Kreis um A sein soll, und do sei ein in einem beliebigen Punkte M auf ihr gelegenes Oberflächenelement. Es verhält sich nun offenbar der Inhalt des eingeschlossenen Teiles aller Kugelschalen δ zur Summe der Inhalte aller Kugelschalen δ wie der Teil von do, der durchschnittlich von den Deckungssphären der anderen Moleküle eingeschlossen wird, zu do selbst. Also ist auch

$$(8)\quad dn = \frac{4\pi\sigma^2 n\delta\left(1 - \frac{\text{eingeschlossener Teil von } do}{do}\right)}{v - \frac{4}{3}\pi\sigma^3 n + \frac{17}{36}\frac{\pi^2\sigma^6 n^2}{v} + \beta_1\frac{\pi^3\sigma^9 n^3}{v^2} + \cdots}$$

Auch hier sind keine Vernachlässigungen gemacht.

Die Deckungssphäre eines Moleküls B wird nun do umschließen, wenn sich der Mittelpunkt von B innerhalb einer Kugel vom Radius σ befindet, deren Mittelpunkt mit do zusammenfällt; natürlich kann sich der Mittelpunkt von B nur in dem Teil der Kugel befinden, der außerhalb der Deckungssphäre des Moleküls A liegt. Der Inhalt dieses Teiles der Kugel um M (des schraffirten Gebietes, das wir mit G_1 bezeichnen wollen), ist $\frac{11}{12}\pi\sigma^3$. Die Anzahl der Moleküle, deren Mittelpunkt sich innerhalb dieses Bereiches befindet, ist bei Vernachlässigung der höhern Glieder:

$$\frac{\frac{11}{12}\pi\sigma^3 n}{v}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit do, so stellt das so erhaltene Produkt den Teil von do dar, der durchschnittlich von den

1) Vergl. auch Kohnstamm Akad. v. Wetenschapen te Amsterdam Wis en natuurk. afdeeling pag. 940 u. 961 1903/04.

Deckungssphären unserer Moleküle umschlossen wird. Mithin ist nach (8):

$$(9) \qquad dn = \frac{4\pi\sigma^2 n\delta\left\{1 - \frac{11}{12}\frac{\pi\sigma^3 n}{v}\right\}}{v\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{\pi\sigma^3 n}{v}\right\}}$$

und dieser Ausdruck ist bis einschließlich der Glieder von der Ordnung $\frac{\pi\sigma^3 n}{v}$ richtig. Aus der Definition von dn folgt, daß $\frac{n\,dn}{2}$ die Anzahl aller Molekülpaare darstellt, bei denen der Mittelpunkt der beiden Moleküle eine Entfernung hat, die zwischen σ und $\sigma + \delta$ liegt. Entwickelt man den Nenner in (9) und beachtet, daß $\frac{2}{3}\pi\sigma^3 n = b$ ist, so folgt:

$$(10) \qquad \frac{n\,dn}{2} = \frac{2\pi\sigma^2 n^2 \delta}{v}\left\{1 + \frac{5}{8}\frac{b}{v}\right\}$$

Wir sind hiermit zu demselben Wert für $\frac{n\,dn}{2}$ gelangt, den Boltzmann auf pag. 148 (Formel 150) des 2. Teiles seiner Vorlesungen erhält, doch ist die hier gegebene Ableitung eine etwas andere. Wie aus den Boltzmannschen Entwickelungen hervorgeht, muß der in (10) auftretende Koeffizient $\frac{5}{8}$ von $\frac{b}{v}$ zugleich der Koeffizient α_1 des Gliedes mit $\left(\frac{b}{v}\right)^2$ in (1) sein. Ebenso sind die Koeffizienten der in (10) vernachlässigten Glieder mit $\left(\frac{b}{v}\right)^2$, $\left(\frac{b}{v}\right)^3, \ldots$ bezw. identisch mit den Faktoren $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in (1).

Es soll nun im Ausdruck für dn die Annäherung noch um einen Grad weiter getrieben werden. Zu dem Zwecke müssen wir die im Nenner von (8) auftretende Reihe bis einschließlich des Gliedes mit $\frac{17}{36}\frac{\pi^2\sigma^6 n^2}{v}$ berücksichtigen. Ferner ist im Ausdruck für das Verhältnis des eingeschlossenen Teiles von do zu do selbst im Nenner $v - \frac{4}{3}\pi\sigma^3 n$ statt v zu setzen. Außerdem ist im Zähler eine Korrektion anzubringen; denn für den Mittelpunkt eines Moleküls steht nicht das ganze schraffirte Gebiet zur Verfügung, dessen Inhalt $\frac{11}{12}\pi\sigma^3$ ist, sondern nur der Teil dieses Bereiches,

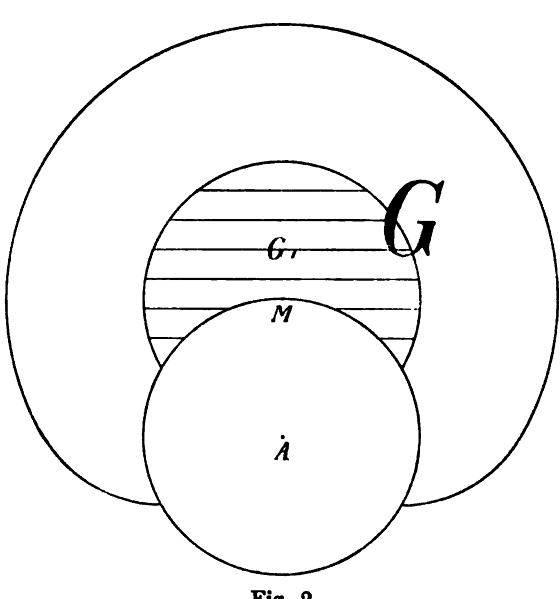


Fig. 2.

der nicht von den Deckungssphären der andern Moleküle eingenommen wird. Wir verstehen nun unter G das Gebiet, das so beschaffen ist, daß wenn sich der Mittelpunkt eines Moleküls innerhalb G befindet, seine Deckungssphäre einen Teil von dem schraffirten Gebiet G_1 einschließt; dagegen soll, wenn sich der Mittelpunkt eines Moleküls außerhalb G befindet, seine Deckungssphäre kein Stück von G_1 abschlagen. Offenbar gehört das schraffirte Gebiet selbst zu G. Die Anzahl der Molekülmittelpunkte, die sich innnerhalb eines Volumelementes $d\omega$ des Gebietes G befinden, ist $\frac{n d\omega}{v}$, und jedes dieser Moleküle möge mit seiner Deckungssphäre vom Gebiet G_1 das Stück Δ abschneiden. Mithin wird im ganzen vom Gebiet G_1 das Stück $\int_G \frac{n d\omega \Delta}{v}$ abgeschlagen. Für den Mittelpunkt eines Moleküls B, dessen Deckungssphäre do umschließt, kommt also das Gebiet $\frac{11}{12}\pi\sigma^3 - \int_G \frac{n d\omega \Delta}{v}$ in Betracht und von allen n Molekülen umschließen also

$$\frac{\frac{11}{12}\pi\sigma^3 n - \int_G \frac{n^2 d\omega \Delta}{v}}{v - \frac{4}{3}\pi\sigma^3 n} \tag{11}$$

das Element do. Man könnte daher meinen, daß:

$$(12)\qquad \frac{\text{eingeschlossener Teil von } do}{do} = \frac{\frac{11}{12}\pi\sigma^3 n - \int_G \frac{n^2 d\omega \Delta}{v}}{v\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\pi\sigma^3 n}{v}\right)}$$

Trotzdem ist diese Gleichung nicht richtig; denn unter den Molekülen, deren Deckungssphäre do enthält und deren Anzahl durch (11) gegeben ist, befinden sich welche, die gleichzeitig do mit ihren Deckungssphären einnehmen. Um nun das Verhältnis des eingeschlossenen Teils von do zu do zu finden, muß man in allen den Fällen, wo do gleichzeitig zweimal umschlossen wird, do nicht zweimal zählen, wie es in (12) geschehen ist, sondern nur einmal. Damit also (12) richtig wird, muß man auf der rechten Seite noch die Hälfte der Anzahl aller derjenigen Moleküle abziehen, von denen je 2 mit ihren Mittelpunkten gleichzeitig innerhalb G_1 liegen mit anderen Worten, wir müssen die ganze Anzahl dieser Molekülpaare subtrahieren. Die Wahrscheinlichkeit, daß von unseren n Molekülen eines mit seinem Mittelpunkt im Element $d\omega$ des Gebietes G_1 liegt, ist:

$$(13)\qquad \frac{n d\omega}{v}$$

Wird durch die Deckungssphäre eines solchen Moleküls das Stück Δ_1 von G_1 abgeschnitten, so bleibt innerhalb G_1 für den Mittelpunkt eines zweiten Moleküls nur das Stück $\frac{11}{12}\pi\sigma^3 - \Delta_1$ übrig, und die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Bereich der Mittelpunkt eines unser n Moleküle fällt, ist

$$(14)\qquad \frac{n\left(\frac{11}{12}\pi\sigma^3 - \Delta_1\right)}{v}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden unter (13) und (14) genannten Ereignisse gleichzeitig eintreffen ist:

$$(15)\qquad \frac{n^2\left(\frac{11}{12}\pi\sigma^3 - \Delta_1\right)}{v^2}\, d\omega$$

Dies ist zugleich die Anzahl der Molekülpaare, bei denen der Mittelpunkt des einen Moleküls in $d\omega$, der des andern irgendwo im Gebiet $G_1 - \Delta_1$ liegt. Würden wir den letzten Ausdruck über

das ganze Gebiet G_1 integriren, so würden wir, wie man leicht erkennt, unsere Molekülpaare doppelt zählen, mithin ist:

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\int_{G_1}\frac{n^2\left(\frac{11}{12}\pi\sigma^3-\varDelta_1\right)}{v^2}d\omega=\frac{121}{288}\frac{\pi^2\sigma^6n^2}{v^2}-\frac{1}{2}\int_{G_1}\frac{n^2\varDelta_1}{v^2}d\omega$$

die Anzahl der gesuchten Molekülpaare und dieser Ausdruck ist auf der rechten Seite von (12) zu subtrahiren.

Für $\frac{ndn}{2}$ erhalten wir hiernach den Ausdruck:

$$(17)\qquad \frac{ndn}{2}=\frac{2\pi\sigma^2n^2\delta\left\{1-\dfrac{\frac{11}{12}\pi\sigma^3n-\int_G\frac{n^2d\omega\varDelta}{v}}{v\left(1-\frac{4}{3}\frac{\pi\sigma^3n}{v}\right)}+\dfrac{121}{288}\dfrac{\pi^2\sigma^6n^2}{v^2}-\dfrac{1}{2}\int_{G_1}\dfrac{n^2\varDelta_1d\omega}{v^2}\right\}}{v\left\{1-\frac{4}{3}\frac{\pi\sigma^3n}{v}+\frac{17}{36}\frac{\pi^2\sigma^6n^2}{v^2}\right\}}$$

Die hier auftretenden Integrale $\int_G\frac{n^2d\omega\varDelta}{v}$ und $\int_{G_1}\frac{n^2d\omega\varDelta_1}{v^2}$ sind beide proportional mit $(\pi\sigma^3n)^2$. Entwickelt man nun noch Potenzen von $\frac{\pi\sigma^3n}{v}$ und vernachlässigt man wie bisher die Glieder von der Ordnung $\left(\frac{\pi\sigma^3n}{v}\right)^3$, so ergibt sich nach leichter Rechnung, falls man noch beachtet, daß $\frac{2}{3}\pi\sigma^3n=b$ ist

$$(18)\qquad \frac{ndn}{2}=\frac{2\pi\sigma^2n^2\delta}{v}\left[1+\frac{5}{8}\frac{b}{v}-1{,}6172\left(\frac{b}{v}\right)^2+\int_G\frac{n^2d\omega\varDelta}{v^2}-\frac{1}{2}\int_{G_1}\frac{n^2d\omega\varDelta_1}{v^2}\right]$$

Nach einer auf pag. 6 enthaltenen Bemerkung bestimmt sich also der Koeffizient α_2 der Zustandsgleichung durch die Beziehung:

$$(19)\qquad \alpha_2\left(\frac{b}{v}\right)^2=-1{,}6172\left(\frac{b}{v}\right)^2+\int_G\frac{n^2d\omega\varDelta}{v^2}-\frac{1}{2}\int_{G_1}\frac{n^2d\omega\varDelta_1}{v^2}$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum die hier auftretenden Integrale

$$(20)\qquad J_1=\int_G\frac{n^2d\omega\varDelta}{v^2},\quad J_2=\frac{1}{2}\int_{G_1}\frac{n^2d\omega\varDelta_1}{v^2}$$

zu ermitteln. Dazu ist nötig, sie zunächst etwas umzuformen. Wir kehren zu unserer Figur zurück und bezeichnen mit g den

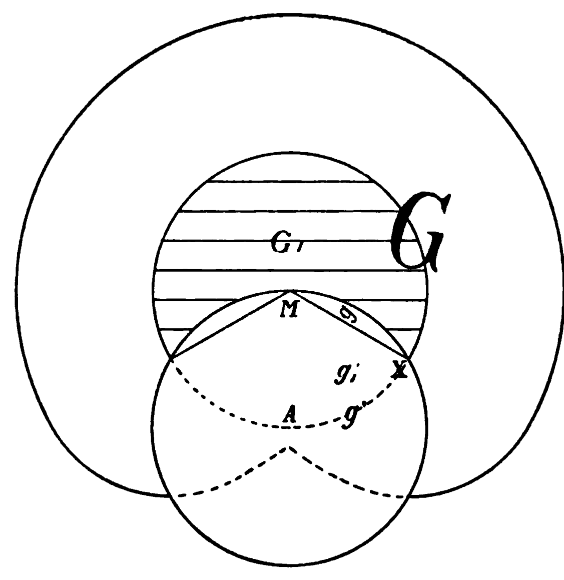


Fig. 3.

Raum, der entsteht, wenn das von dem Kreisbogen MX und der Geraden MX begrenzte Flächenstück um MA rotirt, dabei ist X der in der Zeichnungsebene gelegene Durchschnittspunkt der Kugeloberflächen um A und M. Wir stellen uns nun einmal vor, die Moleküle könnten von allen Seiten in g und G_1 herein und heraus dringen, gleichsam als ob das Molekül A nicht vorhanden wäre. Wir bezeichnen mit g' den innerhalb der Kugel A, aber außerhalb g gelegenen Raum, der so beschaffen ist, daß wenn sich der Mittelpunkt eines Moleküls innerhalb g' befindet, seine Deckungssphäre stets ein Stück von g abschneidet, sobald aber der Mittelpunkt sich außerhalb von g' befindet, soll die Deckungssphäre keinen Teil von g mehr umschließen. Es sei nun von jetzt an Δ das Stück von G_1 das die Deckungssphäre eines Moleküls abschneidet, dessen Mittelpunkt irgendwo innerhalb G oder g oder g' liegt; damit haben wir die früher gegebene Definition von Δ etwas erweitert. Analog sei Δ' das von g abgeschlagene Stück. Es ist nun:

$$
(21)\quad J_1 = \int\limits_G \frac{n^2 d\omega \Delta}{v^2} = \int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega(\Delta + \Delta')}{v^2} - \int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} - \int\limits_{g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta}{v^2}
$$

Um auch J_2 umzuformen, denken wir uns das Kugelstück von Radius σ, dessen Mittelpunkt M ist, zur Vollkugel erweitert und

bezeichnen mit g_1' den Raum der innerhalb dieser Kugel und der Kugel um A aber außerhalb g liegt. Ferner sei Δ_1 bezw. Δ_1' das Stück von G_1 bezw. g, das von der Deckungssphäre eines Moleküls abgeschnitten wird, dessen Mittelpunkt irgendwo in G_1, g oder g_1' liegt. Es ist nun:

$$(22)\qquad \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_{G_1}\frac{n^2 d\omega \Delta_1}{v^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega(\Delta_1+\Delta_1')}{v^2} \\ &\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2} - \frac{1}{2}\int\limits_{g+g_1'}\frac{n^2 d\omega \Delta_1}{v^2} \end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, die in den Ausdrücken für J_1 und J_2 auftretenden Integrale zu bestimmen, ich beschränke mich jedoch darauf, hier nur die Resultate anzugeben; die übrigens nicht sehr umfangreichen Hilfsrechnungen sollen an anderer Stelle publizirt werden. Die Ermittelung der Integrale

$$\int\limits_{G+g+g'}\frac{n^2 d\omega(\Delta+\Delta')}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega(\Delta_1+\Delta_1')}{v^2}$$

bietet keine Schwierigkeit, man findet:

$$(23)\qquad \int\limits_{G+g+g'}\frac{n^2 d\omega(\Delta+\Delta')}{v^2} = 3\left(\frac{b}{v}\right)^2$$

$$(24)\qquad \frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega(\Delta_1+\Delta_1')}{v^2} = 0{,}7031\left(\frac{b}{v}\right)^2$$

Für die Auswertung der Integrale

$$\int\limits_{G+g+g'}\frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2}$$

habe ich je ein Annäherungsverfahren ausfindig gemacht, welches schließlich zum wahren Wert beider Größen führt. Um jedoch die Rechnungen nach Möglichkeit zu kürzen, habe ich mich in beiden Fällen mit der Bestimmung einer obern und untern Grenze begnügt. Ich erhielt:

$$(25)\qquad 0{,}2191\left(\frac{b}{v}\right)^2 < \int\limits_{G+g+g'}\frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} < 0{,}2546\left(\frac{b}{v}\right)^2$$

$$(26)\qquad 0{,}0633\left(\frac{b}{v}\right)^2 < \frac{1}{2}\int\limits_{G_1+g+g_1'}\frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2} < 0{,}0727\left(\frac{b}{v}\right)^2$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Integrale

$$\int\limits_{g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta}{v^2} \text{ und } \frac{1}{2} \int\limits_{g+g_1'} \frac{n^2 d\omega \Delta_1}{v^2}$$

auszuwerten. Mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen ergibt sich, daß sie im Ausdruck (19) auf der rechten Seite in der Verbindung:

$$(27) \qquad -\int\limits_{g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta}{v^2} + \frac{1}{2} \int\limits_{g+g_1'} \frac{n^2 d\omega \Delta_1}{v^2} = K$$

auftreten. Aus der geometrischen Deutung von Δ, Δ_1, g, g' und g_1' geht hervor, daß das zweite Integral einen Teil des ersten ausmacht, mithin ist, da Δ und Δ_1 positive Größen sind

$$(28) \qquad K < 0.$$

Setzt man nun für J_1 und J_2 ihre Werte (21) und (22) in (19) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (27):

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 \left(\frac{b}{v}\right)^2 = & -1{,}6172 \left(\frac{b}{v}\right)^2 + \int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega (\Delta + \Delta')}{v^2} \\ & - \frac{1}{2} \int\limits_{G_1+g+g_1'} \frac{n^2 d\omega (\Delta_1 + \Delta_1')}{v^2} - \int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} \\ & + \frac{1}{2} \int\limits_{G_1+g+g_1'} \frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2} + K \end{aligned} \right.$$

oder, falls man für die beiden ersten Integrale ihre durch (23) und (24) angegebenen Werte einsetzt:

$$(30) \qquad \alpha_2 \left(\frac{b}{v}\right)^2 = 0{,}6797 \left(\frac{b}{v}\right)^2 - \int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} + \frac{1}{2} \int\limits_{G_1+g+g_1'} \frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2} + K.$$

Berücksichtigt man die für die Integrale

$$\int\limits_{G+g+g'} \frac{n^2 d\omega \Delta'}{v^2} \text{ und } \frac{1}{2} \int\limits_{G_1+g+g_1'} \frac{n^2 d\omega \Delta_1'}{v^2}$$

aufgestellten Grenzen, so folgt:

$$(31) \qquad 0{,}4884 \left(\frac{b}{v}\right)^2 + K < \alpha_2 \left(\frac{b}{v}\right)^2 < 0{,}5333 \left(\frac{b}{v}\right)^2 + K$$

Da nun, wie bewiesen, K negativ ist, so hat man jedenfalls:

$$(32) \qquad \alpha_2 \left(\frac{b}{v}\right)^2 < 0{,}5333 \left(\frac{b}{v}\right)^2$$

Damit ist eine obere Grenze für α_2 gewonnen, welcher der Boltzmannsche Wert genügt.

Die Auswertung des Integrals K geschah auf mechanischem Wege mittels eines Polarplanimeters. Außerdem wurde, wie es bei derartigen Betrachtungen gewöhnlich geschieht, eine obere und untere Grenze für K ermittelt. Als Resultat erhielt ich:

$$K = -0{,}213\left(\frac{b}{v}\right)^2 \tag{33}$$

Die zugehörigen Grenzen sind:

$$0{,}148\left(\frac{b}{v}\right)^2 < -K < 0{,}287\left(\frac{b}{v}\right)^2 \tag{34}$$

Setzt man den Wert für K aus (33) in die Gleichung (31) ein, so ergeben sich für α_2 folgende ziemlich enge Grenzen:

$$0{,}275 < \alpha_2 < 0{,}320 \tag{35}$$

Der Boltzmannsche Koeffizient genügt auch dieser Bedingung, und es dürfte daher einigermaßen plausibel sein, daß der hier eingeschlagene Weg zu demselben Wert für α_2 führt, den Boltzmann erhielt. Will man übrigens ganz besonders exakt sein, so darf man den Wert (33) für K nicht benutzen, da man nicht weiß, wieviel er vom wahren Wert dieser Größe abweicht, man muß vielmehr in (31) die Grenzen (34) für K einführen und findet dann

$$0{,}201 < \alpha_2 < 0{,}385. \tag{36}$$

Das Resultat dieses 1. Abschnittes läßt sich kurz so zusammenfassen: Das von Boltzmann auf pag. 143—151 des II. Teils seiner Vorlesungen über Gastheorie angegebene Verfahren zur Ermittelung der Koeffizienten α_i der Zustandsgleichung (1) wurde abgeändert, wodurch die Berechnung vereinfacht wird. Nach der so modifizirten Methode wurde zunächst α_1 bestimmt und dafür wiederum der bereits von Boltzmann, G. Jäger und van der Waals jun. jedoch in anderer Weise erhaltene Wert $\frac{5}{8}$ gewonnen. Alsdann wurden für α_2 die Grenzen (35) bezw. (36) berechnet. Da der von Boltzmann nach einer ganz anderen Methode für α_2 gefundene Wert, welcher jedoch von vornherein nicht sicher ist, beiden Bedingungen (35) und (36) genügt, so wird hierdurch das Zutrauen zu ihm sehr erhöht. Es liegt ferner die Vermutung nahe, daß auch der von uns eingeschlagene Weg zu demselben Werte für α_2 führt, den Boltzmann nach seiner Methode erhielt.

Dasselbe muß dann auch für die Methode von H. A. Lorentz gelten; denn diese liefert bekanntlich für jeden Koeffizienten α_n denselben Wert wie das im II. Teil von Boltzmanns Vorlesungen auf pag. 143—151 mitgeteilte Verfahren.

II. Prüfung der Zustandsgleichung an einatomigen Stoffen und Folgerungen.

Wir wollen die Zustandsgleichung (1) zunächst mit den Beobachtungen an Argon, Krypton und Xenon vergleichen. Dabei nehmen wir für α_1 und α_2 die Boltzmannschen Werte an, setzen also

$$\alpha_1 = \tfrac{5}{8} \qquad \alpha_2 = 0{,}2869 \tag{37}$$

und brechen die Formel (1) hinter den Koeffizienten mit $\left(\frac{b}{v}\right)^3$ ab, dürfen dann allerdings Gleichung (1) nicht auf das Zustandsgebiet anwenden, das den kleinern Volumina entspricht.

Wir müssen nun vor allen Dingen die drei individuellen Konstanten R, b und a ermitteln. Dies geschieht mittels der drei Bedingungen des kritischen Punktes, welche drei Beziehungen zwischen den 6 Größen R, b, a, $T_\varkappa$, $v_\varkappa$ und $p_\varkappa$ darstellen; hierbei sind $T_\varkappa$, $v_\varkappa$, $p_\varkappa$ bezw. absolute Temperatur, spezifisches Volumen und Druck für den kritischen Punkt. Da Ramsay und Travers[1]) für jeden der drei genannten Stoffe das Molekulargewicht m oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Konstante R, ferner $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ experimentell ermittelt haben, so lassen sich die übrigen fehlenden Größen a, b, $v_\varkappa$ berechnen. Bei Argon liegen überdies Beobachtungen von $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ vor, die von Olszewski[2]) herrühren; seine Messungen stimmen mit den entsprechenden bei Ramsay und Travers gut überein.

Die Gleichungen $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{v_\varkappa, T_\varkappa} = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{v_\varkappa, T_\varkappa} = 0$ lauten ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} RT_\varkappa\left[\frac{1}{v_\varkappa^2} + 2\frac{b}{v_\varkappa^3} + 3\alpha_1\frac{b^2}{v_\varkappa^4} + 4\alpha_2\frac{b^3}{v_\varkappa^5}\right] - \frac{2a}{v_\varkappa^3} &= 0 \\ RT_\varkappa\left[\frac{2}{v_\varkappa^3} + 6\frac{b}{v_\varkappa^4} + 12\alpha_1\frac{b^2}{v_\varkappa^5} + 20\alpha_2\frac{b^3}{v_\varkappa^6}\right] - \frac{6a}{v_\varkappa^4} &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

1) W. Ramsay u. M. W. Travers Zeitschr f. phys. Chemie 38, pag. 643, 1901.
2) K. Olszewski Zeitschr. f. phys. Chemie 16, pag. 380, 1895.

Eliminirt man a, so folgt[1]):

$$(39) \qquad 1 - 3\alpha_1 \left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2 - 8\alpha_2 \left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^3 = 0$$

Setzt man den durch diese Gleichung gegebenen Wert von α_2 in eine der vorliegenden Formeln ein, so findet man:

$$(40) \qquad a = R T_\varkappa v_\varkappa \left[\frac{3}{4} + \frac{b}{v_\varkappa} + \frac{3}{4} \alpha_1 \left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2\right].$$

Führt man nun noch die Werte für α_2 und a aus (39) und (40) in die Gleichung

$$p_\varkappa = R T_\varkappa \left\{\frac{1}{v_\varkappa} + \frac{b^1}{v_\varkappa^2} + \alpha_1 \frac{b^2}{v_\varkappa^3} + \alpha_2 \frac{b^3}{v_\varkappa^4}\right\} - \frac{a}{v_\varkappa^2}$$

ein, so ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$(41) \qquad \frac{p_\varkappa v_\varkappa}{R T_\varkappa} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \alpha_1 \left(\frac{b}{v_\varkappa}\right)^2$$

Aus (39) folgt mit Rücksicht auf die Beträge (37) für α_1 und α_2

$$(42) \qquad \frac{b}{v_\varkappa} = 0{,}5620$$

Substituirt man diesen Wert, sowie den Wert für α_1 in (40) und (41), so erhält man:

$$(43) \qquad \frac{a}{R T_\varkappa v_\varkappa} = 1{,}4601 \qquad \frac{p_\varkappa v_\varkappa}{R T_\varkappa} = 0{,}3503$$

Die drei Gleichungen (42) und (43) dienen zur Berechnung der drei Unbekannten b, a und $v_\varkappa$. Für die Gaskonstante R wurde gesetzt:

$$(44) \qquad R = \frac{83{,}12}{m} 10^6$$ [2])

In den drei ersten der folgenden Tabellen sind die von Ramsay und Travers für Argon, Krypton und Xenon experimentell ermittelten Werte von m, (bezogen auf $O = 16$) $p_\varkappa$ und $T_\varkappa$ angegeben und außerdem die auf Grund der Gleichung (44) berechnete Größe R. Bei Argon

1) Die Gleichungen (39), (40) und (41) sind bereits von C. Dieterici aufgestellt Annalen d. Phys. 69, pag. 685, 1899.

2) Das Molekulargewicht von O wurde hierbei = 16 angenommen.

sind überdies die von Olzewski für $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ erhaltenen Zahlen mitgeteilt. In der letzten Tabelle sind die mittels dieser Daten berechneten Werte für b, a und $v_\varkappa$ zu finden. Hierbei wurde für $T_\varkappa$ und $p_\varkappa$ bei Argon der in der ersten Tabelle ebenfalls angegebene Mittelwert aus den Beobachtungen genommen.

Argon.

m	R gr^{-1}	$p_\varkappa$ in Atm. Rams. T	Olsz.	$p_\varkappa$ gr/cm sec. Mittelw.	$T_\varkappa$ abs. Rams. T	Olsz.	Mittelw.
39,9	2,083.10^6	52,9	50,6	52,5.10^6	155,6^0	152^0	154^0

Krypton.

m	R gr^{-1}	$p_\varkappa$ Atm.	$p_\varkappa$ gr/cm sec.	$T_\varkappa$ abs.
82	1,014.10^6	54,26	55,0.10^6	210,5

Xenon.

m	R gr^{-1}	$p_\varkappa$ Atm.	$p_\varkappa$ gr/cm sec.	$T_\varkappa$ abs.
128	0,6494.10^6	57,24	58,0.10^6	287,7^0

	b ccm/gr	a cm^5/gr sec.^{2}	$v_\varkappa$ ccm/gr
Argon	1,200	1000.10^6	2,140
Krypton	0,764	424.10^6	1,360
Xenon	0,633	307.10^6	1,126

Ramsay und Travers haben für jedes der drei Gase Argon, Krypton und Xenon einen Teil der Isotherme bei 11,2^0 und derjenigen bei 237,3^0 Cels. bestimmt, aber nur bei der erstern, und bei dieser auch nur bei Krypton und Xenon, erstreckt sich das experimentell ermittelte Stück bis in das Zustandsgebiet hinein,

Mithin wird:

$$T_\varkappa \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right\}_\varkappa - p_\varkappa = T_\varkappa \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa - p$$

$$\frac{1}{p_\varkappa} \left[T_\varkappa \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right\}_\varkappa - p_\varkappa \right] + 1 = \frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa$$

oder zufolge von 1):

$$\frac{a}{p_\varkappa v_\varkappa^2} + 1 = \frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa$$

Durch Division der zwei Relationen 43) ergibt sich:

$$\frac{a}{p_\varkappa v_\varkappa^2} = \frac{1,460}{0,350} = 4,17$$

und somit:

$$\frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa = 5,17. \tag{45}$$

Aus den Messungen von Ramsay und Travers fand ich bei Argon im Mittel aus 2 Messungen

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa = 1400 \frac{\text{mm Hg}}{\text{Temp.}}$$

und daher wird

$$\frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa = 5,42. \tag{46}$$

Für Krypton erhielt ich die Werte:

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa = 1085$$

und

$$\frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa = 5,53. \tag{47}$$

Bei Xenon liegen in nächster Nähe des kritischen Punktes keine Beobachtungen über die Dampfspannung vor. Die Zustandsgleichung 1) gibt also bei Argon und natürlich auch bei allen damit korrespondirenden Stoffen den Wert der Größe $\frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa$ nahezu richtig wieder. Bei den mit Aether korrespondirenden Substanzen erreicht $\frac{T_\varkappa}{p_\varkappa} \left(\frac{dp}{dT} \right)_\varkappa$ nahezu den Wert 7, während die van der Waalsche Gleichung in ihrer ursprünglichen Form hierfür 4 ergibt.

Ich habe nach Gleichung 1) auch einige Punkte der Dampfspannungen berechnet. Zu dem Zweck brachte ich 1) zunächst auf die reducirte Form:

$$(48)\quad \mathfrak{p}\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{t}}{0{,}3503}\left\{1 + \frac{0{,}5620}{\mathfrak{v}} + \frac{0{,}1974}{\mathfrak{v}^2} + \frac{0{,}0509}{\mathfrak{v}^3}\right\} - \frac{4{,}168}{\mathfrak{v}},$$

dann zeichnete ich nach dieser Formel einige Isothermen auf Millimeterpapier und bestimmte für jede die Maxwell Clausius'sche Gerade. Die Schnittpunkte derselben mit der Curve ergaben den zugehörigen reducirten Dampfdruck. Die Resultate findet man in nachstehender Tabelle. Die beobachteten Werte sind den Messungen von Ramsay und Travers mit Argon entnommen, da dieser Stoff genauer untersucht ist als Krypton und Xenon.

$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{p}$ ber.	$\mathfrak{p}$ beob.
1,00	1,00	1,00
0,90	0,555	0,554
0,80	0,254	0,271

Die Zustandsgleichung gibt also die Dampfspannungen bis herab zum reducirten Druck 0,25 richtig wieder, wir dürfen daher vermuten, daß sie auch für den flüssigen Zustand wenigstens genähert giltig ist, natürlich müssen wir dabei von der Gegend der sehr kleinen Volumina absehen, da hier die weggelassenen Glieder mit $\alpha_3, \alpha_4 ..$ sich bemerkbar machen müssen.

Wir wollen jetzt aus unserer Zustandsgleichung, die wir in der allgemeinen Form:

$$(49)\qquad p = RTf(v) - \frac{a}{v^2}$$

schreiben, wobei $f(v)$ eine ganz beliebige Funktion von v sein soll, eine Folgerung ziehen, die sich an den vorliegenden Beobachtungen prüfen läßt. Setzt man diesen Ausdruck für p in die thermodynamische Relation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

ein, in welcher u die specifische Energie darstellt, so folgt:

$$(50)\qquad u = -\frac{a}{v} + \varphi(T).$$

Hier ist $\varphi(T)$ der Wert von u für $v = \infty$ also für den idealen Gaszustand. Bezeichnet man mit r die Verdampfungsräume, so ist nach dem ersten Hauptsatz

$$u_1 - u_2 + p(v_1 - v_2) = r$$

der Index 1 hat hier Bezug auf den gesättigten Dampf und 2 auf die damit koexistirende Flüssigkeit. Substituirt man für u_1 und u_2 ihre Werte aus 50), so ergibt sich

$$a\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) + p(v_1 - v_2) = r. \tag{51}$$

Bei tiefen reducirten Temperaturen darf man $\frac{1}{v_1}$ gegen $\frac{1}{v_2}$ und v_2 gegen v_1 vernachlässigen und außerdem auf die Dampfphase das Mariotte-Gay Lussac'sche Gesetz anwenden. Wir erhalten dann:

$$\frac{a}{v_2} + RT = r. \tag{52}$$

Wir wollen nach dieser Gleichung v_2 berechnen und den so erhaltenen Wert mit den Beobachtungen vergleichen, wir beschränken uns dabei auf Argon, da hier die Dampfdrucke namentlich bei tiefen Temperaturen besser bestimmt sind als bei Krypton und Xenon. Den Wert von r habe ich auf Grund der bekannten thermodynamischen Formel

$$r = \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT}$$

berechnet. Aus den Versuchen von Ramsay und Travers erhielt ich im Mittel aus 2 Messungen:

$$\text{bei } T = 85^0 \quad p = 604 \text{ mm Hg} \quad \frac{dp}{dT} = 64{,}25 \frac{\text{mm Hg}}{\text{Temp.}}.$$

Mit diesen Werten findet man

$$r = 38{,}1 \text{ cal.} \tag{53}$$

Mit Benutzung dieses Wertes für r sowie der für a in der Tabelle auf pg. 16 angegebenen Zahl ergibt sich nach 52)

$$v_2 = 0{,}707 \text{ ccm/gr.} \tag{54}$$

Ramsay und Travers fanden bei der Temperatur 88° $v_2 = 0{,}825$; während Olszewski angibt, daß die Dichte vom flüssigen Argon beim Siedepunkt d. h. bei $T = 86^0$ 1,5 sei, woraus $v_2 = 0{,}67$ folgt. Der theoretische Wert liegt zwischen den beiden experimentellen. Berechnet man nach dem Gesetz der korrespondirenden Zustände v_2 für Argon aus dem bei Krypton beobachteten Wert für v_2, so

findet man für den erst genannten Stoff

$$v_2 = 0{,}73$$

was ebenfalls ganz gut mit (54) übereinstimmt. Es dürfte daher einigermaßen plausibel sein, daß eine Gleichung von der Form 49) bis herab zur reducirten Temperatur $t = 0{,}55$ (dieser Wert entspricht $T = 85^0$) wenigstens genähert auch für den flüssigen Zustand giltig ist.

Das Resultat der vorangehenden Untersuchungen läßt sich also kurz dahin zusammenfassen, daß die Zustandsgleichung 1) für einatomige Stoffe giltig ist, wenigstens wenn man die sehr tiefen Temperaturen außer Acht läßt.

Es ist beachtenswert, daß dies Resultat im wesentlichen bestehen bleibt, auch wenn man für α_2 einen etwas größern oder kleinern Wert als 3) annimmt. Ich habe mit $\alpha_2 = 0{,}460$ und $\alpha_2 = 0{,}1432$ einige Punkte der Isothermen nochmals berechnet und erhielt in beiden Fällen Werte für pv, die sich von den mit $\alpha_2 = 0{,}2869$ erhaltenen Zahlen so gut wie gar nicht unterscheiden. Für $\frac{T_x}{p_x}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x$ erhielt ich mit $\alpha_2 = 0{,}460 : 4{,}92$, mit $\alpha_2 = 0{,}1432 : 5{,}51$. Natürlich sind die Unterschiede gegenüber den mit $\alpha_2 = 0{,}2869$ ausgeführten Berechnungen noch viel geringer, falls man α_2 zwischen den von uns ermittelten engern Grenzen (36) oder (35) variiren läßt.

Wir wollen jetzt noch die Zustandsgleichung bei sehr tiefen reducirten Temperaturen mit den Beobachtungen vergleichen, es kommen hier nur die bei Quecksilber vorliegenden Messungen in Betracht. Wir wollen zeigen, daß, selbst wenn man in 40) a durch eine willkürliche Funktion $F(T)$ von T ersetzt, die so entstandene Gleichung

$$p = RTf(v) - \frac{F(T)}{v^2} \tag{55}$$

innerhalb des angegebenen Temperaturgebietes nicht im Einklang mit den Experimenten steht.

Wir gehen wiederum aus von dem ersten Hauptsatz, angewandt auf das Gleichgewicht von Dampf (Index 1) und Flüssigkeit (Index 2):

$$r = u_1 - u_2 + p(v_1 - v_2). \tag{56}$$

Zur Berechnung von u dient wiederum die Beziehung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{dp}{\partial T}\right)_v - p,$$

aus welcher mit Rücksicht auf (55)

$$u = \varphi(T) + \frac{TF'(T) - F(T)}{v} \tag{57}$$

folgt. Andererseits ist nun zufolge von (55)

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p = -\frac{TF'(T) - F(T)}{v^2}. \tag{58}$$

Weiter folgt aus (57) und (58):

$$u = \varphi(T) - \left(T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right)v. \tag{59}$$

Diese Gleichung läßt sich nicht aus den beiden Hauptsätzen allein ableiten, sie ist eine Folge der angenommenen Zustandsgleichung. Wir führen nun für u_1 und u_2 ihre Werte aus (59) in (56) ein und erhalten:

$$r = \left\{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v v\right\}_2 - \left\{T\left(\frac{dp}{\partial T}\right)_v v\right\}_1 + 2p(v_1 - v_2). \tag{60}$$

Diese Gleichung läßt sich bei Vernachlässigung von v_2 gegen v_1 und unter Anwendung des Mariotte Gay Lussac'schen Gesetzes auf die Dampfphase auch folgendermaßen schreiben:

$$r = \left\{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v v\right\}_2 + RT. \tag{61}$$

Diese Formel wollen wir mit den Beobachtungen vergleichen. Die Größe $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$ berechnet sich aus dem Ausdehnungs- und Kompressibilitätskoeffizienten, der erstere ist von Regnault sorgfältig bestimmt; aber auch der Wert des letzteren darf bis auf wenige Procente genau angesehen werden, da die von Amagat und de Metz[1]) erhaltenen Zahlen recht gut übereinstimmen. Mit Benutzung des Amagat'schen Wertes

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = 0{,}00000392 \frac{1}{\text{Atm.}}$$

ergibt sich, da

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T} = 0{,}0001812 \text{ bei } 0^0 \text{ Cels.}$$

1) de Metz, Wiedem. Ann. 47, pg. 706. 1892.

ist:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = 46{,}2 \text{ Atm. pro } 1^0$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial T} = 46{,}9.10^6$$

im absolutem Maßsystem. Da ferner das Molekulargewicht $m = 200$ und $v_2 = \frac{1}{13{,}60}$ bei 0^0, d. h. $T = 273$ ist, so ergibt sich bei dieser Temperatur für r nach (61):

$$r = 25{,}2 \text{ cal.} \tag{62}$$

Beobachtet wurde bei der Temperatur des Siedepunktes $T = 273 + 357^0$ von Person $r = 62$ cal., von Kurbatoff $r = 67$ cal., der letztere Wert stimmt mit dem nach der Formel $r = R\frac{T^2}{p}\frac{dp}{dT}$ berechneten überein, und dürfte daher der richtigere sein. Bei 0^0 muß r noch größer sein, da zufolge der thermodynamischen Formel $\frac{dr}{dT} = c_{p_1} - c_{p_2}$ (c_{p_1} = specifische Wärme bei konstantem Druck des Dampfes, c_{p_2} = specifische Wärme der Flüssigkeit), r mit abnehmender Temperatur wächst. Wie man sieht, ist der nach Formel (61) berechnete Wert für r sehr verschieden von den beobachteten. Mithin müssen wir schließen, daß Gleichung (55) auf flüssiges Quecksilber in der Gegend von 0^0 Celsius nicht anwendbar ist.

Welche Schlüsse ergeben sich nun aus den vorangehenden Prüfungen? Aus der Ungiltigkeit der Gleichung (55) für Quecksilber bei 0^0 folgt sofort, daß für diesen Stoff bei sehr tiefen reducirten Temperaturen die der Formel 55) zu Grunde liegenden van der Waals'schen Vorstellungen (kugelförmige, vollkommen elastische Moleküle, deren gegenseitige Anziehungskräfte sich im Innern aufheben) nicht zutreffend sind. Sehen wir im folgenden von der Gegend der sehr tiefen reducirten Temperaturen ab, so müssen wir aus der weitgehenden Giltigkeit der Zustandsgleichung für die untersuchten Stoffe Argon, Krypton und Xenon auf die Brauchbarkeit der van der Waalsschen Vorstellungen schließen. Dies trifft auch für Quecksilber zu (natürlich mit Ausnahme der sehr tiefen Temperaturen), da diese Substanz mit Argon etc. korrespondirt. Ins-

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

(Dritte Mitteilung[1]).

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Juli 1905.

X.

Riemanns Probleme in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Riemann hat in seiner Inauguraldissertation (Abschnitt 19) die allgemeine Aufgabe gestellt, Funktionen einer komplexen Veränderlichen innerhalb eines von einer gegebenen Randkurve begrenzten Gebietes der komplexen Ebene zu bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf jener Randkurve Relationen gelten sollen, deren Koeffizienten auf der Randkurve sich stetig ändernde gegebene Funktionen sind. Die Theorie der Integralgleichungen bietet, wie ich bereits in einem auf dem internationalen Kongreß in Heidelberg gehaltenen Vortrage an einem Beispiel gezeigt habe, die Mittel zur Lösung dieser Riemannschen Fragestellung für den Fall, daß die auf der Randkurve gegebenen Relationen lineare sind.

Freilich ist die in jenem Vortrage zur Erläuterung der Methode gewählte Aufgabe wegen ihrer besonderen Einfachheit auch ohne dieses Hülfsmittel lösbar, und zwar, indem man z w e i m a l die gewöhnliche Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials anwendet.

1) Vgl. erste u. zweite Mitteilung diese Nachrichten 1904.

Das dort behandelte Problem besteht darin, innerhalb einer geschlossenen Kurve C mit stetig sich ändernder Tangente und von der Gesamtbogenlänge l eine regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bez. $v(s)$ auf C der linearen Relation

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$

genügen; dabei sind $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ als stetig differenzirbare [1]) Funktionen der Bogenlänge s mit der Periode l — die ersteren beiden $a(s)$, $b(s)$ ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben [2]).

Ich will nun kurz zeigen, wie man eine dieser Aufgabe genügende Funktion findet, die innerhalb C (nicht notwendig auf C) den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Zu dem Zwecke bezeichne ich mit $2n i\pi$ die Aenderung, die $l(a(s) + ib(s))$ beim positivem Umlauf längst der geschlossenen Kurve C erfährt. Durch den Imaginärteil von $l(a(s) + ib(s))$, d. h. durch den Ausdruck

$$\text{arctg}\,\frac{b(s)}{a(s)} \tag{1}$$

wird dann eine reelle Funktion auf C dargestellt, die von s stetig abhängt mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Punktes $s = 0$, wo ein Sprung ihrer Werte um $2n\pi$ stattfindet.

Mittelst der bekannten Randwertaufgabe in der Theorie des logarithmischen Potentials bestimme man nun eine analytische Funktion $F(z)$, die sich innerhalb der Kurve C wie eine ganze Funktion verhält und deren Imaginärteil die Randwerte (1) besitzt. Wird dann

$$G(z) \equiv e^{F(z)} = U(xy) + i\,V(xy)$$

gesetzt, während

$$U(s) + i\,V(s)$$

1) Betreffs Bedeutung dieser Ausdrucksweise vgl. meine erste Mitteilung S. 214.

2) Aus dem Heidelberger Vortrage geht unmittelbar nur hervor, daß überhaupt eine der Aufgabe genügende Funktion vom Charakter einer rationalen Funktion existirt. Es ist jedoch leicht möglich, durch eine geringe Modifikation des dort angegebenen Verfahrens die etwa innerhalb C auftretenden Pole auf die Kurve C selbst zu verlegen. Ebenso leicht kann man übrigens, indem man den Begriff des Cauchyschen Index heranzieht oder wie hier weiter im Text verfährt, feststellen, wann eine Funktion der Aufgabe genügt, die überall innerhalb und auf dem Rande von C den Charakter einer ganzen Funktion hat und wie groß die Mannigfaltigkeit solcher Lösungen ist.

die Randwerte dieser Funktion $G(z)$ bezeichnen, so erkennen wir auf der Kurve C die Uebereinstimmung der Imaginärteile von

$$l(U(s)+i\,V(s)) \text{ und } l(a(s)+ib(s))$$

d. h. es ist auf der Kurve C

$$a(s)\,V(s)-b(s)\,U(s) = 0.$$

Endlich konstruiren wir eine analytische Funktion $f^*(z)$, die innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion hat und deren Realteil auf C die Randwerte

$$-\frac{c(s)\,U(s)}{a(s)(U^2(s)+V^2(s))} = -\frac{c(s)\,V(s)}{b(s)(U^2(s)+V^2(s))}$$

besitzt; dann ist

$$f(z) = G(z)f^*(z)$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Die gefundene Funktion $f(z)$ hat innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion; sie besitzt jedoch, wenn n negativ ausfällt, auf C im Punkte $s = 0$ einen Pol $-2n$ ter Ordnung.

Wir wenden uns nunmehr zu einer Aufgabe, welche mir im Sinne der Riemannschen Fragestellung als eine der einfachsten Aufgaben in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen erscheint: es ist dies die Aufgabe, eine außerhalb der geschlossenen Kurve C reguläre analytische Funktion $f_a(z)$ und eine innerhalb C reguläre analytische bez. sich wie eine rationale Funktion verhaltende Funktion $f_i(z)$ zu finden, sodaß die Randwerte beider Funktionen auf der Kurve C selbst in einem gegebenen komplexen Verhältniß stehen, d. h. daß

$$f_a(s) = c(s)f_i(s)$$

wird, wo in dem komplexen Ausdrucke

$$c(s) = a(s)+ib(s)$$

Real- und Imaginärteil $a(s)$, $b(s)$ als zweimal stetig differenzirbare Funktionen der Bogenlänge s — ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben sind. Die Kurve C werde der Einfachheit halber analytisch vorausgesetzt.

Um diese Aufgabe zu lösen, konstruiren wir zunächst eine Greensche Funktion $G_i(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in Bezug auf xy innerhalb C überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_i}{\partial y^2} = 0$$

genügen, ferner an der innerhalb C gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden derart, daß bei dem Ansatze

$$(2) \qquad G_j(xy, \xi\eta) = -\log|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}| + A(xy, \xi\eta)$$

die Funktion $A(xy, \xi\eta)$ regulär analytisch in x, y, ξ, η ausfällt, und endlich sollen die in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung von $G_j(xy, \xi\eta)$ auf C einen von s unabhängigen Wert $\varkappa$ besitzen. Lassen wir den Punkt xy bez. die Punkte xy und $\xi\eta$ in die Randpunkte s bez. s und σ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_j(s, \xi\eta) \text{ bez. } G_j(s, \sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_j(xy)$ irgend eine innerhalb C der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = 0$$

genügende stetige Funktion, $\frac{\partial u_j}{\partial n}$ ihre in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung auf C und $u_j(s)$ ihre Randwerte auf C bezeichnen, so liefert die Greensche Formel in bekannter Weise:

$$(3) \qquad u_j(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s, \xi\eta)\frac{\partial u_j}{\partial n}ds + \frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^l u_j(s)\,ds$$

wo l die Gesammtlänge von C bedeutet. Für $u_j = 1$ folgt hieraus

$$\varkappa = \frac{2\pi}{l}.$$

Nunmehr sei $v_j(xy)$ eine zu $u_j(xy)$ konjugirte Potentialfunktion, so daß

$$u_j(xy) + i\,v_j(xy)$$

eine innerhalb C reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln z bedeutet. Bezeichnet $v(s)$ deren Randwerte, so ist

$$\frac{\partial u_j}{\partial n} = -\frac{dv_j(s)}{ds}.$$

Mit Rücksicht hierauf entsteht aus der Gleichung (3), wenn wir den Punkt $\xi\eta$ in den Randpunkt σ wandern lassen:

$$u_j(\sigma) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s, \sigma)\frac{dv_j}{ds}ds + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(s)\,ds$$

oder bei Vertauschung von s, σ:

$$(4) \qquad u_j(s) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(\sigma, s)\frac{d v_j}{d\sigma}\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma.$$

Aus (2) entnehmen wir

$$G_j(\sigma, s) = -\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(\sigma - s)\right| + A^*(\sigma, s),$$

wo $A^*(\sigma, s)$ eine reguläre analytische Funktion von σ, s ist. Demnach wird

$$(5) \qquad \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} = \frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s - \sigma) + \frac{\partial A^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}.$$

Unter Anwendung der Formel für die Produktintegration nimmt (4) die Gestalt an:

$$(6) \qquad u_j(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wo für das erste Integral rechter Hand sein Cauchyscher Hauptwert zu nehmen ist; derselbe existirt gewiß stets dann, wenn $v_j(\sigma)$ eine stetig differenzirbare Funktion von σ ist.

Die eben gefundene Formel (6) gilt, wenn $u_j(s) + i v_j(s)$ die Randwerte auf C irgend einer Funktion der komplexen Veränderlichen z

$$f_j(z) = u_j(x, y) + i v_j(xy)$$

sind, die innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion hat. Wenden wir diese Formel auf die Funktion $i f_j(z)$ an, so entsteht:

$$(7) \qquad v_j(s) = +\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma.$$

wo wieder für das erste Integral rechter Hand der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Ist also der Realteil $u_j(s)$ einer innerhalb C regulären Funktion auf C bekannt, so findet man die Randwerte des Imaginärteiles $v_j(s)$ durch die Formel

$$(7^*) \qquad v_j(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei über die additive Konstante in $v_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt. Ist andererseits der Imaginärteil $v_j(s)$ einer innerhalb C regulären Funktion auf C bekannt, so findet man die Randwerte des Realteiles $u_j(s)$ durch die Formel

$$(7^{**}) \qquad u_j(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei über die additive Konstante in $u_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_j W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\, d\sigma.$$

Die Formeln (6) und (7) lassen sich in die folgende zusammenfassen

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l}\int_0^l f_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$M_j f_j$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_j(s)$ dar, diese nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß diese letztere Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

den Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich gilt die Tatsache, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, der Ausdruck

$$w + M_j w$$

stets die Randwerte einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Variabeln darstellt. Wir erkennen dies, indem wir für $w(s)$ erst einen reellen und dann einen rein imaginären Ausdruck nehmen und jedesmal bez. (7^*), (7^{**}) anwenden.

Nunmehr konstruiren wir eine Greensche Funktion $G_a(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in Bezug auf x, y außerhalb C überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_a}{\partial y^2} = 0$$

genügen, ferner an der außerhalb C gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden, derart daß bei dem Ansatze

$$G_a(xy, \xi\eta) = -\log\left|\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right| + B(xy, \xi\eta)$$

die Funktion $B(xy, \xi\eta)$ regulär analytisch in x, y, ξ, η ausfällt, und endlich sollen die in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen von $G_a(xy, \xi\eta)$ auf C einen von s unabhängigen Wert λ besitzen. Lassen wir den Punkt xy, bez. die Punkte xy und $\xi\eta$ in die Randpunkte s bez. s und σ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_a(s, \xi\eta) \text{ bez. } G_a(s, \sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_a(xy)$ irgend eine außerhalb C der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} = 0$$

genügende stetige (auch im Unendlichen endlich bleibende) Funktion, $\frac{\partial u_a}{\partial n}$ ihre in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen auf C und $u_a(s)$ ihre Randwerte auf C bezeichnen, so erhalten wir in bekannter Weise.

$$(8) \qquad u_a(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(s, \xi\eta)\frac{\partial u_a}{\partial n}ds + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(s)ds.$$

Nunmehr sei $v_a(xy)$ eine zu $u_a(xy)$ konjugirte Potentialfunktion, so daß

$$u_a(xy) + i v_a(xy)$$

eine außerhalb C reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z bedeutet. Bezeichnet $v_a(s)$ die Randwerte von $v_a(xy)$, so ist

$$\frac{\partial u_a}{\partial n} = \frac{dv_a(s)}{ds}$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (8)

$$(9) \qquad u_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(\sigma, s)\frac{dv_a(\sigma)}{d\sigma}d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)d\sigma.$$

Setzen wir

$$G_a(\sigma, s) = -\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(\sigma - s)\right| + B^*(\sigma, s),$$

wo $B^*(\sigma, s)$ eine stetig differenzirbare Funktion von σ, s ist, so wird

$$\frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} = \frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma) + \frac{\partial B^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}. \tag{10}$$

Die Formel (9) transformiren wir in die Gestalt

$$u_a(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_a(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)\,d\sigma \tag{11}$$

und fügen dieser die entsprechende Formel für $v_a(s)$ hinzu:

$$v_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_a(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v_a(\sigma)\,d\sigma. \tag{12}$$

In den beiden letzten Formeln sind für die ersten Integrale rechter Hand die Cauchyschen Hauptwerte zu nehmen.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_a W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\,d\sigma.$$

Die beiden Formeln (11) und (12) lassen sich dann in die folgende zusammenfassen

$$f_a(s) = -M_a f_a + \frac{1}{l}\int_0^l f_a(\sigma)\,d\sigma,$$

wobei

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$-M_a f_a$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_a(s)$ dar, nur diese um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß *diese Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck*

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

den Randwerten einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich erkennen wir noch, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, *der Ausdruck*

$$w - M_a w$$

stets die Randwerte einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellt.

Wegen (5) und (10) ist jür jeden komplexen Ausdruck W identisch

$$M_a W = M_i W + \int_0^l D(\sigma, s)\, W(\sigma)\, d\sigma, \tag{13}$$

wo $D(\sigma, s)$ eine reguläre analytische Funktion von σ, s bedeutet.

Nunmehr kehren wir zu unserer Aufgabe zurück, die Funksionen $f_a(s)$, $f_i(s)$ zu finden derart, daß ihre Randwerte auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_i(s) \tag{14}$$

erfüllen. Wir setzen — unter Fortlassung des Argumentes s —

$$\begin{cases} F_a = f_a + M_a f_a \\ F_i = -f_i + M_i f_i + \gamma, \end{cases} \tag{15}$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$c(\sigma) = c(s) + c(\sigma, s) \sin\frac{\pi}{l}(s - \sigma), \tag{16}$$

wo $c(\sigma, s)$ eine Funktion bedeutet, die wegen der angenommenen zweimaligen stetigen Differenzirbarkeit von $c(s)$ gewiß einmal stetig differenzirbar nach s, σ wird.

Wenden wir nun auf (14) die Operation M_a an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) die Gleichung

$$M_a f_a = M_i (c f_i) + \int_0 D(\sigma, s)\, c(\sigma) f_i(\sigma)\, d\sigma,$$

und hieraus entnehmen wir wegen (16)

$$M_a f_a = c(s) M_i f_i + \int_0^l E(\sigma, s) f_i(\sigma)\, d\sigma, \tag{17}$$

wo $E(\sigma, s)$ eine stetig differenzirbare Funktion von σ, s wird.

Multipliziren wir die zweite der Gleichungen (15) mit $-c(s)$ und addiren sie zur ersten, so folgt mit Rücksicht auf (17) und (14)

$$
\begin{aligned}
F_a - cF_i &= f_a + cf_i + \int_0^l E(\sigma, s) f_i(\sigma)\, d\sigma - c\gamma \\
&= 2c(s)\left\{f_i + \int_0^l \frac{E(\sigma, s)}{2c(s)} f_i(\sigma)\, d\sigma - \frac{\gamma}{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Da $c(s)$ unserer Annahme zufolge nirgends verschwindet, so stellt

$$K(\sigma, s) = -\frac{E(\sigma, s)}{2c(s)} \tag{19}$$

eine stetig differenzirbare Funktion von σ, s dar. Wir betrachten die Integralgleichung zweiter Art mit dem komplexen Kern $K(\sigma, s)$

$$\frac{\gamma}{2} = f_i - \int_0^l K(\sigma, s) f_i(\sigma)\, d\sigma; \tag{20}$$

auf dieselbe sind die Fredholm'schen Formeln in gleicher Weise anwendbar, wie wenn der Kern eine reelle Funktion von σ, s wäre, und wir schließen hieraus, daß diese Integralgleichung gewiß eine Lösung

$$f_i(s) = u_i(s) + iv_i(s)$$

besitzen muß und zwar entweder, indem wir die Konstante γ von Null verschieden setzen oder — falls gerade 1 eine Wurzel der transzendenten zu jener Integralgleichung zweiter Art gehörigen Gleichung, d. h. ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird —, in dem wir für die Konstante γ den Wert Null setzen. Wegen der Tatsache, daß der Kern der Integralgleichung stetig differenzirbar ist, folgt — wie leicht zu erkennen ist — daß gewiß auch die Lösung der Integralgleichung d. h. die Funktionen $u_i(s)$, $v_i(s)$ stetig differenzirbare Funktionen sind.

Nunmehr bilden wir aus $f_i(s)$ nach (14) den Ausdruck $f_a(s)$ und alsdann nach (15) die Ausdrücke $F_a(s)$, $F_i(s)$. Ergeben sich diese beiden Ausdrücke $F_a(s)$, $F_i(s)$ identisch gleich Null, so zeigen die vorhin gefundenen Resultate (vgl. S. 6 und S. 8), daß die Ausdrücke f_a bez. f_i die Randwerte einer außerhalb bez. innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht beide Ausdrücke $F_a(s)$, $F_i(s)$ identisch gleich Null so betrachten wir die zu f_i bez. f_a konjugirt komplexen Ausdrücke $\bar{f}_i$ bes. $\bar{f}_a$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 6 und S. 8) stellen für beliebige w die Ausdrücke

$$w + M_j w \quad \text{bez.} \quad w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bez. außerhalb C regulär analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für w die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j$ bez. $\bar{f}_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu F_j bez. F_a konjugirt komplexen Ausdrücke $\bar{F}_j$ bez. $\bar{F}_a$ Randwerte gewisser innerhalb bez. außerhalb C regulär analytischer Funktionen $g_j(z)$ bez. $g_a(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittelung von (19), (20) aus (18)

$$F_a - cF_j = 0,$$

d. h. wenn $\bar{c}$ den zu c conjugirt komplexen Ausdruck bedeutet,

$$\bar{F}_a = \bar{c}\bar{F}_j$$

folgt, so sind $g_j(z), g_a(z)$ analytische Funktionen der komplexen Variabeln, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in der für den Rand vorgeschriebenen Relation an Stelle von $c(s)$ den conjugirt imaginären Ausdruck $\bar{c}(s)$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Wenn $c(s)$ ein gegebener komplexer Ausdruck auf der Kurve C ist, so giebt es entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z), f_a(z)$, von denen die erstere innerhalb, die zweite außerhalb der Kurve C regulär analytisch ist, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen oder ein Funktionenpaar $g_j(z), g_a(z)$ vom selben Charakter, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

erfüllen.

Um zu entscheiden, welcher von beiden Fällen eintritt, bedenken wir, daß die Aenderung. die $\log f_a(s)$ bez. $\log f_j(s)$, beim positivem Umlauf entlang der Kurve C erfährt, gleich $-2i\pi n_a$ bez. $2i\pi n_j$ ist, wo n_a, n_j die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $f_a(z)$ bez. $f_j(z)$ bezeichnen. Demnach ist $-2i\pi(n_a + n_j)$ gleich der Aenderung, die

$$\log \frac{f_a(s)}{f_j(s)} = \log c(s)$$

beim Umlauf im positiven Sinne erfährt, und es wird demnach der erste Fall eintreten, wenn die Aenderung von $\log c(s)$ beim Umlauf im positiven Sinne entlang C negativ ausfällt, dagegen tritt der zweite Fall ein, wenn jene Aenderung positiv ausfällt.

Ist insbesondere jene Aenderung von $\log c(s)$ gleich Null, so existirt sowohl ein Paar ausserhalb bez. innerhalb C holomorpher Funktionen $f_a(z), f_i(z)$, die die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_i(s) \tag{21}$$

erfüllen, als auch ein Funktionenpaar $g_a(z), g_i(z)$ von diesem Charakter mit der Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_i(s). \tag{22}$$

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß nach dem vorhin bewiesenen Satze jedenfalls ein Funktionenpaar $F_a(z)$, $F_i(z)$ existiren muß, das die Relation

$$F_a(s) = c(s)\bar{c}(s)\; F_i(s)$$

erfüllt, da ja $c(s)\,\bar{c}(s)$ mit dem konjugirten Ausdrucke übereinstimmt. Ist nun etwa die Gleichung (21) lösbar, so ist wegen unserer Annahme über $c(s)$ notwendig die Anzahl $n_a + n_i = 0$, d. h. $f_a(z), f_i(z)$ besitzen keine Nullstellen und folglich sind

$$g_a(z) = \frac{F_a(z)}{f_a(z)}, \quad g_i(z) = \frac{F_i(z)}{f_i(z)}$$

ebenfalls regulär analytische Funktionen; dieselben befriedigen die Relation (22).

Die Funktionenpaare $f_a(z), f_i(z)$ und $g_a(z), g_i(z)$ sind, wie man überdies sofort sieht, im eben betrachteten besonderen Falle bis auf je einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Die gleiche Ueberlegung dient zum Nachweise, daß es stets bei beliebig gegebenen $c(s)$ ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_i(z)$ giebt, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion hat, während auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_i(s)$$

erfüllt ist.

Wenn $\gamma(s) = \log c(s)$ eine eindeutige Funktion von s wird, so gelangen wir durch Logarithmirung zu der Aufgabe, ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_i(z)$ zu finden, von denen die erstere außerhalb C, die letztere innerhalb C regulär analytisch ist und für die die Differenz ihrer Randwerte auf C einem gegebenen komplexen Ausdrucke $\gamma(s)$ gleich wird. Wie wir sehen, hat diese Aufgabe stets eine Lösung. Im Falle die Kurve C ein Kreis ist, läßt sich die Lösung auch durch die Entwicklung von $\gamma(s)$ in eine trigonometrische Reihe ableiten.

Es bedarf endlich noch der Umstand einer näheren Untersuchung, daß die Funktion $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit aufweist.

Wir fassen zunächst einen Punkt der Kurve C ins Auge; derselbe sei der Koordinatenanfang und zugleich der Anfangspunkt für die Abmessung der Bogenlänge s. Da die Kurve C keine Ecke besitzt, so erhalten wir die Punkte auf C in der Umgebung des Koordinatenanfangs für genügend kleine positive oder negative Werte von s durch die Formel

$$z(s) = C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \cdots \tag{23}$$

dargestellt, wo rechter Hand eine Potenzreihe steht, deren erster Koefficient C_1 von Null verschieden ausfällt.

Alsdann handelt es sich zunächst darum, irgend eine innerhalb C nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_i^*(z)$ und irgend eine außerhalb C nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_a^*(z)$ zu bestimmen, so daß der Quotient der Randwerte dieser beiden Hülfsfunktionen auf C

$$\mathfrak{Q}(s) = \frac{f_a^*(s)}{f_i^*(s)}$$

in der Umgebung von $z = 0$ den folgenden Bedingungen genügt: $\mathfrak{Q}(s)$ soll für genügend kleine positive s durch eine nach Potenzen von s fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_+(s)$ und für genügend kleine negative s durch eine andere nach Potenzen von s fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_-(s)$ darstellbar sein derart, daß der Quotient dieser beiden Potenzreihen die Kongruenz

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv q_0 + q_1 s + q_2 s^2,\ (s^3) \tag{24}$$

erfüllt; dabei sind q_0, q_1, q_2 gegebene komplexe Konstante, $q_0 \neq 0$ und diese Kongruenz bedeutet, daß

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} - (q_0 + q_1 s + q_2 s^2)$$

eine durch s^3 teilbare Potenzreihe werden soll.

Um die Bestimmung solcher Funktionen $f_i^*(z), f_a^*(z)$ zu ermöglichen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi_i(z) = \log(z)$$

innerhalb der Kurve C; die Werte derselben in der Umgebung von $z = 0$ auf C stellen sich, wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \varphi_i(s) &= -i\pi + l(s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots,\ (s > 0), \\ &= \phantom{-i\pi +{}} l(-s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots,\ (s < 0), \end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ die reellen Logarithmen und $J_0, J_1, J_2, \ldots$ gewisse

komplexe Koefficienten bedeuten. Ferner betrachten wir ausserhalb der Kurve C wir die Funktion

$$\varphi_a(z) = \log\left(\frac{z}{z-p_j}\right),$$

wo p_j einen innerhalb C gelegenen Punkt bedeutet; die Werte dieser Funktion in der Umgebung von $z = 0$ auf C stellen sich, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned}\varphi_a(s) &= i\pi + l(s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s > 0),\\ &= \quad l(-s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s < 0),\end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ wiederum die reellen Logarithmen und A_0, A_1, $A_2, \ldots$ gewisse komplexe Koefficienten bedeuten.

Nunmehr bestimmen wir die ganze rationale Funktion $K_a(z)$ vom zweiten Grade in der komplexen Veränderlichen z derart, daß vermöge (23)

$$\frac{K_a(z(s))}{(z(s)-p_j)^2} \equiv \frac{1}{2i\pi}\, l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3) \tag{25}$$

wird und ferner die ganze rationale Funktion $K_j(z)$ zweiten Grades in der komplexen Veränderlichen z derart, daß vermöge (23)

$$K_j(z(s)) \equiv \frac{1}{2i\pi}\, l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3) \tag{26}$$

wird.

Setzen wir nunmehr

$$\begin{aligned} f_j^*(z) &= e^{K_j(z)\,\varphi_j(z)},\\ f_a^*(z) &= e^{\frac{K_a(z)}{(z-p_j)^2}\varphi_a(z)}\end{aligned}$$

so erfüllen diese Funktionen der komplexen Veränderlichen z alle verlangten Bedingungen. In der Tat haben wir auf C in der Umgebung von $z = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_a(s) - \varphi_j(s) &= 2i\pi + (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots \ (s > 0)\\ &= \qquad (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots \ (s < 0);\end{aligned}$$

folglich gilt mit Rücksicht auf (25) und (26) auch die Kongruenz (24).

Die gefundenen Funktionen $f_j^*(z)$, $f_a^*(z)$ sind, wie man sieht, auch auf der Kurve C, vom Punkte $s = 0$ abgesehen, regulär analytisch.

Es sei nun in dem vorgelegten, oben (S. 3—11) behandelten Problem $c(s)$ ein komplexer Ausdruck, der an einer Stelle etwa für $s = 0$ eine Unterbrechung seiner Stetigkeit bez. stetigen Differenzirbarkeit erleidet derart, daß die Darstellung der Werte von $c(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ durch zwei von einander verschiedene Potenzreihen $\mathfrak{P}_+(s)$ und $\mathfrak{P}_-(s)$ bewirkt wird, jenachdem $s > 0$ oder $s < 0$ ist. Alsdann bestimmen wir drei Konstante q_0, q_1, q_2 aus der Kongruenz

$$q_0 + q_1 s + q_2 s^2 \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)} \tag{27}$$

und bilden dann in der eben angegebenen Weise zu diesen Konstanten q_0, q_1, q_2 die analytischen Funktionen $f_a^*(z), f_i^*(z)$, so daß deren Randwertquotient $\mathfrak{Q}(s)$ die Kongruenz (24) erfüllt und folglich mit Rücksicht auf (27) auch

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{P}_-(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{Q}_+(s)} \tag{28}$$

wird. Setzen wir

$$C(s) = \frac{c(s)}{\mathfrak{Q}(s)}$$

so lehrt (28), daß $C(s)$ auch für $s = 0$ zweimal stetig differenzirbar wird; mithin ist nach dem Früheren das Problem, eine innerhalb und eine außerhalb der Kurve C reguläre Funktion $F_a(z)$ bez. $F_i(z)$ mit der Randbedingung

$$F_a(s) = C(s)\,F_i(s)$$

zu finden, lösbar; wegen

$$f_a^*(s) = \mathfrak{Q}(s) f_i^*(s)$$

erfüllen die Funktionen

$$f_a(z) = F_a(z) f_a^*(z), \quad f_i(z) = F_i(z) f_i^*(z)$$

die Randbedingung

$$f_a(s) = c(s) f_i(s)$$

und lösen daher unser vorgelegtes Problem.

Die Aufgabe, die wir nunmehr in Angriff nehmen, besteht darin, zwei außerhalb der geschlossenen Kurve C reguläre analytische Funktionen $f_a(z)$, $f'_a(z)$ und zwei innerhalb C reguläre analytische bez. sich wie rationale Funktionen verhaltende Funktionen $f_i(z)$, $f'_i(z)$ zu finden, sodaß die Randwerte dieser beiden Funktionenpaare auf der Kurve C selbst eine gegebene lineare Transformation mit komplexen Koefficienten erfahren, d. h. daß

$$(29)\qquad \begin{cases} f_a(s) = c_1(s) f_i(s) + c_2(s) f'_i(s), \\ f'_a(s) = c'_1(s) f_i(s) + c'_2(s) f'_i(s) \end{cases}$$

wird, wo $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c'_1(s)$, $c'_2(s)$ gegebene komplexe zweimal stetig differenzirbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante

$$c_1(s)\, c'_2(s) - c_2(s)\, c'_1(s)$$

für alle s von Null verschieden bleibt. Die Kurve C werde der Einfachheit halber wiederum analytisch vorausgesetzt.

Zur Lösung der Aufgabe setzen wir, indem wir der Kürze halber das Argument s fortlassen:

$$(30)\qquad \begin{cases} F_a = \quad f_a + M_a f_a, & F'_a = \quad f'_a + M_a f'_a, \\ F_i = -f_i + M_i f_i + \gamma, & F'_i = -f'_i + M_i f'_i, \end{cases}$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$(31)\qquad \begin{cases} c_1(\sigma) = c_1(s) + c_1(\sigma, s) \sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma), \\ c\;(\sigma) = c_2(s) + c_2(\sigma, s) \sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma), \\ c'_1(\sigma) = c'_1(s) + c'_1(\sigma, s) \sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma), \\ c'_2(\sigma) = c'_2(s) + c'_2(\sigma, s) \sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma), \end{cases}$$

wo nun die Funktionen $c_1(\sigma, s)$, $c_2(\sigma, s)$, $c'_1(\sigma, s)$, $c'_2(\sigma, s)$ gewiß für alle Argumente σ, s einmal stetig differenzirbar nach diesen Argumenten sind.

Wenden wir auf (29), indem wir uns die Randwerte f_a, f'_a, f_i, f_i als stetig differenzirbare Funktionen von s denken, die Operation

M_a an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) und (31)

$$(32)\quad \begin{cases} M_a f_a = c_1 M_j f_j + c_2 M_j f_j' + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \\ M_a f_a' = c_1' M_j f_j + c_2' M_j f_j' + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \end{cases}$$

wo $E_1(\sigma, s)$, $E_2(\sigma, s)$, $E_1'(\sigma, s)$, $E_2'(\sigma, s)$ stetig differenzirbare Funktionen von σ, s sind und das Argument s wiederum der Kürze halber weggelassen worden ist.

Multipliziren wir die in der unteren Zeile von (30) stehenden zwei Gleichungen einmal mit $-c_1$, $-c_2$ und ein anderes Mal mit $-c_1'$, $-c_2'$ und addiren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (32)

$$F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = f_a + c_1 f_j + c_2 f_j'$$
$$+ \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f'(\sigma))\, d\sigma - c_1 \gamma,$$

$$F_a' - c_1' F_j - c_2' F_j' = f_a' + c_1' f_j + c_2' f_j'$$
$$+ \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma - c_1' \gamma$$

und mit Hülfe von (29)

$$(33)\quad \begin{cases} F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = 2(c_1 f_j + c_2 f_j') \\ \qquad + \int_0^l (E_1(\sigma,s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma,s) f_j'(\sigma))\, d\sigma - c_1 \gamma, \\ F_a' - c_1' F - c_2' F_j' = 2(c_1' f_j + c_2' f_j') \\ \qquad + \int_0^l (E_1'(\sigma,s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma,s) f_j'(\sigma))\, d\sigma - c_1' \gamma. \end{cases}$$

Setzen wir die rechten Seiten dieser beiden letzten Formeln gleich Null, so können wir durch Kombination der so entstehenden Gleichungen — da ja die Determinante $c_1 c_2' - c_2 c_1'$ unserer Annahme zufolge für keinen Wert von s verschwindet — Gleichungen von

der Form

$$
(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} &= f_j - \int_0^l \left(K_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)\right) d\sigma, \\ 0 &= f_j' - \int_0^l \left(K_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)\right) d\sigma \end{aligned}\right.
$$

erhalten, wo $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ ebenfalls stetig differenzirbare Funktionen von σ, s sind. Diese Gleichungen lassen sich in eine einzige Integralgleichung zweiter Art

$$
(35)\qquad \gamma(s) = \varphi(s) - \int_0^{2l} K(\sigma, s)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma
$$

zusammenfassen, indem wir die Funktionen $\gamma(s)$, $\varphi(s)$, $K(\sigma, s)$, wie folgt, definiren:

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) &= \frac{\gamma}{2},\ 0 \leqq s \leqq l \\
&= 0,\ l < s \leqq 2l; \\
\varphi(s) &= f_j(s),\ 0 \leqq s \leqq l \\
&= f_j'(s-l),\ l < s \leqq 2l; \\
K(\sigma, s) &= K_1(\sigma, s),\ \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases} \\
&= K_2(\sigma - l, s),\ \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ l < \sigma \leqq 2l \end{cases} \\
&= K_1'(\sigma, s - l),\ \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases} \\
&= K_2'(\sigma - l, s - l),\ \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ l < \sigma \leqq 2l. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Anwendung der Fredholmschen Formeln zeigt, daß die Integralgleichung (35) stets eine Lösung $\varphi(s)$ besitzen muß und zwar entweder, indem wir der Konstanten γ irgend einen von Null verschiedenen Wert erteilen oder — falls gerade 1 ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird — indem wir für die Konstante γ den Wert Null wählen, wodurch die Integralgleichung zu einer homogenen wird. Diese Lösung $\varphi(s)$ liefert die Lösungen $f_j(s)$, $f_j'(s)$ der Gleichungen (34) und die so gewonnenen Funktionen $f_j(s)$, $f_j'(s)$ sind gewiß ebenfalls stetig differenzirbar — wie aus der stetigen Differenzirbarkeit der Funktionen $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ sofort zu erkennen ist, indem man allgemein zeigt, daß Integrale

von der Gestalt

$$\int_0^1 K^*(\sigma, s)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

gewiß notwendig stetig differenzirbare Funktionen von s darstellen, sobald $\varphi(\sigma)$ stetig in σ und $K^*(\sigma, s)$ stetig differenzirbar in Bezug auf beide Variable σ, s ist.

Nunmehr bilden wir aus $f_j(s), f'_j(s)$ nach (29) die Ausdrücke $f_a(s), f'_a(s)$ und alsdann nach (30) die Ausdrücke $F_a(s)$, $F'_a(s)$, $F_j(s)$ $F'_j(s)$. Ergeben sich diese vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F'_a(s)$ $F_j(s)$, $F'_j(s)$ sämtlich identisch gleich Null, so zeigen unsere obigen Resultate (vgl. S. 6 und S. 8), daß die Ausdrücke f_a, f'_a und f_j, f'_j die Randwerte außerhalb bez. innerhalb C regulärer analytischer Funktionen der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht alle vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F'_a(s)$, $F_j(s)$, $F'_j(s)$ identisch gleich Null, so betrachten wir die zu f_j, f'_j und f_a, f'_a konjugirt komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}'_j$ bez. $\bar{f}_a, \bar{f}'_a$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 6 und S. 9) stellen für beliebige w die Ausdrücke

$$w + M_j w \quad \text{bez.} \quad w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bez. außerhalb C regulärer analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für w die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}'_j$ bez. $\bar{f}_a, \bar{f}'_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu F_j, F'_j bez. F_a, F'_a konjugirt komplexen Ausdrücke $\overline{F}_j$, $\overline{F}'_j$ $\overline{F}_a$, $\overline{F}'_a$ Randwerte gewisser innerhalb bez. außerhalb C regulärer analytischer Funktionen $g_j(z)$, $g'_j(z)$ bez. $g_a(z)$, $g'_a(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittelung von (32), (34) aus (33) offenbar

$$F_a = c_1 F_j + c_2 F'_j,$$
$$F'_a = c'_1 F_j + c'_2 F'_j$$

folgt und mithin, wenn $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}'_1$, $\bar{c}'_2$ die zu c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugirt komplexen Ausdrücke bedeuten, auch

$$\overline{F}_a = \bar{c}_1 \overline{F}_j + \bar{c}_2 \overline{F}'_j,$$
$$\overline{F}'_a = \bar{c}'_1 \overline{F}_j + \bar{c}'_2 \overline{F}'_j$$

wird, so sind offenbar $g_j(z)$, $g'_j(z)$, $g_a(z)$, $g'_a(z)$ analytische und auf

C gewiß stetige Funktionen der komplexen Variabeln, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in den für den Rand vorgeschriebenen linearen Relationen an Stelle der Koefficienten c_1, c_2, c'_1, c'_2 die konjugirt komplexen Ausdrücke $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}'_1, \bar{c}'_2$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation gewiß lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Wenn c_1, c_2, c'_1, c'_2 gegebene komplexe zweimal stetig differenzirbare Ausdrücke auf der Kurve C sind, so giebt es entweder zwei Funktionenpaare $f_i(z), f'_i(z)$ und $f_a(z), f'_a(z)$, von denen die ersteren innerhalb, die letzteren außerhalb der Kurve C regulär analytisch sind, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relationen

$$f_a = c_1 f_i + c_2 f'_i,$$
$$f'_a = c'_1 f_i + c'_2 f'_i$$

erfüllen, oder zwei Funktionenpaare ebenfalls von regulärem Charakter innerhalb bez. außerhalb C: $g_i(z), g'_i(z)$ und $g_a(z), g'_a(z)$, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relationen

$$g_a = \bar{c}_1 g_i + \bar{c}_2 g'_i,$$
$$g'_a = \bar{c}'_1 g_i + \bar{c}'_2 g'_i$$

erfüllen, wo $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}'_1, \bar{c}'_2$ die zu den gegebenen Ausdrücken bez. c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugirt komplexen Ausdrücke bedeuten.

Wir fügen diesem Resultate noch folgende Bemerkungen hinzu.

Es seien $f_a(z), f'_a(z), f_i(z), f'_i(z)$ außerhalb bez. innerhalb von C stetig differenzirbare Funktionen, deren Randwerte auf C stetig differenzirbare Funktionen von s seien und den Bedingungen (29) genügen mögen: dann gelten, wie vorhin gezeigt, für die Randwerte f_a, f'_a, f_i, f'_i die Gleichungen (32). Ferner ist unseren früheren Ausführungen (vgl. S. 6 bis S. 8) zufolge

$$f_a + M_a f_a - \frac{1}{l}\int^l f_a(\sigma)\,d\sigma = 0,\quad f'_a + M_a f'_a - \frac{1}{l}\int_0^l f'_a(\sigma)\,d\sigma = 0,$$
$$f_i - M_i f_i - \frac{1}{l}\int^l f_i(\sigma)\,d\sigma = 0,\quad f'_i - M_i f'_i - \frac{1}{l}\int_0^l f'_i(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Multipliziren wir hier die in der unteren Zeile stehenden zwei Gleichungen einmal mit c_1, c_2 und ein anderes Mal mit c'_1, c'_2 und addiren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so gelangen wir mit Rücksicht

auf (32) und bei Benutzung von (29) zu Gleichungen der Gestalt

$$2(c_1 f_j + c_2 f_j') + \int_0^l (G_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma = 0,$$

$$2(c_1' f_j + c_2' f_j') + \int_0^l (G_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma = 0$$

und durch deren Kombination entstehen die Integralgleichungen:

$$(36) \quad \begin{cases} f_j - \int_0^l (L_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma = 0, \\ f_j' - \int_0^l (L_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma = 0; \end{cases}$$

dabei sind $G_1(\sigma, s)$, $G_2(\sigma, s)$, $G_1'(\sigma, s)$, $G_2'(\sigma, s)$ und mithin auch $L_1(\sigma, s)$, $L_2(\sigma, s)$, $L_1'(\sigma, s)$, $L_2'(\sigma, s)$ stetig differenzirbare Funktionen von σ, s. Die Integralgleichungen (36) lassen sich wieder in analoger Weise wie früher die Integralgleichungen (34) in eine homogene Integralgleichung zweiter Art zusammen fassen, wenn wir wie dort an Stelle der Funktionen f_j, f_j' eine Funktion $\varphi(s)$ einführen. Da aber eine Integralgleichung zweiter Art gewiß nur eine endliche Anzahl linear von einander unabhängiger Lösungen besitzt, so folgt, daß es auch nur eine *endliche* Anzahl von Funktionenpaaren f_j, f_j' und zugehöriger f_a, f_a' von der in Rede stehenden Beschaffenheit geben kann.

Setzen wir von den Randwerten f_a, f_a', f_j, f_j' der analytischen Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ nicht die stetige Differenzirbarkeit, sondern nur Stetigkeit in s voraus, so können wir diese Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j' doch stets durch gewisse Ausdrücke $f_a^{(r)}$, $f_a'^{(r)}$, $f_j^{(r)}$, $f_j'^{(r)}$ in s gleichmäßig annähern, welche die Randwerte von analytischen außerhalb und auf C bez. innerhalb und auf C regulären Funktionen in z sind und welche daher in s analytisch ausfallen.

Um dies etwa für die Randwerte f_j, f_j' einzusehen, seien

$$Z = \Phi(z) \quad \text{oder} \quad z = \varphi(Z)$$

die analytischen Beziehungen zwischen den komplexen Veränderlichen z, Z, vermöge derer das Innere der Kurve C in der komplexen z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises in der komplexen Z-Ebene konform abgebildet wird. Alsdann stellen für $r < 1$ die Ausdrücke

$$f_j(\varphi(r\,\Phi(z))), \quad f'(\varphi(r\,\Phi(z)))$$

innerhalb und auf C reguläre analytische Funktionen von z dar, deren Randwerte auf C

$$f_j^{(r)} = f_j(\varphi(r\,\Phi(s))), \quad f_j'^{(r)} = f_j'(\varphi(r\,\Phi(s)))$$

beim Grenzübergange zu $r = 1$ gleichmäßig gegen die Randwerte f_j, f_j' konvergiren.

Entsprechend gelangen wir für die Randwerte f_a, f_a' zu gleichmäßig annähernden Randwerten $f_a^{(r)}, f_a'^{(r)}$ von der gewünschten Art.

Bestimmen wir nun vier Funktionen $c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, c_1'^{(r)}, c_2'^{(r)}$ auf C, die noch von dem Parameter r abhängen und für $r = 1$ bez. in c_1, c_2, c_1', c_2' übergehen, während für alle r die Relationen

$$f_a^{(r)} = c_1^{(r)} f_j^{(r)} + c_2^{(r)} f_j'^{(r)},$$
$$f_a'^{(r)} = c_1'^{(r)} f_j^{(r)} + c_2'^{(r)} f_j'^{(r)}$$

gelten, so müssen unserer obigen Ueberlegung zufolge die Werte $f_j^{(r)}, f_j'^{(r)}$ gewisse entsprechende Integralgleichungen von der Gestalt (36) erfüllen, die für $r = 1$ in die Integralgleichungen (36) übergehen. Aus diesem Grunde erkennen wir, daß die Funktionen f_j, f_j' die Integralgleichungen (36) befriedigen und erschließen hieraus ihre stetige Differenzirbarkeit.

Wir fassen diese Bemerkungen in folgendem Satze zusammen:

Wenn $f_a(z), f_a'(z), f_j(z), f_j'(z)$ außerhalb bez. innerhalb C regulär analytische Funktionen von z und die Randwerte derselben auf C stetige den Relationen (29) *genügende Funktionen von s sind, so sind diese Randwerte auf C notwendig auch stetig differenzirbare Funktionen von s.*

Es giebt gar keine oder nur eine endliche Anzahl linear von einander unabhängiger Systeme von Funktionen $f_a(z), f_a'(z), f_j(z), f_j'(z)$, die außerhalb bez. innerhalb C regulär analytisch sind und auf C stetige den Relationen (29) *genügende Randwerte besitzen.*

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es stets Funktionen $f_a(z), f_a'(z), f_j(z), f_j'(z)$ mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf C giebt, wenn wir von $f_a(z), f_a'(z)$ wiederum regulär analytischen Charakter außerhalb C, dagegen von den Funktionen $f_j(z), f_j'(z)$ nur verlangen, daß sie innerhalb C den Charakter rationaler Funktionen besitzen.

Um diese Frage zu beantworten, fassen wir diejenigen Systeme von Funktionen $g_a(z), g_a'(z), g_j(z), g_j'(z)$ ins Auge, die außerhalb bez. innerhalb C regulär analytischen Charakter besitzen, deren Randwerte auf C stetig sind und den Relationen

$$(37)\qquad \begin{cases} g_a = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g'_j, \\ g'_a = \bar{c}'_1 g_j + \bar{c}'_2 g'_j \end{cases}$$

genügen, wo $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}'_1, \bar{c}'_2$ die zu den gegebenen Ausdrücken bez. c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugirt imaginären Ausdrücke bedeuten. Nach dem eben bewiesenen Satze giebt es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Funktionensysteme solcher Art und deswegen fällt es uns leicht, wenn $z = p_j$ einen irgendwie gegebenen Punkt innerhalb C bedeutet, eine ganze positive Zahl n zu finden, so daß gewiß kein Funktionensystem $g_a(z)$, $g'_a(z)$, $g_j(z)$, $g'_j(z)$ der in Rede stehenden Art existirt, wobei die Funktionen $g_j(z)$, $g'_j(z)$ im Punkte $z = p_j$ von der $n$ten Ordnung Null sind.

Bezeichnen wir nun die Randwerte der Funktion $(z-p_j)^n$ auf C mit $\tilde{\omega}$, so giebt es sicherlich kein System von Funktionen $g_a^*(z)$, $g_a'^*(z)$, $g_j^*(z)$, $g_j'^*(z)$, die außerhalb bez. innerhalb C regulär analytisch sind und stetige den Relationen

$$g_a^* = \bar{c}_1 \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}_2 \tilde{\omega} g_j'^*,$$
$$g_a'^* = \bar{c}'_1 \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}'_2 \tilde{\omega} g_j'^*$$

genügende Randwerte auf C besitzen; denn andernfalls wären

$$g_a(z) = g_a^*(z),\quad g'_a(z) = g_a'^*(z)$$
$$g_j(z) = (z-p_j)^n g_j^*(z),\quad g'_j(z) = (z-p_j)^n g_j'^*(z)$$

regulär analytische Funktionen, deren Randwerte den Relationen (37) genügen und von denen $g_j(z)$, $g'_j(z)$ im Punkte $z = p_j$ eine Nullstelle $n$ter Ordnung besitzen, was nicht der Fall sein sollte.

Auf Grund der eben festgestellten Tatsache schließen wir wegen des auf S. 20 ausgesprochenen Satzes, daß es gewiß ein System von Funktionen $f_a^*(z)$, $f_a'^*(z)$, $f_j^*(z)$, $f_j'^*(z)$ geben muß, die außerhalb bez. innerhalb C sich regulär analytisch verhalten und stetige den Relationen

$$f_a^* = c_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c_2 \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*,$$
$$f_a'^* = c'_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c'_2 \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*$$

genügende Randwerte auf C besitzen, wobei $\bar{\tilde{\omega}}$ den zu $\tilde{\omega}$ konjugirt komplexen Ausdruck auf C bedeutet.

Nunmehr bestimmen wir — was unseren Ausführungen auf S. 12 zufolge möglich ist — eine außerhalb C und eine innerhalb C regulär analytische Funktion $\psi_a(z)$ bez. $\psi_j(z)$, deren Randwerte

auf C stetig sind und der Relation

$$\psi_a = \frac{1}{\tilde{\omega}\bar{\tilde{\omega}}}\psi_i$$

genügen. Dann sind offenbar

$$f_a(z) = \psi_a(z) f_a^*(z), \qquad f_a'(z) = \psi_a(z) f_a'^*(z)$$

$$f_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z-p_j)^n} f_j^*(z), \quad f_j'(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z-p_j)^n} f_j'^*(z)$$

Funktionen der verlangten Art mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf C.

Wir sprechen daher den Satz aus:

Es giebt stets Funktionen $f_a(z), f_a'(z), f_j(z), f_j'(z)$ der komplexen Variabeln z, die auf der Kurve C stetige, den Relationen (29) *genügende Randwerte besitzen und die außerhalb bez. innerhalb C von regulär analytischem Charakter sind — mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb C, die für eine der Funktionen $f_j(z), f_j'(z)$ oder für beide ein Pol ist.*

Zum Schluß mache ich von dem eben bewiesenen Satze eine Anwendung auf den Beweis für die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe d. h. auf die Lösung des besonderen der Theorie der linearen Differentialgleichungen entsprungenen Riemannschen Problems[1]). Zu dem Zwecke verbinde ich die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ der linearen Differentialgleichung in der komplexen z-Ebene in dieser Folge cyklisch mittelst einer geschlossenen analytischen Kurve C: es kommt dann darauf an — wir haben der Einfachheit halber den Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Sinn —, ein Paar von Funktionen $f(z)$, $f'(z)$ zu konstruiren, die sich überall in der Ebene, insbesondere auch auf dem zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)} = z^{(m+1)}$ verlaufenden Stücke der Kurve C wie rationale Funktionen der komplexen Veränder-

---

1) Diesen Gedanken zur Lösung dieses besonderen Riemannschen Problems habe ich bereits in meinen Vorlesungen über Integralgleichungen (Wintersemester 1901/02) entwickelt; O. Kellogg hat denselben dann in einer Note („Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann" Math. Ann. Bd. 60) auszuführen gesucht. — Kürzlich hat L. Schlesinger („Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem", Journ. für Math. Bd. 130) die Kontinuitätsmethode zum Beweise für die Lösbarkeit des besonderen Riemannschen Problems herangezogen.

lichen z verhalten und nur in den zwischen $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$, $z^{(2)}$ und $z^{(3)}, \ldots, z^{(m-1)}$ und $z^{(m)}$ verlaufenden Kurvenstücken ein singuläres Verhalten zeigen, insofern ihre Werte auf der äußeren Seite dieser Kurvenstücke aus den Werten auf der inneren Seite durch lineare homogene Kombinationen mit gegebenen konstanten Koefficienten abzuleiten sind. Bezeichnen wir die Funktionen $f(z), f'(z)$ innerhalb bez. außerhalb C mit $f_j(z), f_j'(z)$ bez. $f_a(z), f_a'(z)$ und bedenken, daß die für das Kurvenstück zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)}$ geltende Forderung

$$\begin{aligned} f_a &= f_j, \\ f_a' &= f_j' \end{aligned}$$

der identischen Substitution gleich kommt, so gelangen wir zu der folgenden Aufgabe:

Man soll außerhalb der Kurve C die Funktionen $f_a(z), f_a'(z)$ und innerhalb C die Funktionen $f_j(z), f_j'(z)$ vom Charakter rationaler Funktionen derart bestimmen, daß die Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j dieser Funktionen auf C überall stetig sind und bez. für die Kurvenstücke

$$\text{zwischen } z^{(h)} \text{ und } z^{(h+1)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} f_a &= \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f_j', \\ f_a' &= \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f' \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

erfüllen, wobei

$$\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \gamma_1'^{(h)}, \gamma_2'^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gegebene Konstante mit nicht verschwindender Determinante sind. Der doppelten Schreibweise des Punktes

$$z^{(m+1)} = z^{(1)}$$

entsprechend werde noch

$$\gamma_1^{(m+1)} = \gamma_1^{(1)}, \; \gamma_2^{(m+1)} = \gamma_2^{(1)}, \; \gamma_1'^{(m+1)} = \gamma_1'^{(1)}, \; \gamma_2'^{(m+1)} = \gamma_2'^{(1)}$$

gesetzt.

Zur Lösung dieser Aufgabe setzen wir zunächst

$$\left\{\begin{aligned} f_a^* &= \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f_j' \\ f_a'^* &= \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f_j', \end{aligned}\right. \tag{39}$$

wo $f_a^*, f_a'^*$ Hülfsausdrücke in s sind, berechnen hieraus die Werte von f_j, f_j' und führen dieselben rechter Hand in (38) ein.

Die so aus (38) und (39) entstehende Substitution

$$f_a = \Gamma_1^{(h)} f_a^* + \Gamma_2^{(h)} f_a'^*$$
$$f_a' = \Gamma_1'^{(h)} f_a^* + \Gamma_2'^{(h)} f_a'^*$$

schreiben wir nun in der Form

$$(40) \quad \begin{cases} M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f_a' = \mu^{(h)}(M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^*), \\ M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f_a' = \mu'^{(h)}(M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^*), \end{cases}$$

indem wir der Kürze halber annehmen, daß die Elementarteiler der zu jener Substitution gehörigen charakteristischen Determinante demgemäß ausfallen. Bei Gebrauch von (39) werde identisch:

$$(41) \quad \begin{aligned} M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^* &= N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f_j', \\ M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^* &= N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f_j'; \end{aligned}$$

dabei bedeuten die Größen Γ, Γ', bez. M, M' bez. N, N' Konstante jedesmal mit nicht verschwindender Determinante und μ, μ' von Null verschiedene Konstante.

Nunmehr konstruiren wir in ähnlicher Weise, wie dies oben (vgl. S. 13) geschehen ist, innerhalb bez. außerhalb von C regulär analytische Hülfsfunktionen, deren Randwertquotienten auf C in den Punkten $z^{(h)}$ gewisse Unstetigkeiten aufweisen.

Zunächst bilden wir die innerhalb bez. außerhalb C regulär analytischen Funktionen

$$\varphi_j^{(h)}(z) = l(z - z^{(h)}) \text{ bez. } \varphi_a^{(h)}(z) = l\left(\frac{z - z^{(h)}}{z - p_j}\right),$$

wo p_j wiederum irgend einen innerhalb C gelegenen Punkt bedeutet. Setzen wir dann

$$\varepsilon^{(h)} = \frac{1}{2i\pi} l\mu^{(h)}, \ \varepsilon'^{(h)} = \frac{1}{2i\pi} l\mu'^{(h)},$$

wo für $l\mu^{(h)}$, $l\mu'^{(h)}$ diejenigen Werte des Logarithmus zu nehmen sind, für die — unter $\Re(\varepsilon^{(h)})$, $\Re(\varepsilon'^{(h)})$ Realteil von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ verstanden —

$$0 < \Re(\varepsilon^{(h)}) \leqq 1, \ 0 < \Re(\varepsilon'^{(h)}) \leqq 1$$

ausfällt, und bilden die Funktionen:

$$\psi_a^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)} \varphi_a^{(h)}(z)}, \quad \psi_a'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)} \varphi_a^{(h)}(z)}$$
$$\psi_j^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)} \varphi_j^{(h)}(z)}, \quad \psi_j'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)} \varphi_j^{(h)}(z)};$$

so sind die Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$ außerhalb C, die Funktionen $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ innerhalb C und sämtliche Funktionen überdies auch auf C regulär analytisch mit Ausnahme jedesmal des Punktes $z = z^{(h)}$.

Ferner bestimmen wir die ganzen rationalen Funktionen von z

$$A^{(h)}(z),\ A'^{(h)}(z),\ J^{(h)}(z),\ J'^{(h)}(z),\ (h = 1, 2, \ldots, m)$$

in der Weise, daß sie folgende Kongruenzen erfüllen:

$$(42)\qquad \left.\begin{aligned} A^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ A^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ A'^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ A'^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ J^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ J^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ J'^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ J'^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \ldots, m \\ h \neq k \end{pmatrix}$$

und setzen dann der Kürze halber

$$(43)\qquad \begin{aligned} M_1(z) &= A^{(1)}(z) M_1^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z) M_1^{(m)}, \\ M_2(z) &= A^{(1)}(z) M_2^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z) M_2^{(m)}, \\ M_1'(z) &= A^{(1)}(z) M_1'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z) M_1'^{(m)}, \\ M_2'(z) &= A^{(1)}(z) M_2'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z) M_2'^{(m)}, \\ \psi_a(z) &= A^{(1)}(z) \psi_a^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z) \psi_a^{(m)}(z), \\ \psi_a'(z) &= A^{(1)}(z) \psi_a'^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z) \psi_a'^{(m)}(z), \\ N_1(z) &= J^{(1)}(z)\, N_1^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z) N_1^{(m)}, \\ N_2(z) &= J^{(1)}(z)\, N_2^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z) N_2^{(m)}, \\ N_1'(z) &= J^{(1)}(z)\, N_1'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z) N_1'^{(m)}, \\ N_2'(z) &= J^{(1)}(z)\, N_2'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z) N_2'^{(m)}, \\ \psi_j(z) &= J^{(1)}(z) \psi_j^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z) \psi_j^{(m)}(z), \\ \psi_j'(z) &= J^{(1)}(z) \psi_j'^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z) \psi_j'^{(m)}(z). \end{aligned}$$

Endlich denken wir uns nötigenfalls die Kurve C ein wenig variirt derart, daß auf der variirten Kurve — die wiederum analytisch sei, die Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ enthalte und auch kurz mit C bezeichnet werde — die Funktionen

$$\psi_j(z),\ \psi_j'(z),\ \psi_a(z),\ \psi_a'(z),\ M_1(z) M_2'(z) - M_2(z) M_1'(z),\ N_1(z) N_2'(z) - N_2(z) N_1'(z)$$

überall mit etwaiger Ausnahme dieser Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ von Null verschieden ausfallen.

Bezeichnen wir dann mit $s^{(h)}$ den zu $z^{(h)}$ gehörigen Wert der Bogenlänge s, so gelten wie oben (vgl. S. 13 und 14) auf C in genügender Nähe von $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$(44)\quad \begin{cases} \varphi_j^{(h)} = -i\pi + l(s-s^{(h)}) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s-s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\varphi_j^{(h)}} = l(s^{(h)}-s) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s-s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}), \\ \varphi_a^{(h)} = i\pi + l(s-s^{(h)}) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s-s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\varphi_a^{(h)}} = l(s^{(h)}-s) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s-s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}), \end{cases}$$

wo $l(s-s^{(h)})$, $l(s^{(h)}-s)$ die reellen Logarithmen und $J_0^{(h)}, J_1^{(h)}, \ldots$ $A_0^{(h)}, A_1^{(h)}, \ldots$ gewisse komplexe Koefficienten bedeuten.

Bezeichnen wir die Randwerte der Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$, $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ auf C bez. mit $\psi_a^{(h)}, \psi_a'^{(h)}, \psi_j^{(h)}, \psi_j'^{(h)}$, so gelten demnach auf C in genügender Nähe des Punktes $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$(45)\quad \begin{cases} \psi_j^{(h)} = e^{-\frac{1}{2} l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s-s^{(h)})} \mathfrak{P}_j^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\psi_j^{(h)}} = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)}-s)} \mathfrak{P}_j^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\ \psi_j'^{(h)} = e^{-\frac{1}{2} l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s-s^{(h)})} \mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\psi_j'^{(h)}} = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)}-s)} \mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\ \psi_a^{(h)} = e^{\frac{1}{2} l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s-s^{(h)})} \mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\psi_a^{(h)}} = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)}-s)} \mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\ \psi_a'^{(h)} = e^{\frac{1}{2} l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s-s^{(h)})} \mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \phantom{\psi_a'^{(h)}} = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)}-s)} \mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_j^{(h)}, \mathfrak{P}_j'^{(h)}, \mathfrak{P}_a^{(h)}, \mathfrak{P}_a'^{(h)}$ reguläre nach Potenzen von $s-s^{(h)}$ fortschreitende, für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind.

Wenden wir uns nach diesen Vorbereitungen zu der ursprünglich vorgelegten Aufgabe zurück und führen statt der gesuchten Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ die Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$ vermöge der Gleichungen

$$(48)\quad \begin{aligned} M_1(z) f_a(z) + M_2(z) f_a'(z) &= \psi_a(z)\, g_a(z) \\ M_1'(z) f_a(z) + M_2'(z) f_a'(z) &= \psi_a'(z)\, g_a'(z) \end{aligned}$$

und statt der gesuchten Funktionen $f_j(z)$, $f'_j(z)$ die Funktionen $g_j(z)$, $g'_j(z)$ vermöge der Gleichungen

$$(49)\qquad \begin{aligned} N_1(z)f_j(z)+N_2(z)f'_j(z) &= \psi_j(z)g_j(z),\\ N'_1(z)f_j(z)+N'_2(z)f'_j(z) &= \psi'_j(z)g'_j(z) \end{aligned}$$

ein, so geht die ursprünglich vorgelegte Aufgabe in die Aufgabe über, die Funktionen $g_a(z)$, $g'_a(z)$, $g_j(z)$, $g'_j(z)$ außerhalb bez. innerhalb der Kurve C vom Charakter rationaler Funktionen derart zu bestimmen, daß ihre Randwerte g_a, g'_a, g_j, g'_j auf C die Relationen

$$(50)\qquad \begin{aligned} g_a &= c_1 g_j + c_2 g'_j,\\ g'_a &= c'_1 g_j + c'_2 g'_j \end{aligned}$$

erfüllen, wobei die Koefficienten c_1, c_2, c'_1, c'_2 gewisse endliche Ausdrücke in s mit von Null verschiedener Determinante sind, die leicht aus (38) vermittelst (48) und (49) berechnet werden können.

Zur Lösung dieser letzteren Aufgabe können wir unseren oben auf S. 24 abgeleiteten Satz anwenden, da die Koefficienten c_1, c_2, c'_1, c'_2 zweimal stetig differenzirbare Ausdrücke in s werden. Den Nachweis hierfür erbringen wir, wie folgt.

Da die Kurve C als analytisch angenommen war, so erhalten wir die Punkte auf C in der Umgebung von $z = z^{(h)}$ durch die Formel

$$z(s) = z^{(h)} + C_1(s-s^{(h)}) + C_2(s-s^{(h)})^2 + \cdots$$

dargestellt, wo rechter Hand eine reguläre nach Potenzen von $s-s^{(h)}$ fortschreitende Reihe steht. Die Kongruenzen (42) werden demnach, wenn wir die Variable z in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf C wandern lassen, unmittelbar in Kongruenzen für die entsprechenden Randwerte nach dem Modul $(s-s^{(h)})^4$ übergehen.

Wir erweitern noch den Begriff der Kongruenz auf allgemeinere Ausdrücke S_1, S_2 in s, indem wir, wenn in einer Formel

$$S_1 - S_2 = (s-s^{(h)})^e\,\mathfrak{P} + (s-s^{(h)})^{e'}\,\mathfrak{P}'$$

beide Exponenten e, e' Realteile $\geqq 3$ bez. $\geqq 4$ besitzen und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ reguläre Potenzreihen in $s-s^{(h)}$ sind, ebenfalls

$$S_1 \equiv S_2,\ (s-s^{(h)})^3$$

bez.

$$S_1 \equiv S_2,\ (s-s^{(h)})^4$$

schreiben.

Alsdann folgt aus (48), wenn wir die Variable z in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf C wandern lassen, mit Rücksicht auf die Kongruenzen (42) und (43):

$$
(51) \qquad
\begin{aligned}
M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f'_a &\equiv \psi_a^{(h)} g_a, \qquad (s - s^{(h)})^4 \\
M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f'_a &\equiv \psi_a'^{(h)} g'_a, \qquad (s - s^{(h)})^4.
\end{aligned}
$$

Andererseits folgt aus (49) mit Rücksicht auf (42) und (43):

$$
\begin{aligned}
N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f'_j &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4 \\
N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f'_j &\equiv \psi_j'^{(h)} g'_j, \qquad (s - s^{(h)})^4
\end{aligned}
$$

und hieraus ergiebt sich wegen (41)

$$
(52) \qquad
\begin{aligned}
M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4 \\
M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j'^{(h)} g'_j, \qquad (s - s^{(h)})^4.
\end{aligned}
$$

Nunmehr unterscheiden wir die beiden Fälle, ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt. Im *ersteren* Falle liefert (38) die Relationen

$$
\begin{aligned}
f_a &= \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f'_j, \\
f'_a &= \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f'_j,
\end{aligned}
$$

d. h. mit Benutzung der Hülfsausdrücke (39)

$$
\begin{aligned}
f_a &= f_a^*, \\
f'_a &= f_a'^*
\end{aligned}
$$

und folglich ergeben (51) und (52) die Kongruenzen

$$
\begin{aligned}
\psi_a^{(h)} g_a &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4 \\
\psi_a'^{(h)} g'_a &\equiv \psi_j'^{(h)} g'_j, \qquad (s - s^{(h)})^4
\end{aligned}
$$

und wenn wir hier die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$ bei $s < s^{(h)}$ aus (45) berücksichtigen und bedenken, daß die Realteile der Exponenten von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen

$$
(53) \qquad
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{P}_a^{(h)} g_a &\equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^2, \\
\mathfrak{P}_a'^{(h)} g'_a &\equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g'_j, \qquad (s - s^{(h)})^2
\end{aligned}
\right\} \; s < s^{(h)}.
$$

Ferner, im *zweiten* Falle $s > s^{(h)}$, liefert (38) die Relationen

$$
\begin{aligned}
f_a &= \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f'_j, \\
f'_a &= \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f';
\end{aligned}
$$

dies sind mit Benutzung der Hülfsausdrücke (39) die Formeln (40) und folglich ergeben jetzt (51) und (52) die Kongruenzen

$$\psi_a^{(h)} g_a \equiv \mu^{(h)} \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4,$$

$$\psi_a'^{(h)} g_a' \equiv \mu'^{(h)} \psi_j'^{(h)} g_j', \qquad (s - s^{(h)})^4.$$

Berücksichtigen wir hierin die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$ bei $s > s^{(h)}$ aus (45) und bedenken wir, daß die Realteile der Exponenten $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen, so wird bei Forthebung von $\mu^{(h)}$, $\mu'^{(h)}$ wiederum

$$(54) \qquad \left.\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_a^{(h)} g_a \equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, & (s - s^{(h)})^2, \\ \mathfrak{P}_a'^{(h)} g_a' \equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g_j', & (s - s^{(h)})^2 \end{array}\right\} s > s^{(h)}.$$

Da $\mathfrak{P}_j^{(h)}$, $\mathfrak{P}_j'^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a'^{(h)}$ reguläre nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende und überdies für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind, so erkennen wir aus (53) und (54), daß gleichviel ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt, die Kongruenzen

$$g_a \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_a^{(h)}} g_j, \quad (s - s^{(h)})^2$$

$$g_a' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_a'^{(h)}} g_j', \quad (s - s^{(h)})^2$$

gelten müssen. Durch Vergleichung dieser Kongruenzen mit der Substitution (50) folgen für die Koefficienten dieser Substitution die Kongruenzen

$$c_1 \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_a^{(h)}}, \quad c_2 \equiv 0, \quad (s - s^{(h)})^2,$$

$$c_1' \equiv 0 \qquad c_2' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_a'^{(h)}}, \quad (s - s^{(h)})^2,$$

und diese zeigen, daß die Ausdrücke c_1, c_2, c_1', c_2' beim Durchgang durch den Punkt $s = s^{(h)}$ gewiß zweimal stetig differenzirbare Funktionen sind.

Damit haben wir unsere Behauptung, wonach c_1, c_2, c_1', c_2' in (50) zweimal stetig differenzirbar in s sind, als richtig erkannt und *zugleich das besondere Riemannsche Problem der Auffindung von Funktionensystemen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe vollständig gelöst.*

Die Methode der Integralgleichungen ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten Funktionen mit den Funktionswerten auf der Randkurve in linearer Weise verknüpft auftreten. Durch Behandlung solcher Aufgaben wird, wie mir scheint, der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln ein neues dankbares Kapitel hinzugefügt.

Zur Entstehung der Salzlager Nordwest-Deutschlands.

Von

A. von Koenen.

Eingereicht am 5. August 1905.

Die Entstehung von Steinsalzlagern wurde schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts von englischen Geologen wie Hugh Miller und Lyell durch die Verdunstung von Meereswasser in Becken erklärt, welche von dem Ocean durch Untiefen oder Barren getrennt waren, so daß wohl das verdunstete Wasser durch Zufluß vom Meerwasser ersetzt werden konnte, das entsprechend salzreichere Wasser aber nicht in einem Gegenstrom auf dem Meeresgrunde abfließen konnte.

Diese Annahme gab eine befriedigende Erklärung namentlich auch für die Zusammensetzung der Salzlager, welche in den letzten 40 Jahren in so großer Ausdehnung im nordwestlichen Deutschland aufgeschlossen worden sind. Die Anhydritstreifen, die sogenannten Jahresringe in dem unteren Haupt-Steinsalzlager und die kleinen Anhydritkrystalle darin entsprechen je einer neuen Zufuhr von Meerwasser, aus welchem zunächst $CaSO^4$ ausgeschieden wurde und dann Chlornatrium. Wenn dann bei fortschreitender Erhöhung der Barre das Meerwasser immer spärlicher und seltener hinüber gelangte, etwa bei Spring- oder gar Sturm-Fluten, so krystallisirte so ziemlich das gesammte Chlornatrium aus und dann die leichter löslichen Salze, wie die sogenannten Abraumsalze der Staßfurter Gegend, welche von Bischof in Salze der Kieserit-, Polyhalit- und Carnallit-Region getheilt wurden.

Eine solche Gliederung ist nun freilich weiter westlich und südlich nicht ausführbar, und Zimmermann (Zeitschr. d. deutsch.

geol. Ges. 1904, Protokolle S. 47.) unterschied daher verschiedene Facies von Kalisalzlagern, indem er zugleich die sehr interessante Beobachtung mittheilte, daß er in dem Salzton über den Kalisalzen bei Querfurt und Speremberg Zechsteinfossilien (Gervillia, Liebea, Schizodus) gefunden hätte, so daß der Salzton als Vertreter des obersten Zechsteins, des sogenannten Platten-Dolomits Thüringens anzusehen sein dürfte, welcher ja stellenweise dieselben Fossilien enthält und ebenfalls über den Kalisalzen liegt.

Ueber dem Salzthon, beziehungsweise dem Plattendolomit, folgt dann gewöhnlich das „jüngere Steinsalz", welchem die Anhydritlagen und Krystalle fehlen, so daß es bis über 99 % Chlornatrium enthält. Das Fehlen des Anhydrits darin hatte ich ursprünglich geglaubt (ähnlich wie Precht und Pfeiffer) dadurch erklären zu sollen, dass neuerdings hinzutretendes Meerwasser zunächst bereits ausgeschiedene Salze, gleichviel ob Steinsalz oder Abraumsalze, bis zu seiner Sättigung aufgelöst und dafür Anhydrit ausgeschieden hätte, so daß es bei weiterem Eintritt in das Becken nur Steinsalz geliefert hätte. Später bin ich aber zu der Annahme gelangt, daß das Meerwasser auf seinem Wege über die Barre und durch den Anfang des Beckens schon so weit verdunstet sein dürfte, daß es seinen Gehalt an $CaSO^4$ fallen ließ und daher in dem Haupttheile des Beckens im Wesentlichen nur Chlornatrium absetzte. Hierdurch wäre dann auch eine Erklärung dafür gegeben, daß in dem jüngeren Steinsalz lokal auch Kalisalze auftreten.

Was nun die Grenzen des Beckens betrifft und die Richtung, aus welcher das Meerwasser hineinströmte, so ist festzuhalten, daß im Westen, am Rande des rheinisch-westfälischen Schiefergebirges, vielfach an Stelle von Zechsteinletten und Gyps zwischen den Kalk- und Dolomithorizonten des Zechsteins Konglomerate auftreten und auch wohl Deltabildungen, so sei Frankenberg, wie dies schon vor 25 Jahren Holzapfel in seiner Dissertation „über die Zechsteinformation am Ostrande des rheinisch-westfälischen Schiefergebirges" nachgewiesen hat, so daß hier also Flachwasserbildungen schon aus der Nähe des Ufers des Zechstein-Meeres liegen. Im Osten scheint der Frankenwald und das Erzgebirge einen Theil der Grenze des Beckens gebildet zu haben, so daß dieses im Norden oder im Süden mit dem offenen Meere zusammen gehangen haben müßte.

Ich habe nun früher gelegentlich hervorgehoben, daß das Gesteinmaterial des Buntsandstein, namentlich die gewaltigen Massen von Quarzkrystallen und Quarzkörnern füglich nur von Süden her in flachem Wasser nach Norddeutschland transportirt

worden seien, da im Süden, im Elsaß etc. grobe Konglomerate darin aufträten, nach Norden aber die Gesteine immer feinkörniger würden, Milchquarzgerölle in der Gegend von Cassel fast ganz verschwänden und selbst im Bausandstein im nördlichen Solling und am Harzrande grobkörnige Sandsteine kaum mehr auftreten; auch der untere Buntsandstein ist aber in der Gegend von Fulda und Meiningen recht dickbankig und besteht aus deutlich erkennbaren, in der Sonne glitzernden Quarzkrystallen, während weiter nach Norden außer Rogensteinen nur dünnschichtige, sehr feinkörnige resp. tonige Gesteine darin auftreten.

Es wäre hiernach eine gewisse Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß das Salzbecken des oberen Zechsteins ebenfalls seinen Zufluß eher von Süden, als von Norden erhalten hätte.

Zimmermann hatte nun, wie oben bemerkt, den Staßfurter Typus der Kalisalzlager von dem südlichen im Werragebiet und in Hessen unterschieden, weil hier unter den mächtigen Plattendolomiten „mehrere gering-mächtige Kalilager innerhalb des Steinsalzlagers“ auftreten, welches von dem Dolomiten durch Letten, Anhydrit und Salzthon getrennt wird. Ein anderer Unterschied liegt aber auch in der Zusammensetzung der Salzlager.

Wie schon seit längeren Jahren von Precht, dem besten Kenner der Kalisalzlager ausgeführt worden ist, bestehen die mächtigen Kalisalzlager der Gegend von Staßfurt-Aschersleben sowie die übrigen, weiter westlich und nördlich (Jessenitz in Mecklenburg) bekannten im Wesentlichen aus Carnallit ($KCl, MgCl^2\ 6H^2O$) etc. und anderen, aus diesem, sowie aus Polyhalit und Kieserit durch Zersetzung bei Wasseraufnahme, Wechselzersetzung etc. entstandenen „sekundären“ Salzen, Kainit, Sylvin etc., welche oft innig gemengt sind und als „Hartsalz“ bezeichnet werden. (Die Umwandlung wurde zuletzt behandelt von Leo Loewe „über sekundäre Mineralbildung auf Kalisalzlagerstätten“. Dissertation Leipzig; Berlin 1903.)

In Thüringen und Hessen bestehen dagegen die dünnen, mit Steinsalz wechselnden Kalisalzlager vorwiegend aus Sylvin (KCl), und es scheint nach Norden ein Uebergang in die Staßfurter Facies zu erfolgen. Freilich ist es in manchen Fällen sehr mißlich, ein Urteil über die Sachlage aus dem Ergebnis von Bohrlöchern zu gewinnen, oft auch recht schwierig, zuverlässige Angaben über die Kalisalzlager einzelner Werke zu erhalten und namentlich auch die primären Salzmassen von den sekundären zu unterscheiden.

Ich glaubte aber gleich Anderen, daß die thüringischen, mit Chlornatriumlagen wechselnden Sylvinlager primäre seien, zumal da es schwer zu erklären wäre, wie so flach geneigte, ungestörte Lager auf große Entfernungen hin eine Umwandlung durch Wasserzutritt hätten erleiden können, und es würde sich hiernach ergeben, daß die zuströmenden Salzlösungen im Süden Sylvin, im Norden später Carnallit ausgeschieden hätten, also von Süden gekommen wären. Hiefür spricht auch jedenfalls der erwähnte Wechsel von dünnen Kalisalz- und Steinsalz-Lagern; die letzteren mußten gebildet werden, sobald das zutretende, nach Norden laufende Wasser zeitweilig noch Chlornatrium enthielt.

Herr Precht teilte mir aber während des Druckes dieses Aufsatzes freundlichst mit, daß er unbedingt auch die thüringischen Hartsalze für sekundäre Bildungen hielte aus guten Gründen, welche er mir auch brieflich angab. Es werden daher noch weitergehende Untersuchungen in der von mir angedeuteten Richtung erforderlich sein, namentlich auch mit sorgfältiger Benutzung der Ergebnisse der bahnbrechenden Untersuchungen Van't Hoff's.

Bestimmung aller Curven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen.

Von

Paul Stäckel in Hannover.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 8. Juli 1905.

1.

Bedeuten x, y, z rechtwinklige cartesische Coordinaten, so läßt sich eine jede Translationsfläche durch die Gleichungen darstellen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \int f(u)\,du + \int k(v)\,dv, \\ y = \int g(u)\,du + \int l(v)\,dv, \\ z = \int h(u)\,du + \int m(v)\,dv; \end{cases}$$

sie wird erzeugt durch Translation sowohl der Curve C_1 mit den Coordinaten:

$$(\mathrm{C}_1)\quad x_1 = \int f(u)\,du, \quad y_1 = \int g(u)\,du, \quad z_1 = \int h(u)\,du,$$

als auch der Curve C_2 mit den Coordinaten:

$$(\mathrm{C}_2)\quad x_2 = \int k(v)\,dv, \quad y_2 = \int l(v)\,dv, \quad z_2 = \int m(v)\,dv.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt, wenn die Zeichen E, F, G; D, D', D'' die von Gauß festgesetzte Bedeutung haben:

$$(2)\qquad \begin{cases} E = f^2 + g^2 + h^2, \\ F = fk + gl + hm, \\ G = k^2 + l^2 + m^2 \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} D = (hg' - gh')k + (fh' - hf')l + (gf' - fg')m, \\ D' = 0, \\ D'' = -f(ml' - lm') - g(km' - mk') - h(lk' - kl'), \end{cases}$$

wo f', g', h' die Ableitungen von f, g, h nach u und k', l', m' die Ableitungen von k, l, m nach v bezeichnen.

Damit die mittlere Krümmung einer Fläche verschwindet, muß

$$ED'' - 2FD' + GD = 0$$

sein. Sollen also die Gleichungen (1) eine **Minimalfläche** darstellen, so muß die Gleichung:

$$ED'' + GD = 0 \tag{4}$$

bestehen. Sie ist erfüllt, wenn

$$E = 0, \quad G = 0$$

gesetzt wird. Die erzeugenden Curven C_1 und C_2 haben dann ein **verschwindendes Bogenelement**; es ist bekannt, daß man auf diese Weise zu **allen** Minimalflächen gelangt. Wenn nur E bez. G verschwindet, so muß nach (4) D bez. D'' verschwinden, die Fläche ist also eine **Ebene**. Wird daher der triviale Fall der Ebene ausgeschlossen, so **sind diejenigen Minimalflächen, die nicht nur durch Translation von Minimalcurven, sondern auch durch Translation von Curven mit nicht verschwindendem Bogenelement erzeugt werden können, characterisiert durch die Functionalgleichung**:

$$\text{(A)} \begin{cases} 0 = \dfrac{hg' - gh'}{f^2 + g^2 + h^2} \cdot k + \dfrac{fh' - hf'}{f^2 + g^2 + h^2} \cdot l + \dfrac{gf' - fg'}{f^2 + g^2 + h^2} \cdot m \\ \quad - f \cdot \dfrac{ml' - lm'}{k^2 + l^2 + m^2} - g \cdot \dfrac{km' - mk'}{k^2 + l^2 + m^2} - h \cdot \dfrac{lk' - kl'}{k^2 + l^2 + m^2}, \end{cases}$$

deren vollständige Lösung hier entwickelt werden soll.

2.

Die Gleichung (A), aus der die Functionen f, g, h von u und k, l, m von v zu bestimmen sind, gehört zu den Functionalgleichungen der Form

$$\text{(F)} \qquad \varphi_1(u)\chi_1(v) + \varphi_2(u)\chi_2(v) + \cdots + \varphi_n(u)\chi_n(v) = 0,$$

die in der Theorie der krummen Flächen nicht selten auftreten. Bei der Lösung von (F) hat man $n+1$ Fälle zu unterscheiden, je nachdem man annimmt, daß das System der Functionen

$$\varphi_1(u), \ \varphi_2(u), \ \cdots, \ \varphi_n(u)$$

0-, 1-, ... $(n-1)$-, n-gliedrig ist, d. h. je nachdem zwischen diesen n Functionen genau n, $n-1$, ..., 1,0 von einander unabhängige,

lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten bestehen. Aus bekannten Sätzen über lineare homogene Functionen folgt, daß die Functionen eines r-gliedrigen Systems sich darstellen lassen in der Gestalt:

$$(\mathrm{P}) \quad \varphi_\nu(u) = s_{\nu 1} p_1(u) + s_{\nu 2} p_2(u) + \cdots + s_{\nu r} p_r(u) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo 1) die Functionen $p_1(u), \ldots, p_r(u)$ ein r-gliedriges System bilden und 2) von den Determinanten r-ter Ordnung, die aus je r Zeilen der Matrix der rn Constanten $s_{11}, \ldots, s_{nr}$ gebildet werden können, mindestens eine von Null verschieden ist. Umgekehrt ist jedes System von Functionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$, die sich in der Gestalt (P) darstellen lassen, und zwar so, daß die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind, genau r-gliedrig.

Wenn in (F) das System der Functionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ r-gliedrig ist, so folgt daraus vermöge der Darstellung (P):

$$[s_{11}\chi_1(v) + \cdots + s_{n1}\chi_n(v)] p_1(u) + \cdots + [s_{1r}\chi_1(v) + \cdots + s_{nr}\chi_n(v)] p_r(u) = 0,$$

und hieraus ergeben sich wegen der Bedingung 1) die r Gleichungen:

$$s_{1\varrho}\chi_1(v) + s_{2\varrho}\chi_2(u) + \cdots + s_{n\varrho}\chi_n(v) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

die wegen der Bedingung 2) r von einander unabhängige, lineare homogene Relationen zwischen den n Functionen $\chi_1(v), \ldots, \chi_n(v)$ sind. Mithin ist das System dieser Functionen höchstens $(n-r)$-gliedrig. Da aber die $(n-r)$-gliedrigen Systeme die weniger gliedrigen als Ausartungen in sich enthalten, so genügt man, sobald die Functionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ ein r-gliedriges System bilden, der Functionalgleichung (F) in allgemeinster Weise, indem $\chi_1(v), \ldots, \chi_n(v)$ als beliebige lineare homogene Functionen von irgend welchen $n-r$ Functionen $q_1(v), \ldots, q_{n-r}(v)$ angesetzt werden[1]).

In der Functionalgleichung (A) wird $n = 6$ und

$$\varphi_1 = \frac{hg' - gh'}{f^2 + g^2 + h^2}, \quad \varphi_2 = \frac{fh' - hf'}{f^2 + g^2 + h^2}, \quad \varphi_3 = \frac{gf' - fg'}{f^2 + g^2 + h^2},$$

$$\varphi_4 = f, \quad \varphi_5 = g, \quad \varphi_6 = h;$$

$$\chi_1 = k, \quad \chi_2 = l, \quad \chi_3 = m,$$

$$\chi_4 = -\frac{lm' - ml'}{k^2 + l^2 + m^2}, \quad \chi_5 = -\frac{km' - mk'}{k^2 + l^2 + m^2}, \quad \chi_6 = -\frac{lk' - kl'}{k^2 + l^2 + m^2}.$$

1) Vergl. auch J. A. Serret, Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, Journ. de math. (1) 8 (1843) S. 116, G. Darboux, Leçons sur la théorie générale de surfaces, t. I. Paris 1887, S. 129, G. Vivanti, Sulla determinazione di quattro funzioni medianti un' equazione unica, Rend. Circ. mat. Palermo 6 (1892) S. 100—108 und F. Probst, Ueber Flächen mit isogonalen Systemen von geodätischen Kreisen, Dissertation, Würzburg 1893.

Das System der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$ kann 0-, 1-, ..., 5-, 6-gliedrig sein; dann ist das System der Functionen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_6$ bez. höchstens 6-, 5-, ..., 1-, 0-gliedrig. Da aber die Gleichung (A) ihre Form behält, wenn u und v mit einander vertauscht werden, und dasselbe von den Gleichungen (1) gilt, so genügt es anzunehmen, daß das System der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ 0-, 1-, 2-, 3-gliedrig sei. Ist es 0-, 1-, 2-gliedrig, so besteht zwischen f, g, h mindestens eine homogene lineare Relation, die Curve C_1 ist daher eben. Dasselbe findet statt, wenn zwar das System der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ 3-gliedrig, das System der f, g, h aber 0-, 1-, 2-gliedrig ausfällt. Ist jedoch auch das System der f, g, h 3-gliedrig, so ist C_1 eine eigentliche Raumcurve. Es erweist sich als zweckmäßig, den Fall einer ebenen Curve C_1 zuerst für sich zu erledigen und darauf den Fall zu betrachten, daß C_1 eine eigentliche Raumcurve ist.

3.

Liegt die Curve C_1 in einer Ebene, so lasse man die y-Achse in diese Ebene fallen. Die Gleichung der Ebene hat dann die Form

$$\sin\alpha . x - \cos\alpha . z = 0,$$

man darf daher von vorn herein

$$f(u) = \cos\alpha, \quad h(u) = \sin\alpha$$

nehmen, und erhält die Functionalgleichung

$$(\mathrm{A}^*)\left\{\begin{aligned} 0 = &\frac{g'}{1+g^2}\cdot(\sin\alpha . k - \cos\alpha . m) \\ &- \frac{\cos\alpha(ml' - lm')}{k^2+l^2+m^2} - g\frac{km' - mk'}{k^2+l^2+m^2} - \frac{\sin\alpha(lk' - kl')}{k^2+l^2+m^2}. \end{aligned}\right.$$

Zu ihrer Lösung gelangt man am raschesten, wenn man sie nach u differentiiert. Hierdurch ergibt sich:

$$(5) \qquad 0 = \frac{d}{du}\frac{g}{1+g^2}\cdot(\sin\alpha . k - \cos\alpha . m) - g'\frac{km' - mk'}{k^2+l^2+m^2}.$$

Da die Ebene ausgeschlossen wurde, und mithin g' und $\sin\alpha . k - \cos\alpha . m$ von Null verschieden sind, so läßt sich diese Gleichung umformen in

$$0 = \frac{1}{g'}\frac{d}{du}\frac{g'}{1+g^2} - \frac{km' - mk'}{(\sin\alpha . k - \cos\alpha . m)(k^2+l^2+m^2)},$$

woraus

$$(6)\quad \frac{1}{g'}\frac{d}{du}\frac{g'}{1+g^2} = A, \quad \frac{km'-mk'}{(\sin\alpha\,.\,k-\cos\alpha\,.\,m)(k^2+l^2+m^2)} = A$$

folgt; A bedeutet eine Constante.

Ist $A = 0$, so ist auch die Curve C_2 eben. Ist A von Null verschieden, so wird nach (6), wenn B eine neue Constante bedeutet:

$$\frac{g'}{1+g^2} = Ag + B, \qquad \sin\alpha\,.\,k - \cos\alpha\,.\,m = \frac{1}{A}\frac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2}.$$

Werden diese Ausdrücke in (A*) eingetragen, so erhält man

$$-\cos\alpha(ml'-lm') + \frac{B}{A}(km'-mk') - \sin\alpha(lk'-kl') = 0.$$

Hieraus aber läßt sich schließen, daß zwischen k, l, m eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, denn es gilt allgemein der Satz:

Sind a, b, c Constanten, die nicht alle drei verschwinden, und besteht für die Functionen $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ die Identität:

$$a[\psi(t)\chi'(t)-\chi(t)\psi'(t)] + b[\varphi(t)\psi'(t)-\psi(t)\varphi'(t)] \\ + c[\chi(t)\varphi'(t)-\varphi(t)\chi'(t)] = 0,$$

so sind $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ durch eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten verbunden.

Da zwischen k, l, m eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, ist die Curve C_2, auch wenn A nicht verschwindet, eben. Man darf daher die Schnittlinie der Ebenen von C_1 und C_2 zur y-Achse machen und von vorn herein

$$k = \cos\beta, \quad m = \sin\beta$$

setzen. Dann aber wird nach (6) $A = 0$, mithin

$$g(u) = tg(Bu + C)$$

und nach (A*):

$$l(v) = tg(Bv + D);$$

C und D bedeuten neue Constanten, die jedoch unbeschadet der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden dürfen.

Damit ist für diejenigen Minimalflächen, die sich durch Translation einer ebenen Curve von nicht verschwindendem Bogenelemente erzeugen lassen, die Darstellung gefunden:

$$x = \cos\alpha . u + \cos\beta . v$$
$$y = -\frac{1}{B}\log\cos Bu + \frac{1}{B}\log\cos Bv,$$
$$z = \sin\alpha . u + \sin\beta . v.$$

Sie läßt sich noch vereinfachen, wenn man bedenkt, daß es genügt, von den einander ähnlichen Flächen der gesuchten Gattung je einen Repräsentanten anzugeben, sodaß man x, y, z durch Bx, By, Bz ersetzen darf. Werden ferner statt u und v als Parameter $u:B$ und $v:B$ eingeführt und wird endlich die xz-Ebene unter Festhaltung der y-Achse um den Winkel $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ gedreht, so ergibt sich die Darstellung:

$$\text{(M)}\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sin\gamma . (u+v),\\ y &= -\log\cos u + \log\cos v,\\ z &= \cos\gamma . (u-v),\end{aligned}\right.$$

wo $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ist.

Die Gleichungen (M) zeigen, daß **die gefundenen Flächen die Scherkschen Minimalflächen**

$$\text{(M*)}\quad e^y = \frac{\cos(\varrho x - rz)}{\cos(\varrho x + rz)}\quad \left(\varrho = \frac{1}{2\sin\gamma},\quad r = \frac{1}{2\cos\gamma}\right)$$

und die durch Aehnlichkeitstransformationen daraus hervorgehenden Flächen sind.

4.

Ist die Curve C_1 **eine eigentliche Raumcurve**, so bilden die Functionen f, g, h ein 3-gliedriges System und dürfen daher als Functionen p_1, p_2, p_3 benutzt werden. Man hat also:

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{hg'-gh'}{f^2+g^2+h^2} &= s_{11}f + s_{12}g + s_{13}h,\\ \frac{fh'-hf'}{f^2+g^2+h^2} &= s_{21}f + s_{22}g + s_{23}h,\\ \frac{gf'-fg'}{f^2+g^2+h^2} &= s_{31}f + s_{32}g + s_{33}h.\end{aligned}\right.$$

Aus (A) folgt dann:

$$\text{(C)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{ml'-lm'}{k^2+l^2+m^2} &= s_{11}k + s_{21}l + s_{31}m,\\ \frac{km'-mk'}{k^2+l^2+m^2} &= s_{12}k + s_{22}l + s_{32}m,\\ \frac{lk'-kl'}{k^2+l^2+m^2} &= s_{13}k + s_{23}l + s_{33}m.\end{aligned}\right.$$

Bestehen die Gleichungen (B) und (C) so ist (A) identisch erfüllt. Da (B) und (C) dieselbe Structur haben, wird die Untersuchung von (B) alles liefern, was zur Lösung von (A) nötig ist.

Man erkennt leicht, daß die Determinante

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist; verschwände sie nämlich, so gäbe es drei Constanten a, b, c, sodass identisch

$$a(gh' - hg') + b(hf' - fh') + c(fg' - gf') = 0$$

ist, zwischen f, g, h bestände also eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten.

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung mache man eine orthogonale Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{aligned}$$

Ist in dem Systeme der ξ, η, ζ die Darstellung der Curve C_1:

$$\xi_1 = \int \varphi(u) du, \quad \eta_1 = \int \chi(u) du, \quad \zeta_1 = \int \psi(u) du,$$

so ergeben sich aus (B) für die Functionen $\varphi(u), \chi(u), \psi(u)$ die Gleichungen:

$$(\mathrm{B}^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\psi\chi' - \chi\psi'}{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2} &= \sigma_{11}\varphi + \sigma_{12}\chi + \sigma_{13}\psi, \\ \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2} &= \sigma_{21}\varphi + \sigma_{22}\chi + \sigma_{23}\psi, \\ \frac{\chi\varphi' - \varphi\chi'}{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2} &= \sigma_{31}\varphi + \sigma_{32}\chi + \sigma_{33}\psi, \end{aligned} \right.$$

in denen die Coefficienten $\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{33}$ folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (s_{11}\alpha_1 + s_{12}\beta_1 + s_{13}\gamma_1)\alpha_1 + (s_{21}\alpha_1 + s_{22}\beta_1 + s_{23}\gamma_1)\beta_1 \\ &\qquad + (s_{31}\alpha_1 + s_{32}\beta_1 + s_{33}\gamma_1)\gamma_1, \\ \sigma_{12} &= (s_{11}\alpha_2 + s_{12}\beta_2 + s_{13}\gamma_2)\alpha_1 + (s_{21}\alpha_2 + s_{22}\beta_2 + s_{23}\gamma_2)\beta_1 \\ &\qquad + (s_{31}\alpha_2 + s_{32}\beta_2 + s_{33}\gamma_2)\gamma_1, \\ \sigma_{13} &= (s_{11}\alpha_3 + s_{12}\beta_3 + s_{13}\gamma_3)\alpha_1 + (s_{21}\alpha_3 + s_{22}\beta_3 + s_{23}\gamma_3)\beta_1 \\ &\qquad + (s_{31}\alpha_3 + s_{32}\beta_3 + s_{33}\gamma_3)\gamma_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{21} &= (s_{11}\alpha_1 + s_{12}\beta_1 + s_{13}\gamma_1)\,\alpha_2 + (s_{21}\alpha_1 + s_{22}\beta_1 + s_{23}\gamma_1)\,\beta_2 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_1 + s_{32}\beta_1 + s_{33}\gamma_1)\,\gamma_2, \\
\sigma_{22} &= (s_{11}\alpha_2 + s_{12}\beta_2 + s_{13}\gamma_2)\,\alpha_2 + (s_{21}\alpha_2 + s_{22}\beta_2 + s_{23}\gamma_2)\,\beta_2 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_2 + s_{32}\beta_2 + s_{33}\gamma_2)\,\gamma_2, \\
\sigma_{23} &= (s_{11}\alpha_3 + s_{12}\beta_3 + s_{13}\gamma_3)\,\alpha_2 + (s_{21}\alpha_3 + s_{22}\beta_3 + s_{23}\gamma_3)\,\beta_2 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_3 + s_{32}\beta_3 + s_{33}\gamma_3)\,\gamma_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{31} &= (s_{11}\alpha_1 + s_{12}\beta_1 + s_{13}\gamma_1)\,\alpha_3 + (s_{21}\alpha_1 + s_{22}\beta_1 + s_{23}\gamma_1)\,\beta_3 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_1 + s_{32}\beta_1 + s_{33}\gamma_1)\,\gamma_3, \\
\sigma_{32} &= (s_{11}\alpha_2 + s_{12}\beta_2 + s_{13}\gamma_2)\,\alpha_3 + (s_{21}\alpha_2 + s_{22}\beta_1 + s_{23}\gamma_2)\,\beta_3 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_2 + s_{32}\beta_2 + s_{33}\gamma_2)\,\gamma_3, \\
\sigma_{33} &= (s_{11}\alpha_3 + s_{12}\beta_3 + s_{13}\gamma_3)\,\alpha_3 + (s_{21}\alpha_3 + s_{22}\beta_3 + s_{23}\gamma_3)\,\beta_3 \\
&\qquad + (s_{31}\alpha_3 + s_{32}\beta_3 + s_{33}\gamma_3)\,\gamma_3.
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0,$$

so erhält man für die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ der ξ-Achse zwei lineare homogene Gleichungen, aus denen sich, wenn die adjungierten Größen von $s_{11}, \ldots, s_{33}$ mit $S_{11}, \ldots, S_{33}$ bezeichnet werden, die Werte ergeben:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mu(S_{11}\alpha_1 + S_{12}\beta_1 + S_{13}\gamma_1), \\
\beta_1 &= \mu(S_{21}\alpha_1 + S_{22}\beta_1 + S_{23}\gamma_1), \\
\gamma_1 &= \mu(S_{31}\alpha_1 + S_{32}\beta_1 + S_{33}\gamma_1).
\end{aligned}$$

Mithin ist der Proportionalitätsfactor μ aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu S_{11} - 1 & \mu S_{12} & \mu S_{13} \\ \mu S_{21} & \mu S_{22} - 1 & \mu S_{23} \\ \mu S_{31} & \mu S_{32} & \mu S_{33} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

zu bestimmen, aus der sich, da das absolute Glied gleich -1 ist, stets von Null verschiedene Werte von μ ergeben. Da ferner der Coefficient von μ^3 gleich S^2 ist, so gibt es bei reellen Werten von $s_{11}, \ldots, s_{33}$ immer reelle Werte von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, die bewirken, daß $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$ wird.

Man darf also von vornherein annehmen, daß s_{12} und s_{13} gleich Null sind.

5.

Wenn C_1 eine eigentliche Raumcurve ist, kann man den Parameter u immer so wählen, daß $f(u) = 1$ wird. Dann treten an die Stelle der Gleichung (B) die einfacheren Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{hg' - gh'}{1 + g^2 + h^2} = s_{11},$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{h'}{1 + g^2 + h^2} = s_{21} + s_{22} g + s_{23} h,$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{-g'}{1 + g^2 + h^2} = s_{31} + s_{32} g + s_{33} h.$$

Werden sie der Reihe nach mit $1, g, h$ multipliciert und addiert, so folgt:

$$\text{(d)} \qquad 0 = s_{11} + (s_{21} + s_{22} g + s_{23} h) g + (s_{31} + s_{32} g + s_{33} h) h.$$

Die Gleichung (d) kann nicht identisch in g und h bestehen, denn alsdann wäre $s_{11} = 0$, also $S = 0$. Differentiiert man sie nach u, so ergibt sich, wenn für g' und h' die Werte aus (b) und (c) eingesetzt werden:

$$\text{(e)} \qquad \begin{aligned} 0 = {} & (s_{23} g + s_{33} h)(s_{21} + s_{22} g + s_{23} h) \\ & - (s_{22} g + s_{32} h)(s_{31} + s_{32} g + s_{33} h). \end{aligned}$$

Die Gleichung (e) ist weder eine algebraische Folge von (d) noch eine wirkliche Relation zwischen g und h, die dann Constanten sein würden, mithin muß sie identisch in g und h bestehen. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß deshalb

$$s_{21} = 0, \quad s_{31} = 0, \quad s_{23} = s_{32}$$

zu setzen ist.

Da durch die Forderung, daß s_{12} und s_{13} verschwinden sollten, nur die Lage der x-Achse festgelegt ist, steht noch eine Drehung der yz-Ebene um diese Achse frei. Setzt man dem entsprechend:

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta \cos\vartheta - \zeta \sin\vartheta, \\ z &= \eta \sin\vartheta + \zeta \cos\vartheta, \end{aligned}$$

so wird nach den Formeln in No. 4:

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{31} = 0$$

und

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = -(s_{22} - s_{33}) \sin\vartheta \cos\vartheta + s_{23}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Mithin verschwinden auch σ_{23} und σ_{32}, wenn man den Winkel ϑ aus der Gleichung

$$tg\,2\vartheta = \frac{2 s_{23}}{s_{22} - s_{33}}$$

bestimmt, was bei reellen Werten von $s_{11}, \ldots, s_{33}$ stets auf reelle Art möglich ist. Folglich gibt es mindestens ein, (bei reellen Flächen reelles) Coordinatensystem, bei dem sich das System (B) in der einfacheren Form darstellt:

$$(\mathrm{B}^*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{a}^*) & \dfrac{hg' - gh'}{1+g^2+h^2} = s_{11}, \\[2ex] (\mathrm{b}^*) & \dfrac{h'}{1+g^2+h^2} = s_{22}\,g, \\[2ex] (\mathrm{c}^*) & \dfrac{-g'}{1+g^2+h^2} = s_{33}\,h; \end{array} \right.$$

hierin sind s_{11}, s_{22}, s_{33} von Null verschiedene Constanten.

Aus (b*) und (c*) folgt die Integralgleichung

$$s_{22}\,g^2 + s_{33}\,h^2 = \text{const.}$$

Indem man aber die Gleichungen (B*) der Reihe nach mit $1, g, h$ multipliciert und addiert, erhält man

$$(\mathrm{d}^*) \qquad s_{11} + s_{22}\,g^2 + s_{33}\,h^2 = 0,$$

folglich besagt die Gleichung (a*), daß man die Gleichungen (b*) und (c*) mit der Maßgabe integrieren soll, daß die Gleichung (d*) gilt.

Wenn noch zur Abkürzung

$$-\frac{s_{11}}{s_{33}} = A, \quad -\frac{s_{22}}{s_{33}} = B$$

gesetzt wird, erhält man jetzt als **Lösung der Functionalgleichung** (A):

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = 1, \\[1ex] \displaystyle\int \frac{dg}{[1+A+(1+B)g^2]\sqrt{A+Bg^2}} = -s_{33}\,u, \\[2ex] h = \sqrt{A+Bg^2}; \\[2ex] k = 1, \\[1ex] \displaystyle\int \frac{dl}{[1+A+(1+B)l^2]\sqrt{A+Bl^2}} = -s_{33}\,v, \\[2ex] m = \sqrt{A+Bl^2}. \end{array} \right.$$

Das Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln $\sqrt{A+Bg^2}$ und $\sqrt{A+Bl^2}$ bleibt willkürlich. Da man aber das Vorzeichen von z umkehren darf, kann die erste Wurzel unbeschadet der Allgemeinheit fixiert werden; die zweite bleibt dann zweiwertig.

6.

Bei der Bestimmung von g und l aus den Gleichungen (7) bedürfen, wenn man beachtet, daß A und B von Null verschieden sind, da sonst $S = 0$ wäre, die Fälle

$$\mathrm{I}.\,A = -1, \quad \mathrm{II}.\,B = -1, \quad \mathrm{III}.\,A = B$$

einer besonderen Behandlung.

I. Ist $A = -1$, so setze man $B = c^2$. Dann wird

$$g = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u_1^2}}, \qquad h = \frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2}}$$

$$l = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}} \qquad m = \frac{\varepsilon v_1}{\sqrt{1-v_1^2}}$$

wo

$$u_1 = -s_{33}\frac{1+c^2}{c}u, \quad v_1 = -s_{33}\frac{1+c^2}{c}v$$

und ε gleich ± 1 zu setzen ist. Für

$$u_1 = \sin p, \quad v_1 = \sin q$$

folgt hieraus nach einer Aehnlichkeitstransformation:

$$\begin{aligned} x &= c(\sin p + \sin q), \\ y &= p + \varepsilon q, \\ z &= c(\cos p + \varepsilon \cos q). \end{aligned}$$

Mithin ist für $\varepsilon = +1$:

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}y$$

und für $\varepsilon = -1$:

$$\frac{z}{x} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}y.$$

In beiden Fällen findet man die geradlinige Schraubenfläche, für die sich so die beiden Darstellungen ergeben:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= c(\sin p_1 + \sin q_1), & x &= c(\cos p_2 - \cos q_2), \\ x &= p_1 + q_1, & y &= p_2 - q_2, \\ z &= c(\cos p_1 + \cos q_1); & z &= -c(\sin p_2 + \sin q_2). \end{aligned} \right.$$

II. Ist $B = -1$, so setze man $A = c^2$, dann wird ähnlich wie bei I.:

$$x = p + \varepsilon q,$$
$$y = c(\cos p + \varepsilon \cos q),$$
$$z = c(\sin p + \sin q),$$

sodaß man wieder zu der geradlinigen Schraubenfläche geführt wird. wird.

III. Ist $A = B$, so gelangt man sofort zum Fall I zurück.

Alle drei Ausnahmefälle führen somit auf **die geradlinige Schraubenfläche und die durch Aehnlichkeitstransformationen daraus hervorgehenden Flächen**, die ebenfalls geradlinige Schraubenflächen sind. Da in den Darstellungen (8) die Constante c auftritt, die in der Gleichung $\frac{x}{z} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} y$ fehlt, so läßt sich die geradlinige Schraubenfläche auf unendlich viele Arten durch Translation von Raumcurven, nämlich cylindrischen Schraubenlinien, erzeugen, und zwar gibt es, den zwei Darstellungen (8) entsprechend, zwei wesentlich verschiedene Kategorien dieser Erzeugung.

7.

Wenn man von den bereits erledigten **Ausnahmefällen** absieht, ergibt die Ausführung der Quadratur in (7):

$$\frac{1}{\sqrt{(1+A)(A-B)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A-B}{1+A}} \frac{g}{\sqrt{A+Bg^2}}\right) = -s_{33} u;$$

die entsprechende Gleichung gilt für l und v. Setzt man also

$$u_1 = -s_{33}\sqrt{(1+A)(A-B)}\,u, \quad v_1 = -s_{33}\sqrt{(1+A)(A-B)}\,v,$$

so wird

$$(9) \quad \begin{cases} g = \dfrac{\sqrt{A(1+A)}\sin u_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 u_1 - (1+A)B\sin^2 u_1}}, \\ h = \dfrac{\sqrt{A(A-B)}\cos u_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 u_1 - (1+A)B\sin^2 u_1}}; \\ l = \varepsilon \dfrac{\sqrt{A(1+A)}\sin v_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 v_1 - (1+A)B\sin^2 v_1}}, \\ m = \varepsilon \dfrac{\sqrt{A(A-B)}\cos v_1}{\sqrt{(A-B)\cos^2 v_1 - (1+A)B\sin^2 v_1}}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man für die Coordinaten x, y, z selbst die Ausdrücke:

$$x = u+v,$$

$$y = -\sqrt{\frac{1+A}{1+B}}\left[\log\frac{\sqrt{A(1+B)}\cos u+\sqrt{(A-B)\cos^2 u-(1+A)B\sin^2 u}}{\sqrt{A(1+B)}+\sqrt{A-B}}\right.$$

$$\left.+\varepsilon\log\frac{\sqrt{A(1+B)}\cos v+\sqrt{(A-B)\cos^2 v-(1+A)B\sin^2 v}}{\sqrt{A(1-B)}+\sqrt{A-B}}\right],$$

$$z = \sqrt{\frac{A-B}{1+B}}\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}}\sin u\right)+\varepsilon\arcsin\left(\sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}}\sin v\right)\right],$$

in denen u und v für u_1 und v_1 geschrieben worden ist. Wenn man noch zur Vereinfachung

$$\sqrt{\frac{1+B}{A-B}} = \operatorname{tg}\gamma, \quad \sqrt{\frac{A(1+B)}{A-B}} = \lambda$$

setzt und eine Aehnlichkeitstransformation im Verhältnis $1 : \sin\gamma$ vornimmt, ergeben sich schließlich die Gleichungen:

$$(\mathrm{S})\begin{cases} x = \sin\gamma\,.\,(u+v), \\ y = -\left[\log\left(\frac{\lambda\cos u+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}{\lambda+1}\right)+\varepsilon\log\left(\frac{\lambda\cos v+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}}{\lambda+1}\right)\right], \\ z = \cos\gamma\,.\,[\arcsin(\lambda\sin u)+\varepsilon\arcsin(\lambda\sin v)] \end{cases}$$

als Darstellung der gesuchten Translationsflächen, die zugleich Minimalflächen sind.

8.

Für $\varepsilon = -1$ wird

$$(\mathrm{S_1})\begin{cases} x = \sin\gamma\,.\,(u+v), \\ y = -[\log(\lambda\cos u+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u})-\log(\lambda\cos v-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v})], \\ z = \cos\gamma\,.\,[\arcsin(\lambda\sin u)-\arcsin(\lambda\sin v)]. \end{cases}$$

Da die Functionaldeterminante von x, y, z nach u, v, λ identisch verschwindet, fehlt λ in der Gleichung zwischen x, y, z, die sich aus $(\mathrm{S_1})$ durch Elimination von u und v ergibt. Nun erhält man für $\lambda = 1$:

$$(\mathrm{M})\qquad\begin{cases} x = \sin\gamma\,.\,(u+v), \\ y = -\log\cos u+\log\cos v, \\ z = \cos\gamma\,.\,(u-v), \end{cases}$$

durch diese Gleichungen wird aber die Scherksche Minimalfläche

$$(\mathrm{M}^*) \qquad e^y = \frac{\cos(\varrho x - r z)}{\cos(\varrho x + r z)} \left(\varrho = \frac{1}{2\sin\gamma},\ r = \frac{1}{2\cos\gamma}\right)$$

dargestellt. Man wird hieraus schließen und die directe Ausrechnung bestätigt es, daß *die Gleichungen* (S_1) *ebenfalls eine Darstellung der Scherkschen Minimalfläche liefern* oder vielmehr unendlich viele Darstellungen, da λ für die erzeugenden Curven eine wesentliche Constante ist. Mithin *läßt sich jede Scherksche Minimalfläche auf unendlich viele Arten durch Translation von eigentlichen Raumcurven erzeugen, deren Bogenelement nicht verschwindet.*

Auf Grund von Betrachtungen ganz anderer Natur hat *Sophus Lie* (*Weitere Untersuchungen über Minimalflächen*, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. IV, Kristiania 1880, S. 477—506) gezeigt, daß den Scherkschen Minimalflächen die eben angegebene Eigenschaft zukommt; freilich hat er dort nur die *Existenz* der unendlich vielen Erzeugungen nachgewiesen, während hier deren explicite *Darstellung* gegeben wurde. Wenn aber *Lie* geglaubt hat, daß mit den Scherkschen Flächen und deren Ausartungen, der geradlinigen Schraubenfläche und der Ebene, die Minimalflächen erschöpft seien, die sich durch Translation einer Curve von nicht verschwindendem Bogenelement erzeugen lassen, so hat er sich geirrt, denn die Minimalflächen, die sich aus (S) für $\varepsilon = +1$ ergeben und durch die Gleichungen:

$$(\mathrm{S}_2) \begin{cases} x = \sin\gamma \,.\, (u + v), \\ y = -\left[\log\left(\dfrac{\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}{\lambda+1}\right) + \log\left(\dfrac{\lambda\cos v + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}}{\lambda+1}\right)\right], \\ z = \cos\gamma \,.\, [\arcsin(\lambda\sin u) + \arcsin(\lambda\sin v)] \end{cases}$$

dargestellt werden, lassen sich ebenfalls durch Translation einer solchen Raumcurve erzeugen, und da die Gleichung zwischen x, y, z, die sich aus (S_2) durch Elimination von u und v ergibt, zwei wesentliche Constanten enthält, so *gibt es unzählig viele Minimalflächen* (S_2), *die keine Scherkschen Flächen sind.* *Lie* hat a. a. O. auch gezeigt, daß durch Translation *ebener* Curven, deren Bogenelement nicht verschwindet, nur die Scherkschen Minimalflächen entstehen; dieser Satz ist hier in Nr. 3 auf andere, einfachere Art bewiesen worden.

Daß jene Gleichung zwischen x, y, z zwei wesentliche Constanten erhält, läßt sich so beweisen. Kämen darin γ und λ nur

in einer Verbindung $\vartheta = \Phi(\gamma, \lambda)$ vor, so könnte man statt γ und λ zwei von einander unabhängige Functionen davon, $\vartheta = \Phi(\gamma, \lambda)$ und $\mu = \Psi(\gamma, \lambda)$, einführen, sodaß die Functionaldeterminante von x, y, z nach u, v, μ identisch verschwindet. Es ist aber

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\mu)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\gamma)}\frac{\partial\gamma}{\partial\mu} + \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\lambda)}\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}.$$

Berechnet man die rechte Seite und setzt dann $v = 0$, so erfordert das Verschwinden von $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\mu)}$, daß

$$[\lambda u + tg^2 \gamma \arcsin(\lambda \sin u)] \frac{\partial\gamma}{\partial\mu}$$

ein eindeutige Function von u mit der Periode 2π ist, folglich muß

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\mu} = 0$$

sein, sodaß nur λ selbst aus der Gleichung zwischen x, y, z wegfallen könnte. Das ist jedoch nicht der Fall, da bei (S_2) die Functionaldeterminante von x, y, z nach u, v, λ nicht identisch verschwindet.

On finite algebras.

By

Leonard Eugene Dickson of Chicago.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert am 22. Juli 1905.

§ 1. Introduction.

The primary object of this paper is a study of the independence of a set of postulates for a finite field (endliche Körper) of p^n elements, p being a prime. Such a study seems desirable on the ground of the uniqueness of the field of order p^n, the abstract Galois field $GF[p^n]$, and of its importance in the theory of groups. Just as certain non-Euclidean geometries offer more interest than others, so the algebras which obey all the postulates for a field except commutativity or associativity of multiplication are of greatest interest.

By way of illustration of my results, I cite two of the simpler finite algebras whose elements form a commutative group under addition, whose elements $\neq 0$ form a non-commutative group under multiplication, and which obey the left-hand, but not the right-hand, distributive law. If the double distributive law holds the algebra is a field (§ 6). The first[1]) has the p^2 elements (x, y), x and y integers modulo p, p being a prime > 2; addition and multiplication are defined by

$$(a, c) + (x, y) = (a + x, c + y),$$

$$(a, c) \times (x, y) = (ax + \varepsilon\nu cy, cx + \varepsilon ay),$$

1) For $p = 3$, this algebra was given by me, *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 6 (1905), p. 203, and has since been applied by Dr. Veblen to yield immediately a finite non-Pascalian geometry.

in which ν is a fixed quadratic non-residue of p, while $\varepsilon = \pm 1$ according as $a^2 - \nu c^2$ is a quadratic residue or non-residue of p; viz.,

$$\varepsilon \equiv (a^2 - \nu c^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p, \qquad \varepsilon = \left(\frac{a^2 - \nu c^2}{p}\right).$$

The second algebra has p^3 elements (x, y, z), p being a prime of the form $3l + 1$, with a similar definition of addition, while $(a, b, c) \times (x, y, z)$ equals

$$(ax + \varepsilon\nu cy + \varepsilon^2\nu bz, \qquad bx + \varepsilon ay + \varepsilon^2\nu cz, \qquad cx + \varepsilon by + \varepsilon^2 az).$$

Here ν is a fixed cubic non-residue of p, and

$$\varepsilon \equiv (a^3 + \nu b^3 + \nu^2 c^3 - 3\nu abc)^{\frac{p-1}{3}} \qquad \pmod p.$$

To obtain an algebra (finite or infinite) whose elements form a commutative group under addition, with a law of multiplication which is commutative and distributive but not associative, while the inverse operation division is always uniquely possible, we may employ a linear algebra with coördinates in an arbitrary field F not having modulus 2 and with the units 1, i, j with the multiplication-table

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	j	$b + \beta i$
j	j	$b + \beta i$	$-\beta^2 - 3bi - 2\beta j$

b and β being any marks of F such that $x^3 - \beta x - b$ is irreducible in F. In particular, when F is the $GF[p^m]$, $p > 2$, there exists such an algebra of p^{3m} elements.

The greater part of the paper is devoted to the determination of all the finite algebras of the two types just illustrated. For each type the number of elements must be a power of a prime. There exists at least one non-commutative algebra of p^n elements, having the other specified properties, if and only if $p^n - 1$ and n are not relatively prime. The determination of all such algebras for n odd is made exhaustive, subject to the complete validity of a theorem (§ 5) on the structure of abstract groups of order $p^n - 1$, a theorem checked for a very wide range of values of p and n.

It is hoped that this new type of group problem may receive consideration from other hands.

§ 2. Postulates for a field[1]).

A set of elements will be said to form a field with respect to two operations called addition and multiplication and symbolized by $+$ and $\times$, if the following 10 postulates hold:

1^{+}. For every two equal or distinct elements a and b of the set, $a+b$ is uniquely determined as an element of the set.

2^{+}. $(a+b)+c = a+(b+c)$ whenever a, b, c and all the indicated sums occur in the set.

3^{+}. There occurs in the set an element i_{+} such that $a+i_{+}=a$ for every element a of the set.

4^{+}. If such elements i_{+} occur, then for a particular i_{+} and for every element a there occurs an element a' such that $a+a' = i_{+}$.

$1^{\times}$, $2^{\times}$, $3^{\times}$. Same as 1^{+}, 2^{+}, 3^{+} with $\times$ instead of $+$.

$4^{\times}$. If such elements $i_{\times}$ occur, then for a particular $i_{\times}$ and for every element a distinct from each i_{+}, there occurs in the set an element a' such that $a \times a' = i_{\times}$.

5. $a \times (b+c) = (a \times b)+(a \times c)$ whenever a, b, c and all the indicated sums and products occur in the set.

$6^{\times}$. $a \times b = b \times a$ whenever a, b, $a \times b$, $b \times a$ occur in the set.

In view of postulates 1^{+}, 2^{+}, 3^{+}, 4^{+}, the elements form a group[2]) under addition, and there is an unique element i_{+}. By $1^{\times}$, $2^{\times}$, $3^{\times}$, $4^{\times}$, $6^{\times}$, the elements $\neq i_{+}$ form a commutative group under multiplication. It is readily shown[3]) that addition is commutative and that i_{+} has the ordinary properties of zero under multiplication (as well as addition). Since addition, multiplication, and the inverse operations subtraction and division (divisor $\neq i_{+}$) can be uniquely performed within the set, we call the set a *field*[4]).

---

1) Given in my paper „Definitions of a group and a field by independent postulates", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6 (1905), pp. 198—204. I now simplify the language by allowing the uniqueness of sum and product, postulated in 1^{+} and $1^{\times}$, to appear in the statement of the remaining postulates.

2) Ibid., p. 199. The four postulates give a desirable definition of a group.

3) Ibid., p. 202. Cf. Hilbert, *Jahresbericht des Deutschen Math.-Ver.*, vol. 8, p. 183. For proofs not using both $2^{\times}$, $6^{\times}$, see §§ 4, 7, below.

4) Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory (Teubner), 1901.

§ 3. On the independence of the postulates.

The postulates have been shown (*Transactions*, l. c.) to be independent when the distinct elements for an enumerable or a non-enumerable infinitude, or when the number of distinct elements is finite but undetermined. We here discuss their independence when there is added the postulate:

N. The number of distinct elements is p^n, where p is a fixed prime and n a fixed positive integer.

To prove that a particular postulate P is independent of all the others, we exhibit an example $[P]$ such that P fails while the others hold.

$[1^+]$. Elements e_j $(j = 0, 1, \ldots, p^n-1)$; $e_1, \ldots, e_{p^n-1}$, forming a commutative group under multiplication; $e_0 \times e = e \times e_0 = e_0$, $e + e_0 = e$, $e + e = e_0$, for every element e; $e + e'$ not in the set if $e' \neq e$, $e' \neq e_0$.

$[2^+]$. Elements $e_j\,(j = 0, 1, \ldots, p^n-1)$; $e_1, \ldots, e_{p^n-1}$ forming a commutative group under $\times$; $e_0 \times e = e \times e_0 = e_0$, $e + e_0 = e$, $e + e' = e_0$ if $e' \neq e_0$. Then $(e' + e') + e' = e_0$, $e' + (e' + e') = e'$.

$[3^+]$. p^n elements forming a commutative group under $\times$; $a + b = b$.

$[4^+]$. p^n elements forming a commutative group under $\times$; $a + b = a$.

$[1^\times]$. The Galois field of order p^n with multiplication modified so that $a \times b = ab$ if $a = 1$, $b = 1$ or $ab = 1$, otherwise $a \times b$ not in set.

$[3^\times]$. p^n elements forming a commutative group under $+$; $a \times b = i_+$.

$[4^\times]$. p^n complex numbers $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, a's modulo p; $e_1^2 = e_1$, $e_1e_j = e_je_1 = e_j$, $e_je_k = 0$ $(j,k = 2, \ldots, n)$, $n > 1$. There exists no solution a' of $e_2 \times a' = e_1$.

But for $n = 1$, postulate $4^\times$ is redundant. Were $i_\times = i_+$, then, by 5 for $c = i_+$, $a \times b = (a \times b) + a$ for every a. Hence $i_\times \neq i_+$. Now

$$(e)\quad a \times (i_\times + i_\times + \cdots \text{ to } k \text{ terms}) = a + a + \cdots \text{ to } k \text{ terms}.$$

If $a \neq i_+$, the second member can be made equal to any element by choice of k, since each operator except identity of the additive cyclic group is a generator. Hence there exists a solution a' of $a \times a' = i_\times$.

[5] Commutative group of order p^n; $a + b = a \times b = ab$.

Postulate $6^\times$ is redundant if $n = 1$, or if $n > 1$ and $p^n - 1$ and n are relatively prime; in the remaining cases, $6^\times$ is independent of the other postulates (§ 4). For example, the postulate is independent if n is a multiple of 6 or 20, with p an arbitrary prime; if n is even and $p \neq 2$; or if n is a power of a prime ν and $p \not\equiv 1 \pmod{\nu}$.

Postulate $2^\times$, associativity of multiplication, is redundant if $n = 1$ or 2. It is independent if n is any multiple of 3 and p is an arbitrary prime (§ 7), and doubtless for any $n > 2$.

To obtain a definition of the field of integers modulo p (the case $n = 1$) by a set of independent and sufficient postulates, we take $1^+, 2^+, 3^+, 4^+, 1^\times, 3^\times, 5$, and $N_{n=1}$. The system is a field, since by (e) multiplication is uniquely defined by addition. For a definition of the $GF[p^2]$, it suffices to take the independent postulates $1^+ - 4^+$, $1^\times$, $3^\times$, $4^\times$, 5, $6^\times$ if $p > 2$, and $N_{n=2}$. For the $GF[p^3]$, we must take all the postulates or all except $6^\times$, according as $p \equiv 1$ or $p \not\equiv 1 \pmod 3$.

§ 4. On algebras satisfying all the postulates for a field except commutativity of multiplication.

Postulates $1^+ - 4^+$, $1^\times - 4^\times$, and 5 are assumed to hold. By 5 for $b = c = i_+$, $e = e + e$ where $e = a \times i_+$. Hence $a \times i_+ = i_+$ for every a. Then by $2^\times$, $i_+ \times c = i_+ \times (i_+ \times c)$ for every c. If $i_+ \times c$ is not i_+ it has an inverse under multiplication, so that $i_\times = i_+$, and, by $3^\times$, $a = a \times i_\times = a \times i_+ = i_+$ for every a. Hence $i_+ \times c = i_+$ for every c. Next, if $a \times b = i_+$ and $b \neq i_+$, then $a = i_+$. Indeed, by $2^\times$, $i_+ = a \times (b \times c)$ for every c; taking c such that $b \times c = i_+$, we get $i_+ = a$. H e n c e i_+ h a s t h e o r d i n a r y p r o p e r t i e s o f z e r o u n d e r m u l t i p l i c a t i o n (a s w e l l a s a d d i t i o n).

We henceforth assume that the number of elements is finite and > 1. By 1^+ and 2^+, the sum of c elements each $i_\times$ has a definite meaning; we denote this sum by u_c. There must be an equality $u_r = u_s$, $r > s$, whence $u_{r-s} = i_+$. Let p be the least positive integer for which $u_p = i_+$. If p is composite, $p = ql$, $q > 1$, $l > 1$, then $u_q \neq i_+$, $u_l \neq i_+$. By 5, 2^+, $3^\times$, and the definition of u_c,

$$u_q \times u_l = u_q \times (i_\times + i_\times + \cdots \text{to } l \text{ terms}) = u_q + u_q + \cdots = u_{ql} = i_+,$$

contrary to the above property of a product. H e n c e p i s a p r i m e. Since

$$e + e + \cdots \text{ to } p \text{ terms.} = e \times (i_\times + i_\times + \cdots) = e \times i_+ = i_+,$$

the additive period of every element e is p. Hence the additive group is of order a power of p, say p^n.

It is next shown[1]) that addition is commutative. Since a group of order p^n contains invariant elements other than the identity, there exists an element $y \neq i_+$ such that $a + y = y + a$ for every a. Let b denote any element $\neq i_+$, and determine a' so that $a + b = b + a'$. Multiplying on the left by $y \times b^{-1}$, we get

$$\{(y \times b^{-1}) \times a\} + y = y + \{(y \times b^{-1}) \times a'\}.$$

By the property of y, we get $a = a'$.

The p^n elements may be designated $(a_1, \ldots, a_n)$, where each a_i is an integer taken modulo p. In view of the above results, addition of elements may be expressed by the formula

$$(1) \qquad (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

For the moment, denote the elements by $e_1, \ldots, e_{p^n}$. Let f be a fixed element i_+. The products $f \times e_1, \ldots, f \times e_{p^n}$ form a permutation of $e_1, \ldots, e_{p^n}$. The correspondence $f \times e_i \sim e_i$ $(i = 1, \ldots, p^n)$ defines an isomorphism[2]) of the additive group A into itself, since by 5,

$$(f \times e_i) + (f \times e_j) = f \times (e_i + e_j) \sim e_i + e_j.$$

But all the isomorphisms of A into itself form the general n-ary linear homogeneous group modulo p. Hence

$$(2) \qquad (a_1, \ldots, a_n) \times (y_1, \ldots, y_n) = (y'_1, \ldots, y'_n), \; y'_i = \sum \alpha_{ij} y_j,$$

where the α_{ij} are integers depending upon the a's alone, and

$$(3) \qquad |\alpha_{ij}| \neq 0 \pmod p \text{ unless } a_1 \equiv 0, \ldots, a_n \equiv 0 \pmod p.$$

Hence to each element $(a_1, \ldots, a_n)$, except $(0, \ldots, 0) = i_+$, corresponds an n-ary linear homogeneous substitution S_a modulo p. By $2^\times$, the product of two elements (a), (b) corresponds to the product $S_a S_b$ of the corresponding substitutions. Hence the multiplicative group of the algebra is simply isomorphic with an n-ary linear homogeneous group G_{p^n-1} modulo p. If $(a) \neq i_\times$, S_a leaves fixed no letter (y). Hence G_{p^n-1} must be a regular group on the $p^n - 1$ symbols (y). Conversely, any n-ary linear homogeneous

1) For this proof I am indebted to Mr. J. H. Maclagan-Wedderburn.

2) This property was noted by Professor E. H. Moore.

group G_{p^n-1} regular on the p^n-1 symbols (y) serves to define the law of multiplication (2) of an algebra of p^n elements satisfying postulates 1^+-4^+, $1^\times-4^\times$, 5.

For $n=1$, G_{p-1} is cyclic and the algebra is a field.

For the sequel, it will prove convenient to investigate n-tuple algebras the coördinates a_i of whose p^{nm} elements $(a_1, \ldots, a_n)$ range over the $GF[p^m]$, the above case being given by $m=1$.

The double algebras with p^{2m} elements (a_1, a_2), a's in $GF[p^m]$.

Use is made of the possible types[1]) of binary groups of determinant unity in the $GF[p^m]$ and of order prime to p; besides the cyclic group, these are defined abstractly as follows:

$D_{4k}(k>1)$: $A^{2k}=I,\ B^2=A^k,\ B^{-1}AB=A^{-1}$;

T_{24}: $A^4=I, B^2=A^2, B^{-1}AB=A^{-1}, C^3=I, C^{-1}AC=B, C^{-1}BC=AB$;

O_{48}: $A^2=I, AB=BA, AC=CA, B^3=I, C^4=A, (BC)^2=A$;

I_{120}: $A^2=I, AB=BA, AC=CA, B^3=I, C^5=I, (BC)^2=A$.

They are simply isomorphic with the homogeneous forms of the dihedron, tetrahedron octahedron, and icosahedron rotation groups.

In a binary $G_{p^{2m}-1}$, the substitutions of determinant 1 form an invariant subgroup U of index a divisor of p^m-1.

If U is cyclic, its order is p^m+1. If U is of the type D_{4k} $k>1$, then $2k$ is a multiple of $\frac{1}{2}(p^m+1)$, which does not divide p^m-1. In either case U contains an operator whose period divides p^m+1, but not p^m-1, and hence has the canonical form[2])

$$(4) \qquad S_\mu:\ X'=\mu X,\quad Y'=\mu^{p^m}Y,$$

X and Y being binary linear functions in the $GF[p^{2m}]$ conjugate with respect to the $GF[p^m]$. Each operator of $G_{p^{2m}-1}$, must transform S_μ into itself or its inverse and hence is of the form (4) or

$$(5) \qquad T_\mu:\ X'=\mu Y,\quad Y'=\mu^{p^m}X.$$

In the group of all the $2(p^{2m}-1)$ substitutions S_μ, T_μ, μ arbitrary in the $GF[p^{2m}]$, the only subgroups of order $p^{2m}-1$ are the cyclic $\{S_\mu\}$, leading to a field, and the group $\{S_\mu,\ T_\lambda S_\mu\}$, where now λ is fixed and μ ranges over half of the marks $\neq 0$ of the $GF[p^{2m}]$,

1) I have not yet published the determination, made in the Spring of 1904, of all binary groups of determinant unity in the $GF[p^m]$.

2) Linear Groups, p. 223.

necessarily its squares. If λ were a square, the group would contain T_1 which leaves $X+Y$ fixed, so that the group, when expressed on variables of the $GF[p^m]$ would not be regular. Hence $G_{p^{2m}-1}$ must be

$$(6) \qquad \{S_\mu,\ T_\varkappa S_\mu\} \qquad \begin{pmatrix}\mu \text{ arbitrary square, } \varkappa \text{ a particular}\\ \text{not-square of the } GF[p^{2m}],\ p>2.\end{pmatrix}.$$

Let ν be a particular not-square of the $GF[p^m]$, so that $\tau^2=\nu$ defines the $GF[p^{2m}]$. Then $\tau^{p^m}=-\tau$. Let $X=x+\tau y$, $\mu=a+\tau c$, where x, y, a, c belong to the $GF[p^m]$; then $Y=x+\tau^{p^m}y$. Then S_μ and T_μ become $S_{a,c}^{(1)}$ and $S_{a,c}^{(-1)}$, respectively, where

$$(7) \qquad S_{a,c}^{(\varepsilon)}:\ x'=ax+\varepsilon\nu cy,\quad y'=cx+\varepsilon ay \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Also $\mu^{p^m+1}=a^2-\nu c^2$. Thus μ is a square or not-square in the $GF[p^{2m}]$ according as $a^2-\nu c^2$ is a square or not-square in the $GF[p^m]$. Hence (6) becomes

$$(6') \qquad \{S_{a,c}^{(1)},\ a^2-\nu c^2=\text{square};\ S_{a,c}^{(-1)},\ a^2-\nu c^2=\text{not-square}\}.$$

For $m=1$, the resulting algebra is the first one of § 1; the same form is valid for any m. It follows from either (6) or (6′) that U is a cyclic C_{p^m+1} or a $D_{2(p^m+1)}$ according p^m is of the form $4l+1$ or $4l+3$.

From the preceding double algebra in the $GF[p^m]$, we readily derive a $2m$-tuple algebra modulo p. By way of illustration, we take[1]) $m=2$, $p=4l-1$, and obtain a 4-tuple algebra modulo p. The $GF[p^2]$ is then defined by $i^2\equiv -1 \pmod p$. Let

$$x=\xi_1+i\xi_2,\ y=\eta_1+i\eta_2,\ a=\alpha+iA,\ c=\gamma+iK,\ \nu=r+is.$$

The binary substitution (7) yields a substitution on $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, whose matrix is

$$\begin{pmatrix} \alpha & -A & \varepsilon(\gamma r-sK) & -\varepsilon(\gamma s+rK)\\ A & \alpha & \varepsilon(\gamma s+rK) & \varepsilon(\gamma r-sK)\\ \gamma & -K & \varepsilon\alpha & -\varepsilon A\\ K & \gamma & \varepsilon A & \varepsilon\alpha \end{pmatrix},$$

leaving invariant $x^2-\nu y^2=\Phi+i\Psi$, where

$$\Phi=\xi_1^2-\xi_2^2-r\eta_1^2+r\eta_2^2+2s\eta_1\eta_2,\quad \Psi=s\eta_2^2-s\eta_1^2+2\xi_1\xi_2-2r\eta_1\eta_2.$$

1) For $p=4l+1$, a very simple 4-tuple algebra is given by [34].

Further,

$$\varepsilon = (a^2 - \nu c^2)^{\frac{p^2-1}{2}} = (\Phi_1 + i\Psi_1)^{\frac{p^2-1}{2}} = (\Phi_1^2 + \Psi_1^2)^{\frac{p-1}{2}},$$

where Φ_1 and Ψ_1 are the same functions of α, A, γ, K that Φ and Ψ are of $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$. Hence $\varepsilon = \pm 1$ according as $\Phi_1^2 + \Psi_1^2$ is a quadratic residue or non-residue of p. Now

$$\Phi^2 + \Psi^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (r^2 + s^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + 4s(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)$$
$$+ 2r(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)^2 - 2r(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)^2.$$

Since ν is a not-square in the $GF[p^2]$, $r^2 + s^2$ is a quadratic non-residue of p. We may take $r^2 + s^2 = -1$.

For $U = T_{24}$, $(p^{2m}-1)/24$ must be an integer dividing $p^m - 1$, whence $p_1^m + 1$ must divide 24, and therefore $p^m = 5, 7, 11,$ or 23. For $U = O_{48}$, $p^m = 7, 23,$ or 47. Whether U is T_{24} or O_{48}, $G_{\frac{p^{2m}}{p-1}}$ contains an invariant D_8. For $p^m = 5$, T_{24} is at once seen to be conjugate with

$$(8) \qquad \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2b^{-1} & 3a^{-} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a, b \text{ any integers} \\ \not\equiv 0 \pmod 5 \end{matrix} \right\}.$$

This group is in regular form. It leads to the algebra

$$(9) \qquad (a,c) \times (x,y) = (ax - (1+2a^4)c^3y, \quad cx + (1+2c^4)a^3y), \quad \text{mod } 5.$$

For $p^m = 7, 11, 23,$ or 47, $p \equiv 3 \pmod 4$. Hence D_8 may be taken to be generated by $S_\varkappa$ and T_λ, where $\varkappa^2 = -1$, $\lambda^{p+1} = -1$ in the $GF[p^2]$. The only binary substitutions B in the $GF[p^2]$ on conjugate variables which transform S into itself are the S_{μ_1}; but S_{μ_1} transforms T_λ into $T_{\lambda\mu_1^{1-p}}$, which belongs to D_8 only when $\mu_1^{4(p-1)} = 1$. Hence the case $p = 47$ is excluded, since the number of substitutions transforming D_8 into itself is at most $6 . 4 . 46 < 47^2 - 1$. Every B transforming $S_\varkappa$ into $S_\varkappa - 1$ is a T_{μ_2}, which transforms T_λ into $T_{\lambda^p\mu_2^{1-p}}$, which belongs to D_8 only when $\mu_2^{4(p-1)} = \lambda^{-8}$. Every B transforming $S_\varkappa$ into $T_{\lambda\sigma}$, where $\sigma^4 = 1$, is of the form

$$(10) \qquad \Sigma_{a,\sigma}: \begin{pmatrix} a & \varkappa\lambda\sigma a^p \\ \varkappa\lambda^{-1}\sigma^{-1}a & a^p \end{pmatrix},$$

which transforms $T_{\lambda\sigma}$ into

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\varkappa(a^{p-1} + a^{-p+1}) & -\frac{1}{2}\lambda\sigma(a^{p-1} - a^{-p+1}) \\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sigma^{-1}(a^{p-1} - a^{-p+1}) & \frac{1}{2}\varkappa(a^{p-1} + a^{-p+1}) \end{pmatrix}.$$

The latter belongs to D_8 if and only if $a^{2(p-1)} = \pm 1$.

For $p = 7$, the substitutions of G_{48} are of determinants ± 1.

From $|S_{\mu_1}| = \mu_1^8 = \pm 1$, $\mu_1^{24} = 1$, follows $\mu_1^8 = +1$. Similarly, $|T_{\mu_2}| = -\mu_2^8 = 1$; $|\sum_{\alpha,\beta}| = 2a^8 = 1$. Hence all the 48 substitutions transforming D_8 into itself are of determinant $+1$. Hence $U \neq T_{24}$. The group G_{48} of the substitutions S_{μ_1}, $T_{\mu_2}, \Sigma_{\alpha,\beta}$, with $\mu_1^8 = 1$, $\mu_2^8 = -1$, $a^8 = 4$, $\sigma^4 = 1$, is seen to be of type O_{48} and in regular form. To obtain the real form of G_{48}, let $\tau^2 \equiv -1 \pmod 7$ define the $GF[7^2]$, and set $X = x + \tau y$, $Y = x - \tau y$. Then S_μ and T_μ become

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} m, & \pm n \\ n, & \mp m \end{pmatrix}, \quad m^2 + n^2 \equiv \mp 1.$$

For the third type (10), set $a = \alpha + \beta\tau$, $\lambda = 3 + 2\tau$, $\varkappa = \tau$. According as $\varkappa\sigma$ is $+1$, -1, $+\tau$ or $-\tau$, we obtain respectively

$$\begin{pmatrix} 4\alpha+2\beta, & 2\alpha-4\beta \\ 2\alpha-2\beta, & -2\alpha-2\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha-2\beta, & 2\beta-2\alpha \\ 4\beta-2\alpha, & 4\alpha+2\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\beta-\alpha, & \beta+3\alpha \\ 3\alpha-4\beta, & 3\alpha-3\beta \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3\alpha-3\beta, & 4\beta-3\alpha \\ -3\alpha-\beta, & 3\beta-\alpha \end{pmatrix},$$

each yielding 8 substitutions corresponding to the solutions of $\alpha^2+\beta^2 \equiv 4 \pmod{7}$. In the four types, we set $\alpha = -m-n$, $\beta = -m+2n$; $\alpha = 2m+n$, $\beta = m-n$; $\alpha = -2m+2n$, $\beta = 2m+3n$; $\alpha = 3m-2n$, $\beta = -2m-2n$; respectively, and obtain

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} m, & \pm\ (2m-3n) \\ n, & \mp\ (3m+2n) \end{pmatrix}, \quad m^2 - mn - n^2 = \pm 2,$$

$$(13) \qquad \begin{pmatrix} m, & \pm\ (\ 3m+2n) \\ n, & \mp\ (-2m+3n) \end{pmatrix}, \quad m^2 + 4mn - n^2 = \pm 4.$$

The conditions on (11), (12), (13) may be written, respectively[1]),

$$m^2 + n^2 \equiv \mp 1,\ (m+3n)^2 + (2n)^2 \equiv \pm 2,\ (m+2n)^2 + (3n)^2 \equiv \pm 4 \pmod 7.$$

The 48 substitutions given by (11), (12), (13) may be expressed by one formula

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} m, & -tm+qn \\ n, & r^{-1}m+tn \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} t \equiv 3r^2 - 3r^5, \\ q \equiv 4r + 4r^3 + 5r^5, \end{array}$$

---

1) For any integers a, b, not both $\equiv 0 \pmod 7$, $a^2 + b^2 \equiv \pm 1, \pm 2$, or ± 4) (mod 7).

where for each of the 6 values of $r \neq 0$ the 8 sets m, n are the solutions of

$$(15) \qquad [m+(3r^4-3)n]^2+r^2n^2 \equiv r \pmod{7},$$

thus making the determinant of (14) unity. The algebra is thus

$$(16)\,(m,n)(x.y)=(mx-3(r^3-r^5)my+4(r+r^3+3r^5)ny, nx+r^5my+3(r^3-r^5)ny).$$

For $p = 11$, T_{24} is extended to G_{120} by substitutions whose determinants are the various quadratic residues of 11. From $S_{\mu_1}|^5 = \mu_1^{60} = 1$ and $\mu_1^{40} = 1$ follows $\mu_1^{20} = 1$. Similarly, $\mu_2^{20} = -\lambda^8$, $a^{30} = -1$. The group [1]) of the resulting 120 substitutions $S_{\mu 1}$, $T_{\mu 2}$, $\Sigma_{a,\sigma}$ is seen to be regular, thus yielding an algebra.

For $p = 23$, we transform D_8 by S_ϱ and make $\lambda^8 = -1$. Then G_{p^2-1} is

$$(17) \qquad \{ S_\mu,\ T_\mu,\ \Sigma_{\mu,\sigma},\ \mu^{88} = 1,\ \sigma^4 = 1 \},$$

the three types having determinant 1 if and only if $\mu^8 = +1, -1, 13$, respectively. Hence the U of G is of type O_{48}. The group is seen to be regular, thus furnishing an algebra.

Finally, let $U = I_{120}$. Since $p^{2m}-1$ must be divisible by 120, $p^m = 10\,l \pm 1$; also $(p^{2m}-1)/120$ must divide p^m-1. Hence $p^m = 11$, 19, 29 or 59. For $p = 11$, there is a group $I_{120} = G_{p^2-1}$ with the generators

$$(18) \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

I omit the discussion of the cases 19, 29, 59, as the construction of a single formula for multiplication of such algebras would, if existent, be complicated and very artificial.

On the n-tuple algebras modulo p.

We assume first that n is odd. In view ef § 5, let K_{q^s} be an invariant subgroup of G_{p^n-1}, where q is a prime dividing p^n-1 but not p^t-1 for $t < n$. Let O_q be one of the invariant operators of period q of K. Now O_q can be given the canonical form

$$(19) \qquad S_\mu:\quad X_i' = \mu\nu^i X_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

---

1) Since S_u transforms T_λ into $T_{\lambda u}-10$, we can determine μ to make $\lambda^4 = -1$. Then the three types have determinant 1 only for $\mu_1^4 = +1$, $\mu_2^4 = -1$, $a^4 = -3$, respectively.

where $X_0, \ldots, X_{n-1}$ are linear functions in the $GF[p^n]$ conjugate with respect to the $GF[p]$. Any substitution of G commutative with O_q has the canonical form S_ϱ. Hence K is cyclic. Let it be generated by S_μ, $\mu^{q'} = 1$. In view of its multipliers, S_μ can not be transformed into S_μ^l if l is not a power of p. Any substitution in the $GF[p^n]$ which obeys the conditions for conjugate variables and which transforms S_μ into $S_\mu^{p^k}$, $k < n$, has the form

$$(20) \qquad T_{\lambda,k}:\ X_i' = \lambda^{p^i} X_{i+k} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

where $X_n = X_0$, $X_{n+1} = X_1$, etc. Now

$$(21) \qquad T_{\lambda,k}^r:\ X_i' = \lambda^{p^i(1+p^k+p^{2k}+\cdots+p^{(r-1)k})} X_{i+rk}.$$

Hence if n' is the greatest common divisor of n and k, the period of $T_{\lambda,k}$ is a multiple of n/n'. In particular, if p^n-1 and n are relatively prime, G_{p^n-1} is composed of substitutions S_ϱ only and is cyclic; the algebra is then a field. Next, let d be the number of distinct powers $S_\mu^{p^k}$, $0 < k < n$, into which S_μ can be transformed within G. Then the values of k are the multiples of n/d, and the substitutions of G commutative with S_μ are the powers of S_ϱ, ϱ a primitive root of

$$(22) \qquad \varrho^{(p^n-1)/d} = 1.$$

Hence G is generated by S_ϱ and $T_{\lambda, n/d}$, λ a fixed mark. By (21), $T_{\lambda,n/d}^d = S_\tau$, where $\tau = \lambda^t$, $t = (p^n-1)/(p^{n/d}-1)$. Since G is to be of order p^n-1, τ must satisfy (22). That this involves no condition on the mark λ of the $GF[p^n]$ follows since t is divisible by d, as shown by the following lemma with $N = p^{n/d}$.

L e m m a. I f N^d-1 i s d i v i s i b l e b y d, t h e n $\theta \equiv (N^d-1)/(N-1)$ i s d i v i s i b l e b y d.

Proof is first made for the case $d = p^\alpha$, $p =$ prime. Then $1 \equiv N^{p^\alpha} \equiv N \pmod{p}$. Hence, by induction, $N^{p^i} \equiv 1 \pmod{p^{i+1}}$, so that $M = N^{p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Now

$$\theta = \frac{M^p-1}{M-1} \cdot \frac{M-1}{N-1}.$$

The first factor $M^{p-1}+\cdots+M+1 \equiv p \pmod{p^\alpha}$. If the second factor is divisible by $p^{\alpha-1}$, the lemma follows. Hence, applying induction from $\alpha-1$ to α, the lemna is proved for $d = p^\alpha$.

Next, let $d = p^\alpha q^\beta r^\gamma \cdots = p^\alpha \delta$. Then

$$\theta = \frac{(N^\delta)^{p^\alpha}-1}{N^\delta-1} \cdot \frac{N^\delta-1}{N-1}.$$

The fitst factor is divisible by p^α by the earlier case, and the second factor is an integer. Similarly, θ is divisible by q^δ, $r^\gamma \ldots$, and hence by d.

It remains to determine the conditions under which the existing group G_{p^n-1}, generated by S_ϱ and $T_{\lambda, n/d}$, is regular. It suffices to require that, if a particular set of conjugate values of $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ remains unaltered by a substitution not the identity of G, then each $X = 0$. This is obvionsly true for S_μ, $\mu \neq 1$. The remaining substitutions of G are of the form

$$(23) \qquad T^r_{\lambda, n/d} S_\mu: \; X'_i = \mu^{p^i} \lambda^{\alpha p^i} X_{i+rn/d}, \; \alpha = \frac{p^{rn/d}-1}{p^{n/d}-1},$$

where μ is an arbitrary mark satisfying (22). Let δ be the greatest common divisor of r and d; set $r = r_1\delta$, $d = d_1\delta$. We assume that $X_i^{*\prime} = X_i^*$ is a particular set of values unaltered by (23) Now (23) replaces X_i^* by a multiple of $X_{i+rn/d}$, the latter by a multiple of $X^*_{i+2rn/d}$, etc., The smallest integer ε for which $\varepsilon rn/d$ is a multiple of n is d_1. Thus $X_i^* = \mu^{\beta p^i} \lambda^{\beta\alpha p^i} X_i^*$, where $\beta = 1 + p^{rn/d} + p^{2rn/d} + \cdots + p^{(d_1-1)rn/d}$. Hence we seek the conditions under which[1]) $\mu^{\beta p^i} \lambda^{\beta \alpha p^i} \neq 1$ for each $i = 0, 1, \ldots, \frac{n}{d_1} - 1$. By raising the general expression to the power p^{n-i}, we see that the conditions reduce to $\mu^\beta \lambda^{\beta\alpha} \neq 1$. Let $(p^n-1)/b$ be the greatest common divisor of β and p^n-1; let σ be a primitive root of the $GF[p^n]$. Then $(\mu\lambda^\alpha)^{(p^n-1)/b} \neq 1$ when μ satisfies (22). Hence $\mu\lambda^\alpha \neq \sigma^{b_1 b}$ for any integer b_1. Let $\lambda = \sigma^l$ and apply (22). Hence

$$\alpha l (p^n-1)/d \not\equiv b_1 b (p^n-1)/d \qquad (\text{mod } p^n-1),$$

viz., $\alpha l \not\equiv b_1 b (\text{mod } d)$ for any integer b_1.

First, if there is an integer $r < d$ such that α is divisible[2]) by d, then every value of l is excluded, so that the group is not regular. As an example, let $n = 11^2.5$, $d = 11.5$, $p = 31$; then, for $r = 5$, $\alpha = (p^{55}-1/(p^{11}-1)$ is divisible by 55; the same is true if p is of the form $55k+1$.

Next, if, for every r, α is not divisible by d, the condition on l requires merely that l be not divisible by certain factors f of d, and hence that λ be such that $\lambda^{(p^n-1)/f} \neq 1$. As an example let $n = 45$, $d = 15$, so that $p \equiv 1$ (mod 15); then $b \equiv 0$, $\alpha \equiv r$ (mod 15), so that the condition is $rl \not\equiv 0$ (mod 15), whence

1) This makes each factor of the determinant of (23) not zero.

2) This requires that $(p^{n/d_1}-1) / p^{n/d}-1)$ be divisible by d.

$l \not\equiv 0 \pmod{d_1}$; hence λ is any mark such that $\lambda^{(p^{45}-1)/5} \neq 1$, $\lambda^{(p^{45}-1)/3} \neq 1$. For $n = 45$, $d = 9$ or 3, λ is any mark such that $\lambda^{(p^{45}-1)/3} \neq 1$.

Theorem. Let n be odd and > 1. If $p^n - 1$ and n are relatively prime, the algebra is necessarily a field. In the contrary case, the n-ary linear group G_{p^n-1}, is generated by S_ϱ and $T_{\lambda, n/d}$, where ϱ and λ are fixed marks[1]), ϱ belonging to the exponent $(p^n - 1)/d$, and d any fixed common divisor of $p^n - 1$ and n. In order that G shall be regular and hence furnish an algebra, d must be chosen so that $(p^{n/d_1} - 1)/(p^{n/d} - 1)$ shall not be divisible by d when d_1 is a divisor > 1 of d; further, $\lambda^{(p^n-1)/f} \neq 1$ for certain factors f of d.

To proceed to the explicit exhibition of the simplest type of algebra with p^n elements, we assume that d is a prime divisor of $p^n - 1$ and n, and set $n = dm$. Then $1 \equiv p^n \equiv p^m \pmod{d}$. We first construct a d-tuple algebra in the $GF[p^m]$, and later obtain as its real form[2]) an n-tuple algebra modulo p. We employ the regular d-ary group $G_{p^{dm}-1}$ in the $GF[p^m]$ composed of the substitutions

$$(24) \qquad \Sigma_\mu :\ X_i' = \mu^{p^{mi}} X_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, d-1),$$

$$(25) \qquad R_{\mu,\lambda,r} :\ X_i' = \mu^{p^{mi}} \lambda^{\alpha p^{mi}} X_{i+r} \qquad \left(\alpha = \frac{p^{rm}-1}{p^m - 1},\ i = 0, \ldots, d-1\right),$$

with $r < d$, where λ is a fixed mark and μ any mark such that

$$(26) \qquad \mu^{(p^{md}-1)/d} = 1, \qquad \lambda^{(p^{md}-1)/d} \neq 1.$$

Here $R_{\mu,\lambda,r} = R_{1,\lambda,1}^r \Sigma_\mu$; $X_0, X_1, \ldots, X_{d-1}$ are linear homogeneous functions in the $GF[p^{md}]$ conjugate with respect to the $GF[p^m]$; $X_d = X_0$, $X_{d+1} = X_1$, etc.

Since $p^m \equiv 1 \pmod{d}$, there exists a mark ν of the $GF[p^m]$ not the dth power of any mark of that field. Then[4]) $x^d = \nu$ is irreducible in the $GF[p^m]$ and hence defines the $GF[p^n]$. Let

---

1) Transforming G by S_μ, we have λ replaced by $\lambda\tau^{-1}$, where $\tau = \mu^{p^{n/d}-1}$ is a root of $\tau^t = 1$, $t = (p^n - 1)/(p^{n/d} - 1)$, as above. In general, τ is not a root of (22), so actual normalization may be obtained.

2) The algebra is already in real form if $m = 1$, so that $n = d$ is a prime.

3) For $m = 1$, $n = d =$ prime, Σ_μ and T_μ correspond to S_μ and T_{μ_1} above. The earlier investigation is immediately extended from modulo p to the $GF[p^m]$.

4) Linear Groups, p. 23, § 35, with λ replaced by d, and n by m.

$$\omega = \nu^{(p^m-1)/d}, \quad \text{whence} \quad \omega^d = 1, \ \omega^c \neq 1 \ (c < d).$$

The marks of the $GF[p^n]$ satisfying $x^d = \nu$ are

$$J, \ J^{p^m} = \omega J, \quad J^{p^{2m}} = \omega^2 J, \ \ldots, \ J^{p^{(d-1)m}} = \omega^{d-1} J.$$

Let $X_0 = x_0 + Jx_1 + \ldots + J^{d-1}x_{d-1}$, the x_i being marks of the $GF[p^m]$. Then

$$X_i = x_0 + \omega^i J x_1 + \omega^{2i} J^2 x_2 + \ldots + \omega^{(d-1)i} J^{d-1} x_{d-1}, \tag{27}$$

for $i = 0, 1, \ldots, d-1$. The solution of these gives

$$dJ^i x_i = X_0 + \omega^{-i} X_1 + \omega^{-2i} X_2 + \ldots + + \omega^{-(d-1)i} X_{d-1}. \tag{28}$$

Let $\mu = a_0 + Ja_1 + J^2 a_2 + \ldots + J^{d-1} a_{d-1}$. Since $X_0' = \mu X_0$ (24) becomes

$$x_i' = a_i x_0 + a_{i-1} x_1 + a_{i-2} x_2 + \cdots + a_0 x_i + \nu a_{d-1} x_{i+1} + \nu a_{d-2} x_{i+2} + \cdots + \nu a_{i+1} x_{d-1}, \tag{29}$$

$i = 0, 1, \ldots, d-1$. The determinant of (29) is

$$\begin{vmatrix} a_0 & \nu a_{d-1} & \nu a_{d-2} & \nu a_{d-3} \ldots \nu a_3 & \nu a_2 & \nu a_1 \\ a_1 & a_0 & \nu a_{d-1} & \nu a_{d-2} \ldots \nu a_4 & \nu a_3 & \nu a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \nu a_{d-1} \ldots \nu a_5 & \nu a_4 & \nu a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{d-2} & a_{d-3} & a_{d-4} & a_{d-5} \ldots a_1 & a_0 & \nu a_{d-1} \\ a_{d-1} & a_{d-2} & a_{d-3} & a_{d-4} \ldots a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}, \tag{30}$$

being cyclic except for the factors ν to the right of the main diagonal. The determinant A_0 of (29) equals[1]) that of the conjugate substitution (24); viz., the power $(p^{md}-1)/(p^m-1)$ of μ. But the power $(p^{md}-1)/d$ of μ must be 1; hence

$$A_0^{(p^m-1)/d} = 1.$$

To obtain the form of (25) on the x's, we note that

$$(X_0 X_1 \ldots X_{d-1}) \sim x_i' = \omega^i x_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, d-1).$$

The product of the rth power of the latter by $\Sigma_{\mu\lambda^\alpha}$ gives (25). By (26), $\lambda^e \neq 1$, $e = (p^{md}-1)/d$. Hence $\lambda^e = \omega^l$, $0 < l < d$. Now

$$\alpha = 1 + p^m + p^{2m} + \cdots + p^{(r-1)m} \equiv r \pmod{d}.$$

---

1) Hence $A_0 = \prod_{i=0}^{d-1} (a_0 + \omega^i J a_1 + \omega^{2i} J^2 a_2 + \cdots + \omega^{(d-1)i} J^{d-1} a_{d-1})$. Replacing a_i by x_i, we see that $X_0 X_1 \ldots X_{d-1}$ equals a determinant X of the form (30). But (24) and (25) leave the product $X_0 \ldots X_{d-1}$ relatively invariant. Hence the substitutions on the x_i leave X relatively invariant.

Hence $(\mu\lambda^a)^e = \omega^{lr}$. Let $\mu\lambda^a = b_0 + Jb_1 + \ldots + J^{d-1}b_{d-1}$. Then (25) becomes

$$(31) \quad x_i' = b_i x_0 + \omega^r b_{i-1} x_1 + \omega^{2r} b_{i-2} x_2 + \cdots + \omega^{ir} b_0 x_i + \nu\omega^{(i+1)r} b_{d-1} x_{i+1} + \cdots,$$

analogous to (29). If B denotes (30) written in the b's, then

$$(32) \qquad B^{(p^m-1)/d} = \omega^r.$$

For $r = 0$, (25) reduces to (24), and (31) to (29). Let $\varepsilon = \omega$ and determine the (fixed) integer f so that $fl \equiv 1 \pmod{d}$. We obtain the following theorem, in which a's are written for the preceding b's:

Theorem. If p and d are primes and m is an integer such that $p^m \equiv 1 \pmod{d}$, and f is an integer prime to d, there exists a regular d-ary linear group in the $GF[p^m]$ whose $p^{md}-1$ substitutions are

$$(33) \quad \begin{vmatrix} a_0 & \varepsilon\nu a_{d-1} & \varepsilon^2\nu a_{d-2} & \varepsilon^3\nu a_{d-3} & \ldots & \varepsilon^{d-2}\nu a_2 & \varepsilon^{d-1}\nu a_1 \\ a_1 & \varepsilon a_0 & \varepsilon^2\nu a_{d-1} & \varepsilon^3\nu a_{d-2} & \ldots & \varepsilon^{d-2}\nu a_3 & \varepsilon^{d-1}\nu a_2 \\ a_2 & \varepsilon a_1 & \varepsilon^2 a_0 & \varepsilon^3\nu a_{d-1} & \ldots & \varepsilon^{d-2}\nu a_4 & \varepsilon^{d-1}\nu a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{d-2} & \varepsilon a_{d-3} & \varepsilon^2 a_{d-4} & \varepsilon^3 a_{d-5} & \ldots & \varepsilon^{d-2} a_0 & \varepsilon^{d-1}\nu a_{d-1} \\ a_{d-1} & \varepsilon a_{d-2} & \varepsilon^2 a_{d-3} & \varepsilon^3 a_{d-4} & \ldots & \varepsilon^{d-2} a_1 & \varepsilon^{d-1} a_0 \end{vmatrix},$$

where $\varepsilon = A^{f(p^m-1)/d}$ (whence $\varepsilon^d = 1$), A being the determinant (30) of (33), and ν is a not d^{th} power in the $GF[p^m]$.

For the resulting d-tuple algebra of p^{md} elements $(x_0, \ldots, x_{d-1})$, the x's in the $GF[p^m]$, we have the laws

$$(a_i) + (x_i) = (a_i + x_i), \qquad (a_i) \times (x_i) = (x_i'),$$

$$x_i' = a_i x_0 + \varepsilon a_{i-1} x_1 + \varepsilon^2 a_{i-2} x_2 + \cdots + \varepsilon^i a_0 x_i + \nu\varepsilon^{i+1} a_{d-1} x_{i+1} + \cdots + \nu\varepsilon^{d-1} a_{i+1} x_{d-1}.$$

For $m = 1$, $d = 2$ and 3, we obtain the first and second algebras of § 1. For d an odd prime, the algebra (33) is the only d-tuple algebra in the $GF[p^m]$.

The restriction to prime d was only for simplicity. In the theorem preceding the last, let $p \equiv 1 \pmod{n}$ and take $d = n$. Then $(p^{n/d_1} - 1)/(p-1) \equiv n/d_1 \not\equiv \pmod{d}$. Take λ to be a primitive root of $\lambda^e = \omega$, whence $l = 1$, and λ is a primitive root of the $GF[p^n]$. Hence the conditions that the n-ary group G_{p^n-1} modulo p shall be regular are satisfied. The resulting algebra is of the form (33) with $\varepsilon = A^{(p-1)/n}$. For example, if $n = 4$ and $p \equiv 1 \pmod{4}$, we obtain an algebra

$$(34)\qquad \begin{pmatrix} a & \varepsilon\nu d & \varepsilon^2\nu c & \varepsilon^3\nu b \\ b & \varepsilon a & \varepsilon^2\nu d & \varepsilon^3\nu c \\ c & \varepsilon b & \varepsilon^2 a & \varepsilon^3\nu d \\ d & \varepsilon c & \varepsilon^2 b & \varepsilon^3 a \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} a & \nu d & \nu c & \nu b \\ b & a & \nu d & \nu c \\ c & b & a & \nu d \\ d & c & b & a \end{vmatrix}^{\frac{p-1}{4}}.$$

The determinant whose power gives ε has the expansion

$$(35)\qquad (a^2-\nu c^2)^2-\nu(b^2-\nu d^2)^2-4\nu\,(ad-bc)\,(ab-\nu cd).$$

We pass to the algebras of p^n elements, n being even [1]). For $p > 2$, we may derive an n-tuple algebra modulo p from the double algebra (6′) in the $GF[p^{n/2}]$. Let next $p = 2$, $n = 2m$. Since $2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$, there exists a triple algebra in the $GF[2^{2k}]$ and hence a $6k$-tuple algebra modulo 2. From the 5-tuple algebra in the $GF[2^{4k}]$, we obtain a $20k$-tuple algebra modulo 2. In general, if 2 belongs to the exponent e modulo g, a prime, there exists a gek-tuple algebra modulo 2; further [2]), $2^{gek}-1$ is divisible by g. The values of $m < 34$ thus giving $2m$-tuple algebras modulo 2 are $m = 3, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 33$. For the remaining cases, the prime factors of $2^m \pm 1$ are given in the annexed table.

m	2^m-1	2^m+1	m	2^m-1	2^m+1
1	1	3	17	131071	3.43691
2	3	5	19	524287	3.174763
4	3.5	17	22	3.23.89.683	5.397.2113
5	31	3.11	23	47.178481	3.2796203
7	127	3.43	25	31.601.1801	3.11.251.4051
8	3.5.17	257	26	3.2731.8191	5.53.157.1613
11	23.89	3.683	28	3.5.29.43.113.127	17.15790321
13	8191	3.2731	29	233.1103.2089	3.59.3033169
14	3.43.127	5.29.113	31	2147483647	3.715827883
16	3.5.17.257	65537	32	3.5.17.257.65537	$641(2^7.52347+1)$

If g is the greatest prime factor of 2^m+1, m given in the table, a group of order $2^{2m}-1$ has an invariant cyclic C_g; while

1) An exhanstive determination of the possible algebras it not undertaken We seek merely the conditions on p and n = even for the existence of at least one algebra.

2) Inversely, if $2^{gm}-1$ is divisible by the prime g, then $2^m \equiv 1 \pmod g$. Let 2 belong te the exponent e modulo g. Then $m = ek$. But there exists a g-tuple algebra in the $GF[2^{ek}]$ and hence a gek-tuple algebra modulo 2.

$2m$ and $2^{2m}-1$ are relatively prime. Hence the algebra is a field.

As a partial summary of our results, we state the following theorem, proved when the preceding special result and the general one of § 5 on the presence of an invariant subgroup of G_{p^n-1} is true:

Theorem. The algebra of p^n elements is necessarily a field if p^n-1 and n are relatively prime; in the contrary case, there exists at least one algebra which is not a field.

§ 5. On groups of order p^n-1, p = prime, n odd >1.

Theorem. Any group of order p^n-1, p a prime and n an odd integer >1, contains an invariant subgroup of order a power of a prime q, where q divides p^n-1 but not p^m-1, $m<n$.

We note that[1]), for n any integer >2, p^n-1 has such a prime factor q, except when $p=2$, $n=6$. As the known theorems on solvable groups do not appear to bear directly on the above theorem, I have restricted my attention to its numerical verification over a very wide range of values of p and n, finding no case in which the theorem fails. The tables[2]) have some application in other group investigations[3]).

The restriction that n shall be odd seems to be essential to a simple result. For example, the orders <480 of insoluble groups are known to be $120=11^2-1$, $168=13^2-1$, $360=19^2-1$; 60, 180, 336, 420, each being of the form $p-1$; and $300=7.43-1$.

1) Dickson, On the cyclotomic function, *Amer. Math. Monthly*, vol. 12 (1905), p. 89. See foot-note to § 6.

2) For the fact that some of the largest numbers are primes, I am indebted to Dr. Lehmer of the University of California. who has in press a factor table up to 10 millions.

3) Cf. Burnside, *Proc. Lond Math. Soc.*, vol. 26 (1894), p. 59; his table extends to $p=97$ and contains misprints for $p=19$ and 59. Cf. Frobenius, Ueber auflösbare Gruppen, IV, *Berliner Sitzungsberichte*, 1901, p. 1221.

Prime factors of p^2+p+1, $p \equiv 2 \pmod 3$, $p<400$.

p	p^2+p+1	p	p^2+p+1	p	p^2+p+1
2	7	101	10303	239	19.3019
5	31	107	7.13.127	251	43.1471
11	7.19	113	13.991	257	61.1087
17	307	131	17293	263	7^2.13.109
23	7.79	137	7.37.73	269	13.37.151
29	13.67	149	7.31.103	281	109.727
41	1723	167	28057	293	86143
47	37.61	173	30103	311	19.5107
53	7.409	179	7.4603	317	7.14401
59	3541	191	7.13^2.31	347	7.13.1327
71	5113	197	19.2053	353	19.6577
83	19.367	227	73.709	359	7.37.499
89	8011	233	7.7789	383	147073
				389	7.21673

Prime factors of $Q = \frac{1}{3}(p^2+p+1)$, $p\equiv 1 \pmod 3$, $p<400$.

p	Q	p	Q	p	Q
7	19	109	7.571	241	19441
13	61	127	5419	271	24571
19	127	139	13.499	277	7.19.193
31	331	151	7.1093	283	73.367
37	7.67	157	8269	307	43.733
43	631	163	7.19.67	313	181^2
61	13.97	181	79.139	331	7.5233
67	7^2.31	193	7.1783	337	43.883
73	1801	199	13267	349	19.2143
79	7^2.43	211	13.31.37	367	13.3463
97	3169	223	16651	373	7^2.13.73
103	3571	229	97.181	379	61.787
				397	31.1699

Prime factors of $(p^5-1)/(p-1)$, and of [1] $(x^n-1)/(x-1)$ for $x=2,35,7,11,13$.

p	$(p^5-1)/(p-1)$
2	31
3	11^2
5	11.71
7	2801
11	5.3221
13	30941
17	88741
19	151.911
23	292561
29	732541
31	5.11.17351
37	11.41.4271
41	5.579281
43	3500201
47	11.31.14621
53	11.131.5581
59	11.41.151.181
61	5.131.21491

n	2^n-1
7	127
9	7.73
11	23.89
13	8191
15	7.31.151
17	131071
19	524287
21	7^2.127.337
23	47.178481
25	31.601.1801
27	7.73.262657
29	233.1103.2089
31	2147483647
33	7.23.89.599479
35	31.71.127.122921
37	223.616318177
39	7.79.8191.121369
41	13367.164511353
43	431.9719.2099863
45	7.31.73.151.631.23311
47	2351.4513.13264529
49	127.4432676798593

n	$(3^n-1)/2$
7	1093
9	13.757
11	23.3851
13	797161
15	11^2.13.4561
17	1871.34511
19	1597.363889
21	13.1093.368089
27	13.109.433.757.8209
29	59.28537.20381027
39	13^2.313.6553.7333.797161
45	11^2.13.181.757.1621.4561. .927001

n	$(5^n-1)/4$
7	19531
9	19.31.829
11	12207031
15	11.31.71.181.1741
21	31.379.19531.519499
25	11.71.101.251.401.9384251

n	$(7^n-1)/6$
7	29.4733
9	3^2.19.37.1063
11	1123.293459
15	3.19.31.2801.159871
27	3^3.19.37.109.811.1063.2377. .2583253

n	$(11^n-1)/10$
7	43.45319
9	7.19.1772893

n	$(13^n-1)/12$
7	5229043
9	3^2.61.1609669

1) For n odd and <50, as far as complete factorizations have been ob-

We proceed to the verification of the above theorem. For the first two tables, let g be the greatest prime factor of p^2+p+1 or $\frac{1}{3}(p^2+p+1)$. The only factor [1]) $\equiv 1 \pmod g$ of p^3-1 is found to be unity, except for $p = 137, 61, 67, 211, 277$, or 373. For $p = 137$, the only factor $\equiv 1 \pmod{37}$ of p^3-1 is unity. For $p = 61$, the only divisors of $p^3-1 = 2^2.3^2.5.13.97$ which are $\equiv 1$ (97) are 1 and $3.5.13$, the only ones $\equiv 1 \pmod{13}$ are 1 and $2^2.3^2.5.97$; by the latter, G contains [2]) an invariant C_{13}. For $p = 67$, the only divisors of $p^3-1 = 2.3^2.7^2.11.31$ which are $\equiv 1 \pmod{31}$ are 1, 63; the only ones $\equiv 1 \pmod 7$ are 1, 2.11, $3^2.11$, 3.11.31; the only ones $\equiv 1 \pmod{11}$ are 1, $3^2.7^2$, $7^2.31$, $2.3^2.7.31$. Unless C_{31} is invariant in G, it is invariant exactly in a subgroup of order 2.7.11.31 containing a cyclic $C_{7\cdot 11\cdot 31}$; then the number of conjugate subgroups of order 7^2 would be a multiple of 31, so that G would have an invariant C_{11}. For $p = 211$, $p^3-1 = 2.3^2.5.7.13.31.37$, so that G contains [3]) an invariant C_{37}. For $p = 277$, $p^3-1 = 2^2.3^2.7.19.23.193$. Let C_{193} be not invariant; it is then one of 2.3.7.23 conjugates and invariant in a subgroup of order 2.3.19.193, containing an invariant cyclic $C_{19\cdot 193}$. The only divisors $\equiv 1 \pmod{19}$ of 277^3-1 are 1, $2^2.3^2.7.23$, $2^2.3.7.23.193$; but neither of the last two can be the number of conjugate C_{19} in G in view of the earlier result; hence G contains either an invariant C_{19} or an invariant C_{193}.

In the tables for p^5-1 and 13^n-1, it suffices to take as q the greatest prime factor, since unity is the only divisor $\equiv 1 \pmod q$. Finally, π^n-1 ($\pi = 2, 3, 5, 7$ or 11) is not divisible by 12 and, except for 7^6-1 and $7^{27}-1$, contains no prime to a power higher than the second; hence [4]) G contains an invariant C_g, g being the greatest prime factor. For $3^{30}-1$, G contains an invariant subgroup of order 7333.797161 and hence an

---

tained. See Bickmore, *Messenger of Mathematics*, vol. 25, p. 43; vol. 26, p. 38, Before seeing this paper, I had effected most of the factorizations given; those borrowed from Bickmore's tables have been checked, except the proofs that numbers> ten millions are primes.

1) While in many cases the use of the theorems below are simpler, I carried out this numerical work preliminary to the direct application of Sylow's theorem to see to what extent a general argument was possible.

2) Frobenius, Berliner Sitzungsberichte, 1902, p. 459.

3) Burnside, Theory of Groups, pp. 358—9. The same argument applies to $p = 67$.

4) Burnside, Theory of Groups, pp. 358—9.

invariant[1]) C_{7333}. For $7^9 - 1$, unity is the only factor $\equiv 1$ (mod 1063).

§ 6. Second set of postulates for a finite field.

By the well-known theorem due to Frobenius and Peirce, a linear associative algebra, in which the coördinates lie in the continuous number system and in which division is always uniquely possible, is of the type of Hamilton's quaternion system or one of its sub-algebras. For a finite number of elements, we have the following

Theorem[2]). *If for a finite set of elements subject to the operations addition and multiplication postulates $1^+ - 4^+$, $1^\times - 4^\times$, and the right-hand and left-hand distributive laws hold, the set forms a field.*

As in § 4, the number of elements is p^n, p a prime; and the elements e_i form under addition an abelian group A of type $(1, 1, \ldots, 1)_p$. In view of the left-hand distributive law 5, the correspondence $f \times e_i \sim e_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p^n - 1)$ defines an isomorphism F of A into itself. In view of the right-hand distributive law, the correspondence $e_i \times g \sim e_i$ defines an isomorphism G of A into itself. Since the associative law $2^\times$ for multiplication is assumed, $(f \times e_i) \times g = f \times (e_i \times g)$. Hence $FG = GF$. Hence[3]) the multiplicative group of the $p^n - 1$ elements $\neq 0$ is simply isomorphic to each of two transitive n-ary linear groups modulo p, each operator of the one being commutative with every operator of the other. Except for $p = 2$, $n = 6$ and for $p = 2^k - 1$, $n = 2$, there exists[4]) a prime q dividing $p^n - 1$ but not $p^m - 1$ $(m < n)$. Aside from these exceptional cases, a n-ary linear group of order $p^n - 1$ modulo p contains an operator O_q having the canonical form (19). But the only n-ary substitutions commutative with O_q are the $p^n - 1$ substitutions with a similar

---

1) Also since unity is the only factor of $3^{39} - 1$ which is $\equiv 1$ mod 7333, the greatest prime in $(3^{39} - 1)/(3^{13} - 1)$.

2) First proved by Wedderburn, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6 (1905), pp. 349–352. Following my simpler proof above, and using the same lemma, Wedderburn constructed two further simple proofs, *loc. cit.*

3) This also follows from the fact that the elements form a linear associative algebra.

4) Dickson, *Amer. Math. Monthly*, vol. 12 (1905), p. 89. I have since found that the theorem was proved earlier but differently by K. Zsigmondy, Monatshefte, 3 (1892) p. 283; and by Birkhoff and Vandiver, *Annals of Math.* vol. 5 (1904), p. 177.

canonical form and these form a cyclic group. Hence multiplication is commutative and the algebra is a field.

Let next $p = 2$, $n = 6$. If there be an operator of canonical form (19) with $\mu, \mu^2, \ldots, \mu^{2^5}$ all distinct, the preceding argument applies. In the contrary case, $\mu = 1$, $\mu^3 = 1$ or $\mu^7 = 1$. In the second case, the multipliers are $\mu, \mu, \mu, \mu^2, \mu^2, \mu^2$ and the operator is of period 3. In the third case, the multipliers are $\mu, \mu, \mu^2, \mu^2, \mu^4, \mu^4$ and the operator is of period 7. But a G_{63} whose operators are all of period 1, 3, or 7 would contain $63-7 = 56$ operators of period 3, whereas 57 is not divisible by 9.

The case $p = 2^s - 1$, $n = 2$, may be excluded directly or by the determination of binary groups of order $p^2 - 1$ in § 4, since each contains an operator whose period does not divide $p-1$.

§ 7. On algebras satisfying all the postulates for a field except associativity of multiplication.

We assume that postulates $1^+ - 4^+, 1^\times, 3^\times, 4^\times, 5$, and $6^\times$ hold. Then[1]) addition is commutative, and the unique zero element i_+ has the property that $a \times i_+ = i_+ \times a = i_+$ for every a; but we may[2]) now have $a \times b = i_+$, $a \neq i_+$, $b \neq i_+$. Although infinite algebras will be discussed incidentally below, we assume for the present that the algebra is finite. Let $i_\times$ be an identity element for which $3^\times$ and $4^\times$ hold. Let $i_\times$ be of period N under addition. Every element is of additive period a divisor of N, since

$$a + a + \cdots \text{ to } N \text{ terms} = a \times (i_\times + i_\times + \cdots) = a \times i_+ = i_+.$$

Suppose that N has at least two distinct prime factors, and set $N = p^\alpha \nu$, $\nu > 1$, ν prime to p. Now $s_\nu \equiv i_\times + i_\times + \cdots$ to ν terms is of additive period p^α, whence $s_\nu \neq i_+$. Also $s_\nu \times a$ is of additive period a divisor of p^α, whence $s_\nu \times a \neq i_\times$ for any a. Hence there is no inverse of s_ν, contrary to $4^\times$. Hence the number of elements, being the order of the additive group, is a power of a prime, say p^n. Let the type of the abelian additive group be $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi)_p$, i. e., be generated by independent operators of periods $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_\pi}$, $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \cdots \geqq \alpha_\pi > 0$. From what precedes, $i_\times$ is of additive period p^{α_1}. Suppose that $\alpha_1 > 1$. Now $s = i_\times + i_\times + \cdots$ to $p^{\alpha_1 - 1}$ terms is of additive period p, so that $s \neq i_+$. Also, $s \times a$ is of additive period 1 or p and hence $\neq i_\times$. Hence

1) *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6 (1905), p. 202.

2) See algebras (38), (39), (41), (42), (43).

there is no inverse of s, contrary to $4^{\times}$. We have now proved the

Theorem. For a finite algebra, the additive group is an abelian group of order p^n, p a prime, and of type (1, 1, ..., 1).

If u is an element of the algebra, we henceforth write ku for $u+u+\cdots$ to k terms, k being a positive integer taken modulo p. In view of the theorem, the p^n elements x may be written $x_1u_1+\cdots+x_nu_n$, where $u_1, \ldots, u_n$ are fixed elements, $x_1, \ldots, x_n$ integer modulo p. Now the double distributive law holds in view of 5 and $6^{\times}$. Hence $a \times x = \sum_{i,j} a_i x_j (u_i \times u_j)$. Also, $u_i \times u_j = \sum_k \gamma_{ijk} u_k$, the γ's being fixed integers modulo p. Hence the algebra is a linear commutative algebra with n linearly independent units modulo p, subject to the further condition that division shall always be possible. We may take $i_{\times}$ as one of the units; we shall set $u_1 = 1$, as allowed since the elements $x_1 i_{\times}$ form the field of order p. In particular, if $n=1$, the algebra is a field.

If $n=2$, the p^2 elements are $x+yi$, where $i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 i$. The condition that division by $a+bi$ shall always be possible is that $a^2+ab\gamma_2-b^2\gamma_1$ shall vanish only when $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$. Hence must $z^2 - z\gamma_2 - \gamma_1$ be irreducible modulo p. The algebra is therefore the $GF[p^2]$. A more direct proof follows from the fact that the units are $i^r\ (r = 0, 1)$, so that the associative law holds.

A similar argument shows that an algebra in one or two units with coördinates in any field is itself a field.

Triple algebras with coördinates in any field F.

Let 1, i, j be the units, linearly independent with respect to F, and set

$$(36)\quad i^2 = a+\alpha i + Aj,\ ij = ji = b + \beta i + Bj,\ j^2 = d + \delta i + Dj.$$

The conditions for $(r+si+tj)(x+yi+zj) = 1$ are

$$(37)\quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline r & sa+tb & sb+td & =1 \\ s & r+s\alpha+t\beta & s\beta+t\delta & =0 \\ t & sA+tB & r+sB+tD & =0. \end{array}$$

Denote the determinant by Δ; the minors of r, $sa+tb$, $sb+td$ by Δ_1, Δ_2, Δ_3, respectively. We treat the algebras under two cases, according as there is or is not an element $e = r+si+tj$, s and t not both zero, such that e^2 is a linear function of e in the field.

Case I. There is an element e independent of the unit 1 such that $e^2 = g+he$. We assume first that F does not have modulus 2. Let $i = e-h/2$; then $i^2 = g+h^2/4$. Let $j_1 = j-\beta$; then $ij_1 = b+B\beta+Bj_1$. Hence we may assume that $\alpha = A = 0$, $\beta = 0$, in (36).

Let first $a = 0$. If $B \neq 0$, we set $I = i/B$, $J = j + ib/B^2 + b/B$. Then $I^2 = 0$, $IJ = J$, so that $I(x+yI+zJ) = Ix+Jz \neq 1$. Hence $B = 0$. If $b = 0$, i does not have an inverse. Hence $b \neq 0$. Then

$$\Delta = r^3+r^2tD-rt^2d+t^3b\delta-bst(2r+tD).$$

Since s enters linearly, we set $t = 1$, $r \neq 0$, $r \neq -D/2$, and uniquely determine s to make $\Delta = 0$. Then $\Delta_{13} \neq 0$, and equations (37) are not solvable.

Let next $a \neq 0$. If $a = B^2$, set $t = 0$, $s = 1$, $r = B$; then $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = 2B^2$. Let next $a \neq B^2$, $B \neq 0$. Let $J = j+\rho i+\sigma$, where $\sigma = B\rho$, $(a-B^2)\rho = -b$; then $iJ = BJ$. Hence we may set $\alpha = A = \beta = b = 0$ in (36). Then for $r = s = 0$, $t = 1$, we have $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = -B\delta$, whence $\delta = 0$. If $d = 0$, $(x+yi+zj)j = (x+yB+zD)j \neq 1$, whence $d \neq 0$. If $D \neq 0$, we set $r = -sB$, $s = 2tBdD^{-1}(a-B^2)^{-1}$, and have $\Delta = 0$, $\Delta_{13} = 2Bst$. Hence $D = 0$. Thus $i^2 = a$, $ij = Bj$, $j^2 = d$, and

$$\Delta = (r^2-as^2)(r+sB)-dt^2(r-sB),\ \Delta_{11} = r(r+sB),\ \Delta_{13} = t(sB-r).$$

If $a = a_0^2$, a square, we take $r = a_0 s \neq 0$, $t = 0$; then $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = rs(a_0+B) \neq 0$. If $d = d_0^2$, we take $r = d_0 t \neq 0$, $s = 0$; then $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = r^2$. Hence, if $B \neq 0$, a and d are not squares. Hence F cannot be the field of all complex numbers. Let F be a Galois field or the field of all real numbers, so that a/d is a square, σ^2. Take $t = \sigma s \neq 0$, $r = 0$; then $\Delta = 0$, $\Delta_{13} \neq 0$.

Finally, let $a \neq 0$, $B = 0$. Since $i(j-a^{-1}bi) = 0$, we may set $b = 0$. Hence $i^2 = a$, $ij = 0$, $j^2 = d+\delta i+Dj$. For $r = s = 0$, $t = 1$, we get $\Delta = 0$, $\Delta_{13} = \delta$, whence $\delta = 0$. If $D \neq 0$, we set $I = j-D/2$, $J = i$, obtaining

$I^2 = d + D^2/4$, $IJ = -\frac{1}{2}DJ$, $J^2 = a$, an earlier case. For $D = 0$, we have $i^2 = a$, $ij = 0$, $j^2 = d$. Then

$$\Delta = r(r^2 - s^2a - t^2d), \quad \Delta_{11} = r^2, \ \Delta_{12} = rs, \ \Delta_{13} = -rt.$$

If $a = a_0^2$, set $r = a_0 s \neq 0$, $t = 0$, whence $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = r^2$. If $d = d_0^2$, set $r = d_0 t \neq 0$, $s = 0$, whence $\Delta = 0$, $\Delta_{13} \neq 0$. Hence a and d are not-squares, so that F is not the field of all complex numbers. For Galois fields, we way set $r = 1$ and choose s, t to make $\Delta = 0$. For the field of all real numbers, we may set $a = -a_1^2$, $d = -d_1^2$, $I = i/a_1$, $J = j/d_1$, whence[1])

$$(38) \qquad I^2 = -1, \quad J^2 = -1, \quad IJ = JI = 0.$$

Now $r^2 + s^2 + t^2 = 0$ only when $r = s = t = 0$. Aside from this case,

$$(38') \qquad (r + sI + tJ)\left(\frac{r - sI - tJ}{r^2 + s^2 + t^2}\right) = 1.$$

We note that there is a unique set of real solutions x, y, z of

$$(38'') \qquad (r + sI + tJ)(x + yI + zJ) = \lambda + \mu I + \nu J,$$

if $r \neq 0$. If $r = 0$, (38'') requires that $s\nu = t\mu$. If $r = 0$, s and t not both zero, and $s\nu = t\mu$, there is an infinitude of sets of solutions of (38'').

Theorem. *For case I, there exists no triple algebra when F is a finite field with modulus $\neq 2$ or the field of all complex numbers. When F is the field of all real numbers, every algebra may be given the form (38). When F is the field of all rational numbers, there exist algebras; for example*[2]),

$$(39) \qquad i^2 = a, \ ij = ji = 0, \ j^2 = d, \ d = \text{prime}, \quad a = \text{quadratic non-residue of } d.$$

Let now F be the $GF[2^n]$. By hypothesis, we may set $i^2 = g + hi$. Let $I = k(i + f)$. Then $I^2 = khI + k^2G$, $G = g$

1) This algebra may be derived (by setting $I = i$, $J = j + i$) from the one given by me, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 6 (1905), p. 204, [$2^\times$]. Cf. p. 189, M_2.

2) Since $r^2 - as^2 - dt^2 = 0$ only when the rational numbers r, s, t all vanish. If $r = 0$, and s, t are not both 0, then $\Delta = \Delta_{11} = \Delta_{12} = \Delta_{13} = 0$; but then $(si + tj)(yi + zj) = 1$ if $say + tdz = 1$, with an infinitude of solutions y, z.

$+hf+f^2$. If the function G is reducible in the field, we determine f and k to make $I^2 = 0$ or I. If G is irreducible, then $h \neq 0$ and we take $k = h^{-1}$ and choose f to make G/h^2 equal to a fixed root of $\xi^2 + \xi + l = 0$, where (Linear Groups, p. 199 or 29)

$$(40) \qquad l + l^2 + l^4 + l^8 + \cdots + l^{2^{n-1}} = 1.$$

Hence $i^2 = 0$, i, or $i + l$, where l is a fixed root of (40), e. g., $l = 1$ if n is odd.

For $i^2 = 0$, we may set $\beta = 0$, $B = 0$, $b \neq 0$, as above. Replacing j by j/b, we have $i^2 = 0$, $ij = 1$. Now s occurs in Δ only in the term Dst^2; hence the case $D \neq 0$ is excluded as above (under $a = 0$). Hence $j^2 = d + \delta i$, $\Delta = r^3 + rt^2d + t^3\delta$. If $\delta = 0$ and $d \neq 0$, set $r = td^{\frac{1}{2}} \neq 0$, whence $\Delta = 0$, $\Delta_{11} = r^2$. If $\delta = d = 0$, we obtain the algebra

$$(41) \qquad i^2 = 0, \ ij = ji = 1, \ j^2 = 0, \text{ in the } GF[2^n].$$

Indeed, $\Delta = r^3$, $\Delta_{11} = r^2$, $\Delta_{12} = rs$, $\Delta_{13} = tr$; hence for $r \neq 0$,

$$(41') \qquad (r + si + tj)\left(\frac{1}{r} + \frac{s}{r^2}\, i + \frac{t}{r^2} j\right) = 1.$$

For $r = 0$, s and t not both zero, the conditions for an inverse reduce to $x = 0$, $ty + sz = 1$, having 2^n sets of solutions in the field. Next, for $\delta \neq 0$, $d = 0$, the case $\delta = \gamma^3$ is excluded, since $\Delta = 0$, $\Delta_{11} \neq 0$ for $r = \gamma$, $t = 1$. Now (Linear Groups, p. 45) every mark of the $GF[2^n]$ is a cube if and only if n is odd. Replacing i by ki, j by $k^{-1}j$, we have δ replaced by δ/k^3. Hence there remains the case n even and $\delta = \nu$ or ν^2, where ν is a particular not-cube. We obtain the algebras

$$(42) \qquad i^2 = 0, \ ij = ji = 1, \ j^2 = \delta i, \text{ in the } GF[2^n], \ n \text{ even},$$

where $\delta = \nu$ or ν^2. Then $\Delta = r^3 + t^3\delta$ vanishes only when $r = t = 0$; then $(si)(yi + s^{-1}j) = 1$ for any y. For $\delta \neq 0$, $d \neq 0$, a similar discussion shows that the algebra exists only when of the type

$$(43) \quad i^2 = 0, \ ij = ji = 1, \ j^2 = d + \delta i, \ \varrho^3 + \varrho d + \delta \text{ irred. in } GF[2^n].$$

It therefore exists for every n. Thus, for $n = 1$, $d = \delta = 1$ [1]).

The discussion of the cases $i^2 = i$ or $i + l$, on which I do not enter here, is facilitated by the fact that $D \neq 0$, since

1) To pass from this to the algebra $[2^\times]$, marked $[2^+]$ by a misprint, of *Transactions*, l. c.. p. 203, set $1 = (0, 0, 1)$, $i = (0, 1, 0)$, $j = (1, 0, 1)$.

otherwise there exists a linear function e such that $e^2 = 0$, leading to the preceding case. We pass at once to the more interesting and difficult case.

Case II. There is no element e independent of the unit 1 such that e^2 is a linear function of e. By introducing a new j, we may set $i^2 = j$. Set $e = r + si + tj$. Then $e^2 = w + \varkappa i + \varrho j$, where

$$w = r^2 + 2stb + t^2 d,\ \varkappa = 2rs + 2st\beta + t^2\delta,\ \varrho = s^2 + 2rt + 2stB + t^2 D.$$

By hypothesis, $e^2 = ke + l$ requires $s = t = 0$. Hence

$$C \equiv s\varrho - t\varkappa = s^3 + 2s^2tB + st^2(D-2\beta) - t^3\delta \tag{44}$$

vanishes only when $s = t = 0$, and hence is irreducible in F.

Theorem. If the algebra exists, $\varDelta$ vanishes only when $r = s = t = 0$. Hence a product vanishes only when one factor vanishes.

It suffices to show that $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ are not all zero. From (37) with $a = \alpha = 0$, $A = 1$, we get

$$\varDelta_1 = r^2 + r(t\beta + tD + sB) - s^2\beta - st\delta + t^2(\beta D - B\delta),$$

$$\varDelta_3 = s^2 + stB - rt - t^2\beta,\ \varDelta_2 = rs + s^2 B + stD - st\beta - t^2\delta.$$

Upon eliminating rt between $t^2\varDelta_1 = 0$ and $\varDelta_3 = 0$, we get $(s + tB)\ C = 0$, C being given by (44). If $C = 0$, then $s = t = 0$, and then $r = 0$ by $\varDelta_1 = 0$. If $s + tB = 0$, and $t \neq 0$, then $r + t\beta = 0$ by $\varDelta_3 = 0$. Then $\varDelta_2 = t^2(B^3 + 2\beta B - DB - \delta)$. If the last factor vanishes, (44) vanishes for $t = 1$, $s = -B$. Hence $\varDelta_2 \neq 0$.

Let $I = r+si+tj$, $J = r_1 + s_1 i + t_1 j$, where $\sigma = st_1 - ts_1 \neq 0$. Then

$$I^2 = \lambda + \mu I + \nu J,\ \nu = C/\sigma,\ \mu = (t_1\varkappa - s_1\varrho)/\sigma,\ \lambda = w - r_1\nu - r\mu.$$

We desire that $I^2 = J$. Now $\varkappa$ and ϱ are not both zero by (44). Hence $\mu = 0$ requires that $s_1 = m\varkappa$, $t_1 = m\varrho$, $m \neq 0$, Then $\nu = 1/m$. Hence we set $m = 1$, $r_1 = w$. Every transformation of units which preserves $i^2 = j$ has the form

$$I = r + si + tj,\quad J = w + \varkappa i + \varrho j, \tag{45}$$

$$i = (tw - r\varrho + \varrho I - tJ)/C,\quad j = (r\varkappa - sw - \varkappa I + sJ)/C. \tag{45'}$$

Then $IJ = X + Yi + Zj = b' + \beta' I + B' J$, where

$$X = wr + t\varrho d + b(\varkappa t + s\varrho),\quad Y = ws + \varkappa r + t\varrho\delta + \beta(\varkappa t + s\varrho),$$

$$Z = wt + \varkappa s + r\varrho + t\varrho D + B(\varkappa t + s\varrho),$$

$$b' = X + (Ytw - Yr\varrho + Zr\varkappa - Zsw)/C,\ \beta' = (Y\varrho - Z\varkappa)/C,\ B' = (Zs - Yt)/C.$$

We find that

(46) $$B' = 3r + sB + t\beta + tD.$$

We can always make $B' = 0$ by choice of r, s, t such that $C \neq 0$. We therefore set $B = 0$ in our original formulae. Further,

(47) $$b\delta - \beta d \neq 0, \quad K \equiv r^3 - rs^2\beta + s^3 b \text{ is irreducible in } F.$$

Indeed, $\Delta = K$ for $t = 0$; $\Delta = b\delta - \beta d$ for $r = s = 0$, $t = 1$.

We exclude for the present the exceptional case when F has modulus 3. We take $r = -\frac{1}{3}t(\beta + D)$, so that $B' = 0$. After a long computation, afterwards checked, I found that the division by C, indicated in the above expressions for b' and β', is exact algebraically, and that the following values result[1]:

(48) $$\beta' = \beta s^2 + st(\delta + 2b) + t^2 d + \tfrac{1}{3}t^2(\beta^2 - \beta D + D^2),$$

(49) $$b' = bs^3 + s^2td + \tfrac{1}{3}s^2t\beta(\beta + D) + \tfrac{1}{3}st^2b(2\beta - D) + \tfrac{1}{3}st^2\delta(\beta + D)$$
$$+ t^3b\delta - \tfrac{1}{3}t^3d(2\beta - D) + \tfrac{1}{27}t^3(\beta + D)(2\beta - D)(\beta - 2D)$$

The algebra will be a field if $j^2 = i(ij)$ and if $(47)_2$ holds. Hence

(50) Conditions for field: $d = 0$, $\delta = b$, $D = \beta$; $\varrho^3 - \varrho\beta + b$ irreducible.

Let F be the $GF[2]$. In view of (47), $\varrho^3 - \varrho\beta + b$ is irreducible modulo 2; hence $b \equiv \beta \equiv 1 \pmod 2$. Similarly, by (44), $D \equiv \delta \equiv 1$. Then $d \equiv 0$ by $(47)_1$. H e n c e a n a l g e b r a o f 8 e l e m e n t s i s t h e $GF[2^3]$.

Let F be the $GF[2^2]$, defined by $\varepsilon^2 \equiv \varepsilon + 1 \pmod 2$, and having the marks $0, 1, \varepsilon, \varepsilon + 1$. Now $\varrho^3 - \varrho\beta + b$ has a linear factor in the field only when $b = 0$, $\beta + 1$, $\beta\varepsilon + 1$, or $\beta(\varepsilon + 1) + 1$; hence it is irreducible only when $\beta = 0$, $b = \varepsilon$ or $\varepsilon + 1$; $\beta \neq 0$, $b = 1$. Hence, by (44), $D = 0$, $\delta = \varepsilon$ or $\varepsilon + 1$; or $D \neq 0$, $\delta = 1$. For $\beta = 0$, $b = \varepsilon$, (48) now gives $\beta' = st\delta + t^2 d + t^2 D^2$. Since s enters linearly and $\delta \neq 0$, we can make β' arbitrary by choice of s, t. Hence all the cases can be derived from the case $\beta = 0$ by a transformation of units. Now which of the roots of the irreducible congruence is designated by ε, and thus the other by $\varepsilon + 1$, is a matter of notation. Hence we may set $\beta = 0$, $b = \varepsilon$. Then (37) for $A = 1$, $a = \alpha = B = 0$, gives

(51) $$\Delta = r^3 + r^2tD + rst\delta + rt^2d + s^3\varepsilon + t^3\delta\varepsilon + t^2sD\varepsilon + s^2td.$$

For $D = 0$, $\delta = \varepsilon$, set $s = 0$; then $\Delta = r^3 + rt^2d + t^3\varepsilon^2$, which is irreducible only when $d = 0$; hence by (50) the algebra is

1) See the remarks at the end of the paper.

the $GF[2^6]$. For $D=0$, $\delta=\varepsilon+1$, $s=0$ gives $\Delta=r^3+rt^2d+t^3$, whence $d\neq 0$; $r=0$ gives $\Delta=t^3+ts^2d+s^3\varepsilon$, whence $d=0$. For $D\neq 0$, $\delta=1$, $r=0$ gives $\Delta=\varepsilon(s^3+s^2td\varepsilon^2+st^2D+t^3)$, which has the factor $s+t$, $s+\varepsilon t$, or $s+\varepsilon^2 t$ if $d\varepsilon^2+D=0$, $d\varepsilon+D\varepsilon=0$, or $d+D\varepsilon^2=0$, respectively. Hence must $d=0$. Then for $s=0$, $\Delta=\varepsilon(t^3+tr^2D\varepsilon^2+r^3\varepsilon^2)$, which is reducible since $D\neq 0$. Hence an algebra of 4^3 elements is the $GF[2^6]$.

The case of modulus 2 is exceptional here, just as in Case I. In fact, it is shown below that if F does not have modulus 2 there exists an algebra not a field. I first give in brief the computation that led me to discover this algebra, and that seems to indicate its uniqueness. The most important remark in the direction of simplifying the work is that we may give to β and b any fixed pair of marks such that $\varrho^3-\varrho\beta+b$ is irreducible in F. While this could doubless be proved directly [1]) (as in the preceding case) by means of the transformation (45), leading to (48) and (49), it follows indirectly from the existence and the uniqueness of the $GF[p^n]$, so that a root of one irreducible congruence of the n^{the} degree is expressible is a polynomial function of a root of any other, and hence as a linear function of our units $1, i, j=i^2, \cdots$.

Let F be the $GF[5]$. We may set [1]) $\beta=1$, $b=2$. By a consideration of the possible linear factors, I find that x^3+kx+c is irreducible modulo 5 if and only if $c^2\equiv 2k-k^3$, $k\not\equiv 0 \pmod 5$. It follows that $y^3+\lambda y^2+\mu y+\nu$ is irreducible modulo 5 if and only if

$$(52)\qquad (\nu+\lambda^3-2\lambda\mu)^2 \equiv 2(\mu-2\lambda^2)-(\mu-2\lambda^2)^3,\ \lambda,\ \mu \text{ not both} \equiv 0.$$

Since $(47)_2$ is satisfied, Δ vanishes for $t=0$ only when $r=s=0$. Hence there remains the case $t\not\equiv 0$, so that we may set $r=yt$, $s=\sigma t$. Then Δ becomes $y^3+\lambda y^2+\mu y+\nu$, where

$$\lambda\equiv D+1,\ \mu\equiv D-d-\sigma^2-\sigma(\delta-1),\ \nu\equiv 2\sigma^3+\sigma^2 d-2\sigma D+2\delta-d.$$

Substituting these in [2]) (52), and reducing mod. 5, we get $\sum_{i=0}^{4} c_i\sigma^i$, where

$$c_4\equiv d^2+2\delta^2-2D^2-Dd-2D\delta-2D+d-\delta+2,$$

1) I carried out the proof in full for F the $GF[5]$. For the $GF[3^n]$ the transformation (45) leads to (62) and is easily handled. I have proved the result directly for $n=1, 2$.

2) Note that $\mu\neq 0$ for every σ.

the values of the other c_i not being used. Hence must $c_4 \equiv 0$. Next, by (47), it must be impossible to find values of s, t making $\beta' \equiv 0$ in (48), since $\varrho^3 + b'$ is reducible modulo 5 for every b'. Hence the discriminant of the quadratic form (48) must be a quadratic non-residue of 5. Hence, incorporating $(47)_1$, we have

$$(53) \qquad d \not\equiv 2\delta, \quad (\delta-1)^2 - 4[d + 2(1 - D + D^2)] \equiv \pm 2 \pmod 5.$$

Finally, by (44), $x^3 + x(D-2) - \delta$ must be irreducible. Hence

$$D \not\equiv 2, \quad \delta^2 \equiv 2(D-2) - (D-2)^3 \pmod 5.$$

Thus if $D \equiv 0$ or 1, $\delta^2 \equiv 4$; if $D \equiv 3$ or 4, $\delta^2 \equiv 1$. For $D \equiv 0$, $\delta \equiv 2$, (53) gives $d \equiv 0$, whence $c_4 \equiv 3$. For $D \equiv 0$, $\delta \equiv 3$, then $d \equiv 2$, $c_4 \equiv 3$. For $D \equiv 1$, $\delta \equiv 2$, then $d \equiv 0$, giving the $GF[5^3]$ by (50). For $D \equiv 1$, $\delta \equiv 3$ then $d \equiv 2$, $c_4 \equiv 1$. For $D \equiv 4$, $\delta \equiv 1$ then $d \equiv 1$, $c_4 \equiv 3$. For $D \equiv 4$, $\delta \equiv 4$, then $d \equiv 2$, $c_4 \equiv 1$. For $D \equiv 3$, $\delta \equiv 1$, then $d \equiv 3$ or 4, $c_4 \equiv d^2 - 2d - 2 \not\equiv 0$. Finally, for $D \equiv 3$, $\delta \equiv 4$, then $d \equiv 0$ or 4, $c_4 \equiv d^2 - 2d + 2$; hence $d \equiv 4$. For $D \equiv 3$, $\delta \equiv 4$, $d \equiv 4$, I verified that also $c_3 \equiv c_2 \equiv c_1 \equiv c_0 \equiv 0$, thus leading to the non-field algebra

$$(54) \qquad i^2 = j, \; ij = ji = 2 + i, \; j^2 = 4 + 4i + 3j \pmod 5;$$

$$(54') \qquad \Delta' = r^3 - r^2t - rs^2 - 3rst - rt^2 + 2s^3 - s^2t - st^2 - t^3.$$

The $GF[5^3]$ differs form (54) in having $j = 2i + j$, and

$$(55) \qquad \Delta = r^3 + 2r^2t - rs^2 - rst + rt^2 + 2s^3 - 2st^2 - t^3.$$

Since division is always possible in the $GF[5^3]$, $\Delta = 0$ only when $r = s = t = 0$. To prove the same for Δ', we note that Δ becomes Δ' when r and t are replaced by $r + t$ and $3t$, respectively, in Δ.

Let F be the $GF[7]$. Since $x^3 = 2 \pmod 7$ is irreducible, we may set $\beta = 0$, $b = 2$. Now (44), with $B = 0$, must be irreducible. But $x^3 + Dx - \delta$ has a linear factor modulo 7 if and only if $D = \pm\delta - 1$, $\pm 3\delta - 4$, or $\pm 2\delta - 2$. Hence irreducibility happens only when $\delta = \pm 1$, $D = 1$, 2, or 4; $\delta = \pm 2$, $D = -1$, -2, -4, or 0; $\delta = \pm 3$, $D = 0$. A synthesis of these shows that $x^3 + Dx - \delta$ is irreducible modulo 7 if and only if[1]).

$$(56) \qquad D^6(6\delta^4 + 3\delta^2 + 5) + D^3(\delta^4 + \delta^2 + 2) + \delta^4 + \delta^2 + 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

The argument for $p = 5$ leading to (53), cannot not be used.

---

1) It is simpler to apply the double criterion: $\delta^2 \equiv 2D^3 - 1$ if $D \not\equiv 0$; $\delta^2 = 2$ or 4 if $D = 0$.

But we need examine only one-third of the total number of cases; for $I = si$, $J = s^2j$, where $s^3 \equiv 1 \pmod 7$, $I^2 = J$, $IJ = 2$, $J^2 = sd + \delta I + s^2DJ$, so that we can multiply d by s and D by s^2. In Δ set $s = \sigma t$, $r = (y+2D)t$; then

$$\Delta/t^3 = Q = y^3 + (2D^2+\mu)y + (\nu + 2D\mu - 2D^3),$$

$$\mu = -d + \sigma(3-\delta), \quad \nu = 2\sigma^3 + \sigma^2 d - 2\sigma D + 2\delta.$$

If $\delta = 3$, $D = 0$, we may set $d = 1, -1$, or 0. Now $Q = y^3 - dy + 2\sigma^3 + \sigma^2 d - 1$ vanishes for $d = 1$, $\sigma = 0$, $y = -2$; $d = -1$, $\sigma = 1$, $y = 0$; $d = 0$, $\sigma = 1$, $y = -1$. For $\delta = -3$, $D = 0$, we get $Q = 0$ if $(d, \sigma, y) = (1,-1,0)$, $(-1,-1,-2)$, $(0,0,-1)$. For $\delta = 1$, we may set $D = 1$; then $Q = 0$ for $(d, \sigma, y) = (0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(-1,-1,2)$, $(2,1,2)$, $(-2,0,4)$, $(3,-2,0)$, $(-3,2,0)$. For $\delta = -1$, we may set $D = 1$; then $Q = 0$ for $(d, \sigma, y) = (0,0,-1)$, $(1,1,2)$, $(-1,-1,4)$, $(2,0,1)$, $(-2,0,0)$, $(3,0,3)$, $(-3,1,0)$. For $\delta = \pm 2$, we may set $D = -1$ or 0. For $\delta = 2$, $D = -1$, $Q = 0$ if $(d, \sigma, y) = (0,1,4)$, $(1,-1,0)$, $(-1,0,-1)$, $(2,1,0)$, $(3,-1,-1)$, $(-3,0,0)$. For $\delta = -2$, $D = -1$, $Q = 0$ for $(d, \sigma, y) = (0,1,0)$, $(1,1,4)$, $(-1,0,-1)$, $(2,1,-1)$, $(-2,0,1)$, $(3,1,1)$, $(-3,0,0)$. For $\delta = \pm 2$, $D = 0$, we may set $d = 1, -1$, or 0. For $\delta = 2$, $D = 0$, $Q = 0$ for $(1,1,0)$ and $(-1,0,2)$; for $d = 0$, we obtain the $GF[7^3]$ by (50). For $\delta = -2$, $D = 0$, $Q = 0$ for $(1,0,4)$ and $(-1,0,-2)$; for $d = 0$, $Q = y^3 - 2\sigma y + 2\sigma^3 - 4$ is irreducible for every σ, since $(2\sigma^3-4)^2 \equiv 2(-2\sigma)^3 - 1$ if $\sigma \neq 0$, while $y^3 \not\equiv 4$. Hence the single non-field algebra (given by $\delta = -2$, $D = 0$, $d = 0$) is

$$(57) \quad i^2 = j,\ ij = ji = 2,\ j^2 = -2i,\ \Delta' \equiv r^3 + 2s^3 - 4t^3 - 2rst \pmod 7.$$

The $GF[7^3]$ has $j^2 = 2i$, $\Delta = r^3 + 2s^3 + 4t^3 - 6rst$. If in Δ we replace t by $-2t$, we obtain Δ'; we have thus an indirect proof that $\Delta' \equiv 0$ only if $r \equiv s \equiv t \equiv 0 \pmod 7$.

Let F be the $GF[11]$. For each value of $\mu \neq 0$ there are four values of λ for which $x^3 + \lambda x + \mu$ is irreducible modulo 11, viz., $\lambda = 4\rho, 5\rho, -4\rho, -3\rho$, where $\rho = \sqrt[3]{\mu^2}$. Note that there is a unique cube root of every integer modulo 11. We may take $b = 1$, $\beta = 3$. By (44), $y^3 + y(D-6) - \delta$ must be irreducible. Hence the possible values of δ, D are

(58)

δ	D
± 1	$-1,\ 0,\ 2,\ 3$
± 2	$-3, -2,\ 2,\ 4$
± 3	$0,\ 1,\ 4,\ 5$
± 4	$-4, -3, -1,\ 5$
± 5	$-4, -2,\ 1,\ 3$

Since $\rho^3 + b'$ is always reducible, $\beta' \neq 0$ by (47). Hence the quadratic form (48) must have its discriminant a not-square:

$$(59) \qquad (\delta+2)^2 - d - 4(9 - 3D + D^2) \equiv 2,6,7,8 \text{ or } 10 \pmod{11}.$$

Setting $s = \sigma t$, $r = (y - 1 - 4D)t$, we get Δ/t^3 in the form

$$(60) \qquad y^3 + y[D - 4D^2 - 3 - d - 3\sigma^2 - \sigma(\delta+2)] + \sigma^3 + \sigma^2(d + D + 3) \\ + \sigma(\delta + 2 + 4\delta D - 4D) + \delta - 2d + 4dD - 4D^3 - 4D^2 - D + 2.$$

I have examined completely the cases $\delta = \pm 1, \pm 3$ of the table (58), for which (59) holds and $d \neq 4\delta$ by $(47)_1$, and proved that (60) vanishes for suitably chosen values of y and σ except when $\delta = 1$, $D = 3$, $d = 0$, leading to the $GF[11^3]$ by (50), and when $\delta = 3$, $D = 5$, $d = 2$, leading to the non-field algebra

$$(61) \qquad i^2 = j,\ ij = ji = 1 + 3i,\ j^2 = 2 + 3i + 5j, \quad \text{modulo } 11,$$

$$(61') \qquad \Delta' = r^3 - 3r^2t + 2rt^2 - 3rs^2 - 5rst + s^3 + 2s^2t - 5st^2 - 3t^3.$$

For the $GF[11^3]$, $\Delta = r^3 + 6r^2t - 2rt^2 - 3rs^2 - 3rst + s^3 - 3st^2 + t^3$. If in Δ we replace r by $r + 3t$, t by $-2t$, we get Δ'. Hence $\Delta' = 0$ only when $r = s = t = 0$.

Finally, let F be the $GF[3^n]$, a case excluded in deriving (48) and (49). We have $B = 0$. To make $B' = 0$ in (46), set $t(\beta + D) = 0$. If $\beta + D = 0$, $C \equiv s^3 - t^3\delta$ would be reducible, contrary to (44). Hence we set $t = 0$, $s \neq 0$. Then $X = r^3 + bs^3$, $Y = \beta s^2$, $Z = 0$, whence

$$(62) \qquad b' = K = r^3 - rs^2\beta + s^3 b,\ \beta' = \beta s^2.$$

There exists a cubic $x^3 - x - c$ irreducible in the $GF[3^n]$; if n is not divisible by 3 we may take $c = -1$ (Linear Groups, p. 29). For the cases $n = 1$ and $n = 2$, here treated completely, we may therefore set $\beta = b = 1$. Thus $i^2 = j$, $ij = 1 + i$,

$j^2 = d + \delta i + Dj$. A special case of transformation (45) is $I = i-1$ $J = j+i+1$. Then

63) $I^2 = J,\quad IJ = I+1,\quad J^2 = DJ+(1+\delta-D)I+1+d+\delta+D.$

Let first $n = 1$. Then (44) is irreducible only when $D \equiv 1$, $\delta \equiv \pm 1 \pmod 3$. If $\delta \equiv -1$, we can by (63) replace d by $d+1$ (mod 3) in our initial relations; by a repetition of the transformation, we obtain $d \equiv \delta$, a case excluded by $(47)_1$. Hence $\delta \equiv 1$, $d \equiv 0$ or -1. The case $d \equiv 0$ gives the $GF[3^3]$ with

$$(64)\qquad \Delta \equiv r^3+s^3+t^3+rt^2-r^2t-t^2s-rs^2.$$

The case $d \equiv -1$ leads to the non-associative algebra

$$(65)\qquad i^2 = j,\quad ij = ji = i+1,\quad j^2 = i+j-1,$$

$$(65')\qquad \Delta' \equiv r^3+s^3-t^3-rt^2-r^2t-t^2s-rs^2-ts^2.$$

Indeed, by replacing r by $r+t$ in Δ, we obtain Δ' modulo 3.

Let next $n = 2$ and define the $GE[9]$ by $\rho^2 \equiv -1 \pmod 3$. By (44), $x^2+x(D+1)-\delta$ must be irreducible in the $GF[9]$. This requires that $(D+1, \delta) = (1, u\pm\rho)$, $(-1,\ \pm 1+v\rho)$, or $(\pm\rho,$ $w+v\rho)$, where $w \neq \pm v$, u, v, w being integers modulo 3. Of two cases which differ only in the sign of ρ, one may dropped in view of the defining congruence.

For $D = 0$, $\delta = u+\rho$, we apply (63) and have δ replaced by $\delta+1$, and ultimately by $\delta+u$. Hence we may set $D = 0$, $\delta = \rho$, and $d \neq \rho$ by $(47)_1$. Now, for $t = 1$, Δ becomes

$$\Delta_1 = r^3+r^2-rd-rs(\rho-1)-rs^2+s^3+s^2d+\rho-d.$$

For any d, we can make $\Delta_1 = 0$. For $d = -1,\ -\rho,\ 1-\rho$, $1+\rho,\ -1-\rho$, we take $s = 0$, $r = 1+\rho,\ -\rho,\ 1,\ -1+\rho,\ -1-\rho$, respectively. For $d = 0,\ 1,\ -1+\rho$, we take $s = 1$, $r = 1$, $1-\rho,\ -1$, respectively

For $D = 1$, $\delta = \pm 1 + v\rho$, we apply (63) and have d replaced by $d+\delta-1$, δ being unaltered. Hence we may add $\delta-1$ or $2(\delta-1)$ to d. If $v = 0$ and $\delta = -1$, we may therefore set $d = 0$ or $d = \rho$; then $\Delta = 0$ for $t = 1$, $r = 1$, $s = -1$, or $t = 1$, $r = 0$, $s = 1+\rho$, respectively. If $v \neq 0$, we can make d integral. If $d = 1$, $\Delta = 0$ for $r = s = t$. If $d = -1$, $\delta = 1+\rho$, $\Delta = 0$ for $r = 0$, $s = -\rho t$. If $d = -1$, $\delta = -1+\rho$, $\Delta = 0$ for $r = (1+\rho)t$, $s = -\rho t$. If $d = 0$, $\delta = 1+\rho$, $\Delta = 0$ for $r = (-1+\rho)t$, $s = \rho t$. If $d = 0$, $\delta = -1+\rho$, $\Delta = 0$ for $r = -t$, $s = \rho t$. Finally, let $v = 0$, $\delta = 1$. Then

$d \neq 1$ by (47). For $d = \rho$, $\rho-1$, $\rho+1$, we take $r = 0$, $s = (\rho-1)t$; $r = 0$, $s = -\rho t$; $s = 0$, $r = -\rho t$, respectively, and get $\Delta = 0$. For $d = 0$, we have the $GF[9^3]$ by (50). For $\delta = 1$, $d = -1$, Δ is given by (65'); it vanishes only when $r = s = t = 0$ in the $GF[9]$. Indeed, the argument from (64) holds since x^3-x+1 is irreducible in the $GF[9]$ as well as modulo 3.

Finally, for $D = \rho-1$, $\delta = w+v\rho$, $v \neq w$, we apply (63) and have δ and d replaced by $\delta-\rho-1$ and $d+\delta+\rho$. Hence we can make δ an integer $\neq 0$. For $\delta = 1$, we have $d \neq 1$ and

$$\Delta = r^3+\rho r^2t+rt^2(\rho-1-d)-rs^2+s^3+s^2td-st^2(\rho-1)+t^3(1-d).$$

But $\Delta = 0$ for $t = 1$ and $(d, r, s) = (0, 0, -\rho)$, $(-1, 1, \rho+1)$, $(\rho, \rho, \rho-1)$, $(-\rho, 0, \rho+1)$, $(\rho+1, \rho, 1)$, $(\rho-1, 1, 1)$, $(-\rho+1, 0, \rho-1)$, $(-\rho-1, 1, \rho-1)$. For $\delta = -1$, we set $t = 1$ and have $\Delta = 0$ for $(d, r, s) = (0, 0, \rho)$, $(1, \rho+1, -\rho+1)$, $(\rho, 0, \rho-1)$, $(-\rho, 1, \rho+1)$, $(\rho+1, 1, 0)$, $(\rho-1, \rho, 0)$, $(-\rho+1, -\rho, 0)$, $(-\rho-1, -\rho, \rho-1)$.

Hence for $n = 2$, the algebra is the $GF[3^6]$ or the non-field (65).

We may now make a synthesis of the unique non-field algebras obtained when F is the $GF[p]$, $p = 3, 5, 7, 11$, or the $GF[3^2]$. Now for $i^2 = j$, $ij = b+\beta i$, we have $a = \alpha = B = 0$, $A = 1$; then the determinant of (37), written in primes, is

$$(66) \qquad r^3+r^2t(\beta'+D')+rt^2(\beta'D'-d')-rs^2\beta'-rst(\delta'+2b') \\ +s^3b'+s^2td'-st^2b'D'+t^3(b'\delta'-d'\beta').$$

Letting $d' = 0$, $\delta' = b'$, $D' = \beta'$, and dropping the primes, we obtain

$$(67) \qquad \Delta = r^3+2r^2t\beta+rt^2\beta^2-rs^2\beta-3rstb+s^3b-st^2b\beta+t^3b^2,$$

the determinant for the field-algebra defined by the equation $x^3-\beta x-b$ irreducible in F. Now for the above five special cases of F, the determinant Δ' for the non-field algebra may be derived from Δ by replacing r by $r+\beta t$, t by $-2t$. Making this replacement in (67), we get

$$(68') \quad \Delta' = r^3-r^2t\beta-rt^2\beta^2-rs^2\beta+6rstb+s^3b-s^2t\beta^2+2st^2b\beta+(\beta^3-8b^2)t^3.$$

Now Δ' is identical with (66) if and only if $b' = b$, $d' = -\beta^2$, $\beta' = \beta$, $D' = -2\beta$, $\delta' = -8b$. Hence division is always uniquely possible in the non-field algebra

(68) $$i^2 = j,\ ij = ji = b+\beta i,\ j^2 = -\beta^2 - 8bi - 2\beta j,$$

with $x^3-\beta x-b$ irreducible in F, where F is any field not having modulus 2.

The problem of triple algebras may be attacked differently. Let

(69) $$i^2 = j,\ ij = ji = b+\beta i,\ \ j^2 = d+\delta i+Dj.$$

The equation satisfied by a number M of the algebra is

(70) $$\begin{vmatrix} r-M & s\ t \\ r'-M^2 & s'\ t' \\ r''-M^3 & s''\ t'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{aligned} M &= r+si+tj\,, \\ M^2 &= r'+s'i+t'j\,, \\ M^3 &= r''+s''i+t''j\,. \end{aligned}$$

The coefficient of $-M^3$ equals $C \equiv s^3+st^2(D-2\beta)-\delta t^3$. We find that the coefficients of M^2, M, M^0 are divisible by C, so that

(71) $$C\left\{-M^3+M^2[3r+(\beta+D)t]+MR+\Delta\right\} = 0,$$

where Δ is given by (66) with the accents dropped, and

(72) $$R = \beta s^2+(d-\beta D)t^2+(\delta+2b)st-3r^2-2(\beta+D)rt = -\frac{\partial\Delta}{\partial r}.$$

Since $B=0$, C is the cubic (44). The connection with (46), (48), (49) is obvious; for $r = -\frac{1}{3}(\beta+D)t$, R becomes (48), and Δ becomes (49). Finally, if we set $M = \mu+r$, the second factor in (71) becomes the cubic form Δ with $-\mu$ written for r. Hence from the present view, as from the earlier, the problem reduces to the study of cubic forms Δ which vanish only when all three variables vanish.

The University of Chicago, April, 1905.

Ueber Pyroelectricität an centrisch-symmetrischen Krystallen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Juli 1905.

I. Entwickelung des Problems.

1. Krystalle ohne Symmetriecentrum sondern sich bekanntlich nach ihrer pyroelectrischen Erregbarkeit in zwei Gruppen. Diejenigen Krystalle, welche eine einseitige ausgezeichnete Richtung, z. B. eine ausgezeichnete polare Symmetrieaxe besitzen, werden durch gleichförmige Temperaturänderungen erregt, die übrigen nur durch ungleichförmige. Die letzteren erfahren dabei die Erregung nur in Folge der die Erwärmung begleitenden Deformation, und zwar ebenso, als wenn dieselbe auf mechanischem Wege bei ungeänderter Temperatur hervorgerufen würde; die Erregung der ersteren enthält im Allgemeinen einen Antheil, der von der die Erwärmung begleitenden Deformation unabhängig ist und auch dann bestehen bleibt, wenn die Deformation durch mechanische Mittel aufgehoben ist.

Diesen Vorgängen, die ich hier kurz als polare Pyroelectricität bezeichnen will, und deren allgemeine Gesetze ich vor ziemlich langer Zeit entwickelt habe[1]), stehen nun sehr merkwürdige thermische Electricitätserregungen an centrischen Krystallen gegenüber, die sich den bisher angewandten Erklärungsprincipien nicht fügen. Da sie centrische Symmetrie besitzen, werde ich sie zunächst alle kurz als centrische Pyroelectricität bezeichnen und erst später untersuchen, ob darunter einige und

1) W. Voigt, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. 36, 1, 1890; Wied. Ann. 55, 701, 1895.

welche wirklich, nämlich in den kleinsten Theilen centrische Erregungen repräsentiren.

Die Beobachtungen über centrische Pyroelectricität sind außerordentlich zahlreich. Entdeckt ist die Erscheinung 1760 von Canton am brasilianischen Topas, bestätigt an diesem Körper und aufgefunden an einigen weiteren 1801 durch Hauy; an vielen Krystallen, z. B. Flußspath, Granat, Kalkspath, Beryll, Schwerspath fand sie 1817 und 1818 Brewster, dessen Wahrnehmungen 1843 zum Theil von Rieß und Rose bestätigt wurden [1]).

Jahrzehntelange Arbeit hat der Pyroelectricität der Krystalle überhaupt, und besonders auch der centrischen, Hankel [2]) gewidmet, und wenn auch die von ihm hauptsächlich angewandte Beobachtungsmethode vom Standpunkt der Theorie aus wenig glücklich ist, und seine Bestrebungen, die Erscheinungen zahlenmäßig zu fassen, wenig Resultat gehabt haben, so haben seine Untersuchungen doch nach der quantitativen Seite hin viel Wichtiges ergeben und jedenfalls die große Häufigkeit des Vorkommens centrischer Pyroelectricität gezeigt.

2. Da auf die Hankelschen Resultate mehrfach zurückzugreifen sein wird, so mag erwähnt werden, daß bei den wichtigsten seiner Beobachtungen der Krystall bis auf die zu untersuchende Fläche oder Kante in Kupferfeilicht eingebettet in einem Luftbad erwärmt wurde; nach Erreichung der gewünschten Temperatur wurde behufs Entfernung der anfänglichen Oberflächenladungen die Krystallfläche oder Kante mit einer Flamme überstrichen, dann das System — mitunter durch Stellen der das Kupferfeilicht enthaltenden Schale auf eine kalte Metallmasse — zur Abkühlung gebracht. Während der letzteren geschahen die Messungen der auf der Fläche oder Kante scheinbar auftretenden Ladungen, und zwar in der Weise, daß verschiedenen Stellen ein mit einem Hankelschen Electrometer verbundener Platindraht bis auf eine nahezu constante Entfernung genähert wurde; seine Influenzirung durch den Krystall machte sich am Electrometer geltend. Durch cy-

---

1) Genaueres über die älteren Beobachtungen findet sich in den unten citirten Hankelschen Abhandlungen, insbesondere Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. in Leipzig, **10**, 345, 1872.

2) W. Hankel, Promotionsschrift, Halle 1839, Habilitationsschrift ebd. 1840; Pogg. Ann. **49**, 493, 1840; **50**, 237, 1840; **56**, 37, 1842; **61**, 281, 1844; **74**, 231, 1848; Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, **4**, . . ., 1859; **8**, 323, 1866; **9**, 357, 1871; **10**, 273, 345, 1874; **11**, 477, 1878; **12**, 3, 203, 1879; **14**, . . 1881.

klische Wiederholung der auf ein Object bezüglichen Messungen wurde versucht, alle Zahlen auf denselben Zeitpunkt zu reduciren.

Die Einhüllung des Krystalles in einen Leiter sollte offenbar die Ladungen einer Fläche oder Kante für sich allein zur Geltung bringen, und sie würde diesen Zweck auch bis zu einem gewissen Grade erreicht haben, wenn, wie Hankel angenommen zu haben scheint, die scheinbaren Ladungen wirklich nur auf der Oberfläche des Krystalles erschienen. Das ist nun aber bekanntlich durchaus nicht stets der Fall; es gilt vielmehr wahrscheinlich blos bei gleichförmiger Erwärmung von acentrischen Krystallen; ist es aber nicht der Fall, so complicirt der einhüllende Leiter nur den Vorgang und erschwert dessen theoretisches Verständniß. Und selbst die scheinbare Ladung der frei gehaltenen Oberfläche wird durch die Einhüllung verändert; offenbar influenziren die Randtheile der Fläche relativ stark die unmittelbar benachbarten Leitertheile und die Beobachtung wird demgemäß die Ladungen aller Randstellen gegenüber denen der Flächenmitten zu klein geben.

Wenn dann Hankel die auf seine Weise erhaltenen Zahlen in das Netz des beobachteten Krystalles einträgt und dadurch den Anschein erweckt, als ständen diese Zahlen alle miteinander in einem inneren Zusammenhang, so ist hierauf natürlich nichts zu geben. Für das Verständniß und eine eventuelle Erklärung des Vorganges hat man immer in Betracht zu ziehen, daß jede Fläche oder Kante einzeln beobachtet ist, während die ganze übrige Oberfläche des Krystalles mit einer zur Erde abgeleiteten leitenden Hülle umgeben war.

Die letzten ausgedehntesten Beobachtungen Hankels nach der beschriebenen Methode bezogen sich in chronologischer Folge auf Boracit, Bergkrystall, Topas, Schwerspath, Aragonit, Kalkspath, Beryll, Idocras, Apophyllit, Gyps, Diopsid, Orthoklas, Albit, Periklin, Apatit, Brucit, Coelestin, Prehnit, Natrolith, Skolezit, Datolit, Axinit, Flußspath, Seignettesalz — also auf eine große Reihe von Körpern, unter denen die Mehrzahl centrischsymmetrisch ist. Bei Flußspath glaubte Hankel auch eine directe photoelectrische Wirkung gefunden zu haben, die von anderer Seite bestritten ist, und auf die wir jedenfalls nicht eingehen.

3. Was die von Hankel über die Pyroelectricität an centrischen Krystallen erhaltenen Resultate angeht, so haben sich — allerdings durch Störungen vielfach verwischt — gewisse Gesetzmäßigkeiten unzweifelhaft ergeben. Die electrische Erregung findet insbesondere bei steigender und bei fallender Temperatur in entgegengesetztem Sinne

statt, sie schließt sich der Krystallsymmetrie, soweit es sich um ausgebildete natürliche Flächen handelt, gut an, ist also, wo solche in centrisch-symmetrischer Stellung auftreten, auch centrisch symmetrisch. Einige Krystalle, so z. B. Flußspath, Apatit, Aragonit, Schwerspath zeigen diese Regelmäßigkeit in ganz hervorragender Weise, sodaß an einem wohl definirten physikalischen Phänomen nicht zu zweifeln ist.

Neben diesen Gesetzmäßigkeiten treten sonderbare Unregelmäßigkeiten auf. Zufällige oder beabsichtigte Beschädigungen des Krystalles liefern auf den neuen Flächen Erregungen, die vielfach ganz ohne Zusammenhang mit den ursprünglich in der Umgebung beobachteten zu sein scheinen und auch durch die systematischen Versuche, die Hankel in dieser Richtung am Topas vorgenommen hat [1], nicht in klare und allgemeine Regeln gefaßt werden konnten. Außerdem macht sich ein überaus großer Einfluß des Vorkommens eines Minerales geltend, derart, daß derselbe Körper je nach den Fundorten sich sehr stark oder (besonders bei sehr reinen Varietäten) ganz unmerklich, in einem oder im entgegengesetzten Sinne erregbar erweist; in der That ist Hankel bei vielen der beobachteten Krystalle genöthigt, sie in Gruppen verschiedenen Verhaltens zu theilen, die im allgemeinen mit denen der Herkunft in naher Beziehung stehen.

Angesichts der bedeutenden quantitativen Unterschiede, welche die polare electrische Erregbarkeit des Turmalins je nach dem Vorkommen (und damit zusammenhängend der Farbe) zeigt [2], könnten starke quantitative Verschiedenheiten der Erregbarkeit centrischer Krystalle nicht allzusehr überraschen. Es scheinen eben bei den electrischen Erscheinungen hier, wie in anderen Gebieten, geringe fremde Beimengungen sehr großen Einfluß auszuüben. Die großen qualitativen Unterschiede bieten aber natürlich für die Deutung eine gewisse Schwierigkeit. —

4. Unter den von Hankel untersuchten centrischen Krystallen hat besonders der Topas noch anderweite Bearbeitung gefunden. Friedel und Curie [3]) benutzten eine von dem Ersten von ihnen auch anderweit angewandte Methode, den kalten Krystall durch eine auf eine seiner Flächen aufgelegte erhitzte metallische Halbkugel oder dergl. einseitig zu erwärmen; es war dann entweder

1) H. Hankel, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. **9**, 438, 1871.
2) E. Riecke, Wied. Ann. **40**, 264, 1890.
3) C. Friedel u. J. Curie, C. R. **100**, 213, 1885.

der Hitzkörper oder eine Belegung derjenigen Fläche, welche der erhitzten gegenüberlag, in Verbindung mit dem Electrometer. Die Methode hat kaum etwas vor der Hankelschen voraus; insbesondere ist die erzeugte Temperaturvertheilung noch viel weiter davon entfernt, gleichförmig zu sein, und bei piezoelectrisch erregbaren Körpern entstehen dadurch ungemeine Complicationen der Einwirkungen.

Trotzdem sind einige der von den genannten Forschern erhaltenen Resultate von Bedeutung und bezeichnen Hankel gegenüber Fortschritte. Es war längst bekannt, daß basische Platten aus brasilianischen Topasen sich im polarisirten Lichte nicht homogen erweisen, sondern eine Feldertheilung zeigen — häufig so, daß um ein centrales, etwa rhombisch gestaltetes Feld vier trapezförmige sich symmetrisch gruppiren. Die Polarisationsrichtungen in dem centralen Felde sind normal, d. h. entsprechen der Krystallform, die in den äußeren sind anormal, nämlich in symmetrischer Weise gegen die Axen geneigt.

Friedel und Curie vermutheten einen Zusammenhang zwischen dieser Feldertheilung und dem pyroelectrischen Verhalten, und es gelang ihnen, nachzuweisen, daß die den Feldern entsprechenden Theile einer basischen Topasplatte acentrisch pyroelectrisch erregt werden, und daß nur durch die centrische Gruppirung der acentrischen Theile der Schein einer centrischen Erregung entsteht.

Im Uebrigen bestätigten sie die Resultate Hankels bezüglich der überaus großen Verschiedenheit der Erregbarkeit der Krystalle verschiedener Vorkommen und Färbungen.

Von großem Interesse ist die Bemerkung, daß die durch Zerlegung eines Krystalles erhaltenen angenähert homogenen Theile sich als piezoelectrisch erregbar erwiesen haben. —

Wenngleich nur zur qualitativen Orientirung über electrische Erregungen an Krystallen geeignet, hat doch das von Kundt[1]) erdachte Bestäubungsverfahren dem Studium der Pyroelectricität ein überaus nützliches Beobachtungsmittel geliefert. Ein Hauptvortheil desselben liegt darin, daß es den Zustand der ganzen Oberfläche des Krystalles in einem bestimmten Zeitpunkt zur Anschauung bringt, allerdings nicht in der hier und da ausgedrückten Weise, daß die Vertheilung des Mennige- und Schwefelpulvers direct die Vertheilung der oberflächlichen Ladungen wiedergäbe, aber doch in der nicht minder wichtigen Art, daß dieselbe den Richtungssinn — und bis zu einem gewissen Grade

1) A. Kundt, Wied. Ann. 20, 592, 1883.

Dichte und Richtung selbst — der Kraftlinien in dem vom Krystall ausgehenden Felde zu beurtheilen gestattet. Denn es muß immer wieder betont werden, daß die scheinbaren Ladungen der pyroelectrisch erregten Krystalle im Allgemeinen nicht nur auf deren Oberfläche liegen.

Von den Anwendungen des Kundtschen Verfahrens auf pyroelectrische Erregung gehört hierher insbesondere die ausführliche Beobachtungsreihe, die Mack (nach einer uns bis zu einem gewissen Grade gleichfalls interessirenden Untersuchung des acentrisch krystallisirenden Boracit[1])) am brasilianischen Topas[2]) durchgeführt hat. Er fand gleich Friedel und Curie, daß bei Topas, wie bei Boracit, ein Zusammenhang zwischen dem pyroelectrischen und dem anormalen optischen Verhalten besteht; beide Krystalle bestehen aus Theilen, die sich optisch different verhalten, und diese Theile sondern sich auch pyroelectrisch, derart, daß jedes optisch homogene Stück electrisch polar erregt wird, analog wie ein acentrischer Krystall.

Beobachtungen von Beckenkamp[3]) an Aragonit und Baryt nach der Kundtschen Methode stimmen in ihren Resultaten im Allgemeinen mit den von Hankel erhaltenen überein.

5. Für eine Erklärung der pyroelectrischen Erregungen centrischer Krystalle giebt es nur ganz vereinzelte Versuche, die nirgends zu quantitativen Gesetzen geführt haben. Hankel hält sich, soweit ich sehe, ausnahmslos an das Thatsächliche und abstrahirt daraus die allgemeine Regel, daß ein Krystall keineswegs in allen Theilen gleichartig wäre, sondern einen aus ungleichartigen Theilen aufgebauten Organismus darstelle, eine Anschauung, die mit Ideen von Mallard u. A. verwandt, aber den sonst in der Krystallphysik mit größtem Erfolg benutzten diametral entgegengesetzt ist und jedenfalls in dieser schroffen Form sehr bedenklich erscheint.

Mack[4]) stellt sich auf den Boden der Hypothesen von C. Klein, welche die optischen Anomalien der Krystalle durch innere Spannungen erklären, und vermuthet auf Grund der oben erörterten Zusammenhänge zwischen diesen Anomalien und den pyroelectrischen Erregungen, sowie der von den Gebrüdern Curie vertretenen Identität von Piezo- und Pyroelectricität, daß die

1) K. Mack, Wied. Ann. **21**, 410, 1884.
2) K. Mack, Wied. Ann. **28**, 153, 1886.
3) J. Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. **19**, 247, 1891, **28**, 69, 1897.
4) K. Mack, l. c.

fraglichen Erregungen gleichfalls auf solchen Spannungen beruhen. Ja er vertritt direct die Anschauung, daß die Flächen, in denen scheinbare Ladungen auftreten, die geometrischen Orte ausnahmsweise starker Spannungen darstellen.

Man erkennt leicht, daß dieser Erklärungsversuch (ganz abgesehen von der in dem letzten Satze hervortretenden Unklarheit über die Grundbegriffe der dielectrischen Erregung) hinfällig ist. Der Deformations- oder Spannungszustand eines Volumenelementes ist nach den Lehren der Elasticitätstheorie centrisch-symmetrisch, er kann also nicht in einem centrisch-symmetrischen Krystall einen polaren Zustand hervorrufen. In der That tritt die polare Piezoelectricität erfahrungsgemäß nur in acentrischen Krystallen auf; die Heranziehung der Piezoelectricität hat also Sinn nur, wenn die betreffenden Krystalle acentrisch sind, und in diesem Falle liegt überhaupt keine Schwierigkeit vor.

In der Mackschen Arbeit wird aber die ganz verschiedene Symmetrie einer centrischen optischen Anisotropie und einer polaren electrischen Erregung nicht auseinandergehalten, und derselbe Fehler findet sich auch in der Preisschrift von Brauns[1]) über optische Anomalien, die auf die Mackschen Beobachtungen Bezug nimmt. Wiederholt hat sich Beckenkamp[2]) mit der Erklärung der Pyroelectricität überhaupt und derjenigen der centrischen Wirkungen insbesondere beschäftigt. Auf seine allgemeinen Ideen über den Mechanismus des Vorganges, die mir überaus phanthastisch erscheinen, brauche ich hier nicht einzugehen; wesentlich ist allein, daß er alle Pyroelectricität im Grunde als polar betrachtet und überall, wo er dergleichen an scheinbar holoedrischen Krystallen antrifft, Zwillingsbildung voraussetzt. So ist ihm z. B. jeder Aragonit- und Barytkrystall ein Complex von acht hemimorphen Individuen[3]), welche die acht Octanten des Symmetrieaxenkreuzes einnehmen[4]). Eine Stütze für diese Anschauung findet er in kleinen Dissymmetrien an Aetzfiguren bei sehr kräftigem Aetzen — Wahrnehmungen, die von anderer Seite bestritten werden.

1) B. Brauns, Preisschr. d. Jablonowskischen Ges. Nr. 29, Leipzig 1891.

2) J. Beckenkamp, zahlreiche Arbeiten über Symmetrie der Krystalle in der Zeitschr. für Kryst. von 17 bis 34.

3) J. Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. 19, 260 1891; 28, 90, 1899.

4) Freilich scheinen manche Betrachtungen hiermit nicht vereinbar; insbesondere operirt die „Theorie" in Wied. Ann. 61, 600, 1897 mit centrisch geladenen Molekülen. S. z. B. Tafel IX Fig. 20

Die Schwierigkeit der Erklärung ist sicher die Ursache gewesen, daß viele Autoren, die sich mit Pyroelectricität beschäftigt haben, über das Verhalten centrischer Krystalle mit Stillschweigen oder einer unverbindlichen Wendung hinweggehen. Hier und da blickt mehr oder weniger unbestimmt die Ansicht durch, daß die ungleichförmige Erwärmung Vorbedingung für eine centrische Erregung wäre[1]), ohne daß klar gemacht wird, wie eine solche (da Temperatur ein Scalar, Deformation ein centrisches Tensorsystem ist) eine polare Wirkung üben könnte. Aber bei der großen Verbreitung der fraglichen Erscheinung ist doch eine Erklärung derselben eine dringende Nothwendigkeit.

6. Ueberblickt man die ganze Reihe der erhaltenen Resultate, so wird man sich kaum dem Eindruck verschließen können, daß eine wirklich, das heißt auch in den Volumenelementen centrische Pyroelectricität nicht sichergestellt ist. In den meisten Fällen ist die centrische Erregung vielmehr ganz ersichtlich nur vorgetäuscht durch centrische Gruppirung acentrisch erregter Bereiche des Krystalles. Es bietet sich dann die Frage nach dem Grunde der acentrischen Erregung in einem centrischen Krystall. Hier liegen offenbar zwei Erklärungsmöglichkeiten vor, die in den beiden folgenden Abschnitten eingehender erörtert werden sollen.

Erstens: die pyroelectrisch erregten, scheinbar einfachen centrischen Krystalle sind in Wahrheit physikalisch acentrisch, also insbesondere Conglomerate von mehreren homogenen acentrischen Individuen.

Oder zweitens: die betreffenden Krystalle sind für die Mehrzahl ihrer Eigenschaften einfache centrisch symmetrische Individuen und nur in electrischer Hinsicht in Folge bestimmter, in anderer Richtung garnicht oder nicht merklich wirkender Einflüsse secundär acentrisch geworden.

Ganz unabhängig von den hierdurch angedeuteten Fragen erheben sich aber weitere, die vielleicht eine viel größere principielle Bedeutung haben.

Können centrische Krystalle nicht wirklich, d. h. also in den kleinsten Elementen centrisch pyroelectrisch erregt werden? Welchen Gesetzen müßte eine solche Erregung folgen? Läßt dieselbe sich durch neue geeignete Beobachtungen wahrscheinlich machen?

1) S. z. B. Ch. Soret, Cristallographie physique, S. 620, Paris 1893.

Diesen Fragen sind die letzten beiden Abschnitte der Arbeit gewidmet.

II. Centrische Krystalle, aufgebaut aus acentrischen Individuen.

7. Wir wenden uns nunmehr zu der näheren Besprechung der oben als ersten angeführten Möglichkeit, wonach die pyroelectrisch erregbaren, scheinbar centrisch-symmetrischen Krystalle in Wirklichkeit physikalisch-acentrisch sein könnten. Es ist dabei natürlich vorausgesetzt, daß die Erregung selbst sich centrisch verhält, weil eben im andern Falle die acentrische Natur des Krystalles sogleich ins Auge fallen würde, selbst wenn (was an sich ganz wohl vorkommen könnte) die gewöhnlichen Kriterien des Wachsthums und der Auflösung versagten.

Daß überhaupt electrische Erregungen, die mit der Krystallform im Widerspruch sind, sich unter Umständen dadurch erklären, daß der scheinbar einheitliche Krystall eine Pseudomorphose, nämlich ein Conglomerat von mehreren Individuen ist, welche eine andere, meist niedrigere Symmetrie besitzen, als das eigentliche Object, dafür ist der Boracit ein classisches Beispiel.

Es ist bekannt, daß dieses Mineral in Formen der tetraedrischen resp. hemimorphen Hemiedrie des regulären Systemes auftritt, aber nach seinem pyroelectrischen Verhalten sich der Symmetrie dieser Krystallgruppe nicht fügt. Die für eine theoretische Verwerthung geeignetsten Beobachtungen hierüber rühren von Mack[1]) her. Dieser Forscher stellte aus Krystallen von Formen, in denen der Würfel oder das Rhombendodecaeder vorherrschte, Kugeln dar und unterwarf sie dem Kundtschen Bestäubungsverfahren.

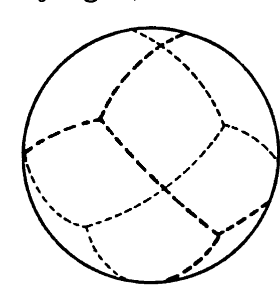
8. Krystalle des regulären Systemes können nach dem im Eingang Gesagten bei gleichförmiger Erwärmung oder Abkühlung eine electrische Erregung nicht annehmen, sondern nur bei ungleichförmiger. Eine solche liegt hier vor, und zwar wahrscheinlich eine der einfachsten Art, nämlich eine oberflächliche Abkühlung, bei der nur eine dünne Schicht eine von dem Innern abweichende Temperatur besitzt; für diesen Fall ist die Theorie sehr einfach[2]) und ergiebt bei einem regulär-tetraedrischen Krystall ein Feld, das dadurch characterisirt werden kann, daß

1) Mack, Wied. Ann. 21, 410, 1884.

2) W. Voigt, Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 36, 85, 1890.

in den Ecken des einen Tetraeders Kraftlinien aus- (oder ein-) in denen des zweiten Tetraeders dergleichen ein- (oder aus-) treten, — wobei die Angabe von Tetraeder-Ecken kurz Richtungen von Kugelradien characterisiren soll.

Die Beobachtung nach dem Kundtschen Verfahren ergiebt bei Boracit wesentlich Abweichendes. Die Oberfläche der Kugel erscheint mit einem Liniennetz überzogen, das den Kanten eines Rhombendodekaeders (resp. Granatoeders) oder (was auf dasselbe herauskommt) den Kanten der beiden in einander gesteckten Tetraeder entspricht, und zwar tragen Schwefelpulver diejenigen Linien, welche den Kanten des einen Tetraeders, Mennigepulver diejenigen, welche den Kanten des zweiten Tetraeders entsprechen. Fig. 1 giebt hiervon eine Anschauung; die zwei Arten von Linien sind durch starke und schwacke Strichelung unterschieden.



Figur 1.

Es mag bemerkt werden, daß Mack dieselbe Erregungsart auch an den Krystallen in der natürlichen Form beobachtet hat; dabei waren nur die Tetraederkanten statt auf die Kugel auf die natürliche Oberfläche des Krystalles projicirt.

Die optische Untersuchung dieser Krystalle hat nun gelehrt, daß sie bei gewöhnlicher Temperatur nicht einheitliche Gebilde sind, sondern sich darstellen als Conglomerate von zwölf rhombischen Pyramiden von allerdings nicht ganz regelmäßiger Begrenzung, die ihre Spitzen nahezu im Krystallcentrum und ihre Seitenflächen in den Ebenen haben, die durch das electrisch markirte Liniensystem gehen und selbst Granatoederflächen sind. Die einzelnen Theile verhalten sich optisch wie rhombische Krystalle, und zwar so, daß die Symmetrieebenen der Pyramiden auch die physikalischen Symmetrieebenen bestimmen. Bei 265°C geht der Boracit in eine regulär krystallinische Modification über, die die Krystallform homogen erfüllt.

9. Die große Bedeutung, welche die Eigenschaften des Boracit an und für sich ebenso, wie in der Geschichte der Krystallphysik besitzen, mag es rechtfertigen, daß wir etwas länger bei seiner Betrachtung verweilen, ob er gleich nach seiner Krystallform nicht zu den uns hier in erster Linie beschäftigenden centrischen Krystallen gehört. Bietet er doch auch ein Beispiel für ein dem uns vorliegenden mindestens nahe verwandtes Problem.

Wir wollen zusehen, ob das electrische Verhalten eine Auf-

Normalen hin gerichtet, so werden bei homogener Erwärmung die durch diese Richtung gehenden Pyramidenflächen gleichmäßige scheinbare Ladungen erhalten, und diese Ladungen bei dem Kundtschen Verfahren die in Fig. 1 eingetragenen Bestäubungslinien veranlassen. Bei nur oberflächlicher Erwärmung oder Abkühlung sind die Verhältnisse ganz ähnlich.

Die Beobachtungen von Mack an Boracit-Krystallen mit vorherrschender Würfel- und Rhombendodekaederform sind also mit der Zugehörigkeit der Theilpyramiden zu der hemimorphen Gruppe des rhombischen Systems im Einklang.

Auf die interessante Beobachtung Hankels, daß die electrische Erregung des Boracit bei einer bestimmten Temperatur durch Null hindurchgehend ihr Vorzeichen wechselt, kann hier nicht ausführlich eingegangen werden, zumal da die vorliegenden Mittheilungen kein erschöpfendes Bild des Vorganges geben. Nur die Bemerkung mag eingefügt werden, daß eine eigentliche Singularität des electrischen Verhaltens selber durch die Beobachtung nicht festgestellt ist; bei der gleichzeitigen Einwirkung von piezo- und pyroelectrischer Erregung und bei den eigenthümlichen Spannungsverhältnissen, die in dem Krystallaggregat bei ungleichförmiger Temperatur eintreten mögen, könnte ein ganz einfacher Verlauf der Gesetze für Pyro- und für Piezoelectricität doch auf sehr seltsame resultirende Wirkungen führen.

11. Nach den Beobachtungen von Mack scheint der vorstehend besprochene Aufbau des Boracit nicht der einzig mögliche zu sein. Jene haben nämlich ergeben, daß Boracitkrystalle mit vorwiegenden Octaederformen — aus denen freilich keine Kugeln hergestellt werden konnten, da sie nur in sehr kleinen Exemplaren vorlagen, — bei der Abkühlung auf den abstumpfenden Würfelflächen positiv, auf den Octaeder- oder genauer den zwei Arten von Tetraederflächen übereinstimmend negativ wurden, und zwar so, daß sich das Mennigepulver auf Linien anhäufte, die den Würfelkanten entsprachen. Nach Beobachtungen von C. Klein u. A. zerfallen derartige Krystalle optisch in sechs rhombische Pyramiden, bei denen die Würfelflächen Grundflächen sind.

Wenn diese Resultate richtig sind — und daß nach Brauns[1]) auch anderes Verhalten stattfinden kann, hebt ihre Bedeutung nicht auf — so rücken sie den Boracit in bemerkenswerthe Nähe der Krystalle, die uns hier in erster Linie interessieren; denn die letztere von Mack beschriebene electrische Erregung ist cen-

1) R. Brauns l. c. S. 88.

trisch-symmetrisch. Die Erklärung des Vorganges ist dabei nach dem optischen und electrischen Befund sehr naheliegend; die betreffenden Boracite sind zusammengesetzt aus sechs nach ihrem Verhalten rhombischen Pyramiden der hemimorphen Gruppe, für die aber jetzt die polare (Z-)Axe nach dem Centrum gerichtet ist. Daß je nach der äußeren Begrenzung des Krystalles die Umlagerung der Moleküle beim Uebergang aus der regulären in die rhombische Modification scheinbar auf zwei verschiedene Weisen stattfinden kann, ist theoretisch sicher sehr bemerkenswerth.

Der octaedrische Boracit stellt einen ersten Typus eines Krystalles mit centrisch-pyroelectrischen Eigenschaften dar, bei dem die genaue Untersuchung einen Aufbau aus niedriger symmetrischen Theilen festgestellt hat; einen zweiten möge der Prehnit veranschaulichen, der früher als centrisch-symmetrisch galt, jetzt aber als in Formen der hemimorphen Gruppe des rhombischen Systemes krystallisirend erkannt ist[1]). Was man ehedem als ein Individuum betrachtete, hat sich als eine Zwillingsbildung symmetrisch zu der Ebene normal zur polaren Axe ergeben, und hierdurch erklärt sich ohne Weiteres die anscheinend centrische Pyroelectricität, die wiederholt festgestellt worden ist[2]).

Zu diesem zweiten Typus gehören auch die bekannten Zwillingsbildungen des Bergkrystalles, bei denen zwei gleichartige oder aber zwei ungleichartige Individuen zu einem Gebilde von höherer Symmetrie verwachsen sind, die aber der Erklärung niemals Schwierigkeiten geboten haben, da die Einzelformen durch häufiges Vorkommen bekannt waren. Wie die genannten Beispiele zeigen, scheiden sich bei dem zweiten Typus nicht unter allen Umständen die heterogenen Theile durch ihre optischen Eigenschaften. Beim Prehnit ist z. B. die Zwillingsnatur nur durch die Methode der Aetzfiguren feststellbar gewesen.

12. Sind nach Vorstehendem nun unzweifelhaft Fälle vorhanden, bei denen die centrische pyroelectrische Erregung eins-Krystalles sich dadurch erklärt, daß der Krystall nicht einheitlich, sondern aus physikalisch acentrischen Individuen aufgebaut ist, so ergiebt sich ohne Weiteres die Möglichkeit dafür, daß noch weitere Fälle sich ebenso erklären. So zwingend diese Schlußfolge-

1) S. z. B. Liebisch, Grundriß der phys. Krystallographie, Leipzig 1896, p. 161.

2) Geschichtliches hierzu bei Hankel, Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. XII, 28, 1878. Hankel selbst hält Prehnit für centrisch-symmetrisch.

rung ist, so wird doch kaum bei einem der andern Krystalle, an denen centrische Erregung ausführlich beobachtet, aber Zwillingsbildung nicht nachgewiesen ist, diese Erklärung zu befürworten sein.

Am nächsten läge sie noch bei Topas, wo die S. 398 und 399 besprochenen Beobachtungen einen Zusammenhang zwischen optischem und pyroelectrischem Verhalten ergeben haben, das eine gewisse Aehnlichkeit mit dem beim Boracit stattfindenden besitzt; Platten aus brasilianischem Topas zerfielen darnach in optisch heterogene Theile, deren Grenzen bei dem Kundtschen Verfahren stärkere scheinbare Ladungen erkennen ließen.

Indessen überwiegen im Uebrigen die Verschiedenheiten beider Fälle doch die Aehnlichkeiten. Die heterogenen Theile der Topase weichen in ihrer gegenseitigen Orientirung nur um wenige Grade von einander ab, und direct neben solchen, deren optische Symmetrie der Krystallform widerspricht, liegen solche, für die beide übereinstimmen. Eine Umwandlung der einen Art in die andere ist um so weniger wahrscheinlich, als (bis auf die verschiedene Orientirung) die Theile optisch einander merklich gleichartig sind.

In der That erklärt Brauns[1]) das Zustandekommen jener gestörten Topaskrystalle auch keineswegs durch einen Umwandlungsvorgang. Er nimmt beispielsweise an, daß auf die verschiedenen Flächen eines reinen Krystallkornes sich Schichten eines isomorphen Gemisches angelagert haben, die in den ihnen zustehenden Winkelraum nicht völlig passen und dadurch Drucke auf einander ausüben, welche die optischen Anomalien bewirken und auch direct nachweisbar sind.

Bei den andern Krystallen, über die insbesondere Hankel berichtet — ja auch bei Topasen anderer Provenienz — fehlen im Allgemeinen die optischen Singularitäten, und damit entfällt von selbst eine wichtige Stütze der hier betrachteten Erklärungsmöglichkeit. Die Annahme einer Conglomeratbildung aber, die nur in electrischen Wirkungen sich bethätigt, ist überaus unbefriedigend, zumal wenn sie von den Einzelheiten der electrischen Erregung, z. B. dem großen Einfluß der künstlichen Formänderung, einfache Rechenschaft nicht zu geben vermag. So wenig also principiell die Existenz weiterer Analoga zu Boracit und Prehnit zu bestreiten ist, so kann man doch kaum einen der andern centrisch erregbaren und nicht anderweit als Zwilling erwiesenen Krystalle mit Sicherheit als ein solches bezeichnen.

1) R. Braun l. c. S. 307.

III. Centrische Krystalle, die secundär polare Eigenschaften erhalten.

13. Was nun die zweite der S. 401 erwähnten Erklärungsmöglichkeiten angeht, nach der Krystalle, die sich im Allgemeinen centrisch verhalten, secundär-polare Eigenschaften annehmen können, so wird principiell die centrische Symmetrie immer dann gestört, wenn sich in dem Krystall ein acentrischer Vorgang abspielt. Die Frage kann nur sein, ob dadurch merkliche Wirkungen entstehen.

Von derartigen acentrischen Vorgängen kommt für uns in erster Linie ein Wärmestrom resp. ein Temperaturgefälle in Betracht. Dergleichen kann in der That einen centrischen Krystall in einen Zustand bringen, in dem er polare Wirkungen übt. So ist es also z. B. auch denkbar, daß ein centrischer Krystall, der weder piezo- noch pyroelectrisch im älteren Sinne des Wortes ist, durch ein Temperaturgefälle ein electrisches Moment erhält, — eine Wirkung, die sich in ihrer Natur und ihren Gesetzen vollständig von Piezo- und Pyroelectricität unterscheidet.

Für den Fall der Proportionalität zwischen Gefälle und Moment stimmen die Beziehungen zwischen diesen Größen mit denen zwischen Gefälle und Wärmestrom der Form nach überein.

Diese Wirkungen sind principiell durchaus möglich, aber, obwohl es sich bei allen den oben erwähnten Beobachtungen um ungleichförmige Erwärmungen handelt, wird man die betreffenden Erregungen doch kaum durch sie erklären können. Die Art der Abhängigkeit des beobachteten Phänomens von dem Vorkommen und von etwaigen Formänderungen spricht meines Erachtens wiederum dagegen.

Gleiches gilt von einer an sich möglichen Einwirkung eines Deformationsgefälles, auf die nicht näher eingegangen werden kann.

Außer diesen secundären Polaritäten, die auf physikalischen Ursachen beruhen, kommen solche in Betracht, die durch chemische Vorgänge hervorgerufen werden. Die Art aller der oben besprochenen Beobachtungen, auf die kleine Beimengungen so stark influirten, macht eine Art chemischer Einwirkung in hohem Grade wahrscheinlich; es handelt sich nur darum, von der Natur der betreffenden Vorgänge ein Bild zu gewinnen.

Offenbar sind zwei fundamental verschiedene Möglichkeiten vorhanden; einmal könnte die Beimengung das Krystallmolekül selbst verändern — wobei das Wort Molekül in dem weiteren

Sinn als elementarer Baustein des Krystalles (wie in der Elasticitätstheorie) verstanden sein mag — sodann könnte sie, außerhalb des Krystallmoleküles bleibend, die Polarität bedingen.

Für das Erstere käme besonders die isomorphe Mischung in Betracht, die Brauns so ausführlich beobachtet hat. Auch hier bieten sich wieder zwei Möglichkeiten: entweder es entstehen aus Krystallsubstanz und Beimengung complexe Moleküle von niedrigerer Symmetrie, oder die Beimengung liefert für sich allein polare Moleküle, die sich zwischen die centrischen der Krystallsubstanz schieben.

Gegen Beides dürften prinzipielle Einwendungen nicht zu erheben sein. Besteht z. B. der elementare Baustein eines regulären Krystalles aus acht in den Ecken eines Würfels angeordneten centrischen Molekülen und wird eines derselben (oder werden drei abwechselnde) durch ein Molekül der Beimengung ersetzt, so wird die centrische Symmetrie gestört sein. Man kann sich auch wohl vorstellen, daß solche Abnormitäten während des Wachsthums des Krystalles sich in bestimmter Orientirung gegen die Krystallflächen bilden.

Über die Möglichkeit der isomorphen Mischung von zwei Substanzen, deren eine der Holoedrie, die andere der Hemimorphie desselben Krystallsystemes angehört, scheint bei den Fachleuten ein prinzipieller Zweifel nicht zu herrschen; nur daß eine derartige Mischung bei allen möglichen Mengenverhältnissen eintreten könnte, wird bestritten oder offen gelassen.

Herr Groth-München, den ich um freundliche Auskunft über diese Frage anging, schreibt mir z. B. Folgendes. „Eine homogene isomorphe Mischung in verschiedenen Verhältnissen zwischen Substanzen verschiedener Symmetrie kenne ich nicht und halte sie für unmöglich. So kann z. B. Kalkspath nur eine sehr kleine Menge CO_3Mg aufnehmen; sobald der Magnesiumgehalt aber größer wird, liegt stets ein mechanisches Conglomerat von zweierlei Partikeln, nämlich Calcit und Dolomit vor. In allen Fällen continuirlicher Mischungsreihen ist die Symmetrie die gleiche.“

Ähnlich äußert sich Herr Bruni-Bologna, der aus den isomorphen Mischungen ein Specialstudium gemacht hat. „Daß holoedrische und hemiedrische oder hemimorphe Krystalle Mischkrystalle geben können, wurde bisher nicht ausdrücklich constatirt. Daß solche aber als isodimorphe Mischkrystalle entstehen können, ist selbstverständlich sicher. Ob eine ununterbrochene Reihe Mischkrystalle zwischen holoedrischen und hemiedrischen Formen

entstehen kann, bleibt unentschieden; ich glaube jedoch bestimmt an die Möglichkeit dieses reinen Isomorphismus. Versuche darüber wären jedenfalls sehr interessant."

„Was schon festgestellt ist und für die Möglichkeit spricht, ist, daß hemiedrische Krystalle mit entgegengesetzter Drehungsrichtung, also enantiomorphe Formen, zusammenkrystallisiren und in einigen Fällen continuirliche Reihen von Mischkrystallen geben. Dies geschieht bei optisch activen organischen Stereoisomeren, z. B. zwischen rechts- und links-Kampheroxim. Die Bildung dieser ununterbrochenen Reihe Mischkrystalle geht aus dem Vorhandensein continuirlicher Schmelz- bez. kryohydratischer Curven hervor."

Da es sich nun bei den für uns in Frage kommenden Krystallen nur um Einzelfälle isomorpher Gemische handelt, bei denen wahrscheinlich der hemimorphe Bestandtheil nur sehr schwach vertreten ist, so würde ein Bedenken gegen die Vorstellung, daß hier und da die Polarität durch die acentrische Natur des Moleküles der Beimengung bewirkt werden möchte, nicht vorliegen. Jedenfalls könnte ein solches isomorphes Gemisch ebenso, wie ein in der ersten geschilderten Weise modificirter Krystall, sich auch anderen Einwirkungen, als einer Temperaturänderung gegenüber acentrisch verhalten, könnte also z. B. piezoelectrisch erregbar sein, wie Friedel und Curie[1]) das an gewissen Topasen beobachtet haben.

14. Was die Einwirkung einer Beimengung betrifft, die außerhalb des Krystallmoleküles bleibt, so können hier feste Lösungen in Betracht kommen. Die fast völlig scharfen Grenzen zwischen verschieden gefärbten Theilen desselben Krystalles sind bekannt, und in vielen solchen Fällen wird die Färbung auf eine in der Krystallsubstanz gelöste fremde Substanzen geschoben.

Nun ist die Parallelisierung der festen mit den flüssigen Lösungen durch Van t'Hoff derartig allgemein angenommen, daß die Anwendung der Nernstschen Theorie der electromotorischen Kräfte in electrolytischen Lösungen von wechselnder Concentration[2]) auf feste Lösungen kaum Widerspruch finden dürfte. Stimmt man der letzteren aber zu, so ergiebt sich von selbst eine Quelle der Pyroelectricität in centrischen Krystallen, die vielleicht bei den beobachteten Vorgängen wesentlich betheiligt ist. Natürlich wäre dieselbe an sich nicht auf centrische Krystalle beschränkt; unter angemessenen Umständen müßten Wirkungen

---

1) C. Friedel und J. Curie, C. R. **100**, 213, 1885.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chemie, **2**, 613, 1888.

der besprochenen Art auch bei acentrischen Krystallen auftreten; sie werden sich dort aber nur als Störungen der eigentlichen polaren Erregung geltend machen[1]), die überdies bei vielen Beobachtungsmethoden ohne merkliche Wirkungen sind. Um auseinanderzusetzen, wie sich nach der gemachten Hypothese der Vorgang der electrischen Erregung im Einzelnen gestalten würde, wollen wir speciell annehmen, über einen bis dahin reinen und homogenen Krystall lagere sich in Folge einer Veränderung der Mutterlauge eine Schicht, in der ein Electrolyt gelöst ist. Diese Schicht wird über gleichartigen Krystallflächen gleiche, über verschiedenartigen im allgemeinen verschiedene Constitution haben; ebenso werden die den Kanten und Ecken naheliegenden Partien sich etwas anders verhalten, als die centralen, und wenn die Schichten auch ursprünglich homogen sein sollten, wird durch (äußerst langsame) Diffusion in den reinen Kern sich ein Gefälle herstellen.

In einer solchen Schicht wechselnder Concentration entsteht nun nach der Nernstschen Theorie der Diffusion von Electrolyten ein Potentialgefälle, das einerseits von der Constitution der Schicht, andererseits aber von deren Temperatur abhängig ist. Und hiermit ist ersichtlich die Möglichkeit des Auftretens auch pyroelectrischer Erregungen sogleich gegeben. Wenn nämlich die bei einer bestimmten Temperaturvertheilung vorhandene electrische Vertheilung durch eine in der etwas leitenden Oberfläche influenzirte Ladung nach außen compensirt ist, so wird das bei einer Temperaturänderung nicht mehr gelten; der Krystall wird ein Feld aussenden, das sich im Allgemeinen der Symmetrie des Krystalles anschließt, aber mit etwaigen Formänderungen stark wechselt, und mit der Temperaturänderung selbst sein Zeichen umkehrt, wie das der Erfahrung entspricht.

Die Nernstsche Theorie liefert für die Potentialdifferenz zwischen zwei parallelen Schichten α und β einer Lösung den Ausdruck:

$$P_\alpha - P_\beta = \frac{u-v}{u+v} RTln \frac{\eta_\beta}{\eta_\alpha};$$

hierin sind die η die Concentrationen, u und v die Beweglichkeiten der Ionen, in die der Electrolyt dissociirt ist, R ist die Gasconstante, T die absolute Temperatur — oder (vielleicht genauer der Beobachtung entsprechend) ein mit dieser wachsender Factor.

1) Man möchte z. B. das unregelmäßige Verhalten vieler der von Hankel beobachteten Bergkrystalle z. Th. auf derartige Ursachen zurückführen.

Hieraus erhellt einerseits, daß für die Größe der Potentialdifferenz nicht die absoluten Werthe der Ionenbeweglichkeiten maßgebend sind, sondern nur ihr Verhältniß, und zweitens, daß bei beliebigen Verhältnissen der Concentrationen beliebig hohe Potentialdifferenzen principiell möglich sind, wenn auch wegen der Natur des natürlichen Logarithmus für merkliche Potentialdifferenzen recht beträchtliche Werthe von η_β/η_α erforderlich sind.

Es ist somit an sich wohl möglich, daß in festen Lösungen erhebliche Potentialdifferenzen sich ausbilden; fraglich ist nur, ob die Beweglichkeit ausreicht, um deren Aenderung mit der Temperatur während der Dauer der Beobachtung zu stande kommen zu lassen; denn nach der Nernstschen Theorie verlangt eine solche Aenderung jederzeit eine Dislocation der Ionen. Hierüber kann man vorerst nur Vermuthungen haben; es erscheint aber keineswegs ausgeschlossen, daß bei sehr starken Abfällen in der Concentration, wie die oben erwähnte Beobachtung sie annehmen läßt, und bei gesteigerter Temperatur merkliche Wirkungen eintreten. Doch soll wegen der Unsicherheit dieser Frage von einer Erweiterung der Nernstschen Theorie auf Krystalle, die an sich Interesse und keine Schwierigkeit bietet, abgesehen werden.

IV. Krystalle mit centrisch-symmetrischen molekularen Polsystemen.

15. Wir wenden uns nunmehr gemäß dem auf S. 401 Gesagten der Frage zu, ob eine wirklich, d. h. in den kleinsten Theilen centrische Erregung eines Krystalles möglich sei, und welche Gesetze eine solche befolgen müßte.

Daß eine polare electrische Erregung eines Volumenelementes die ganz allein denkbare wäre, wird nach der neusten Entwickelung der Electronentheorie wohl Niemand behaupten; im Gegentheil wird man durch die letztere dazu gedrängt, noch ganz andere Erregungsarten zuzulassen. Der Fall, daß ein Molekül, d. h. ein neutrales System electrischer Pole, ein Moment besitzt, d. h. in hinreichend großen Entfernungen mit einem Polpaar äquivalent ist, stellt sich vielmehr in gewissem Sinne als ein specieller dar. Dies drückt sich analytisch in der Thatsache aus, daß die Kugelfunctionenreihe für die Wirkung eines neutralen Polsystemes mit einem beliebig hohen Glied beginnen kann. Polar wirkende Polsysteme sind nur diejenigen, bei denen das Glied erster Ordnung von Null verschieden ist.

Für solche wird die Potentialfunction auf hinreichend ferne Punkte bekanntlich durch

$$1)\qquad \psi_1 = M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda}$$

dargestellt, wobei M, ein Vector in einer dem System individuellen Richtung λ, das Moment des neutralen Systems, und r sein Abstand vom Aufpunkt ist.

Verschwindet das Glied erster Ordnung, so kommt das folgende von der Form

$$2)\qquad \psi_2 = M_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1^2} + M_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2^2} + M_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_3^2}$$

in erster Linie zur Geltung; dabei stellt M_1, M_2, M_3 ein Tensortripel mit den (zweiseitigen) Axenrichtungen λ_1, λ_2, λ_3 dar.

Es ist bekannt, daß ein Potential von dieser Form sich deuten läßt als die Wirkung von drei Polsystemen zu je vier unter einander absolut gleichen, paarweise entgegengesetzten Polen, von denen jedes System seine Pole in der Anordnung $+--+$ oder $-++-$ in einer zu λ_1, λ_2, λ_3 parallelen Geraden besitzt. Die M_h, die man als Momente zweiter Ordnung nach den Richtungen λ_h bezeichnen kann, sind dabei die Producte aus den absoluten Polstärken in die Producte der beiden in dem Polsystem auftretenden Entfernungen zwischen zwei Polen entgegengesetzten Vorzeichens, positiv bei der ersten, negativ bei der zweiten Anordnung. Da diese Entfernungen für jedes Polsystem im Product auftreten, kann man sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit einander gleich annehmen, wodurch dann die inneren Pole gleicher Art zusammenfallen und Doppelpole geben.

Man erkennt hiernach, daß ein Potential der zweiten Form einer centrisch symmetrischen electrischen Vertheilung entspricht.

Die Bildung weiterer höherer und höherer Potentiale bietet hiernach keine Schwierigkeit, mag aber unerörtert bleiben.

16. Handelt es sich um einen Körper, also um ein System von sehr vielen gleichartigen und (am einfachsten) parallel orientirten Molekülen von solcher Dichtheit, daß selbst innerhalb eines Volumenelementes dk deren eine sehr große Zahl liegt, so folgt aus (1) für das Potential der Ausdruck

$$3)\qquad \varphi_1 = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda} dk,$$

wobei μ die Summe aller Momente in der Volumeneinheit darstellt

Ganz ebenso ergiebt sich aus (2)

$$\varphi_2 = \int \left(\mu_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_2^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_3^2} \right) dk. \tag{4)}$$

Beide Formeln gelten zunächst nur für Punkte in endlicher Entfernung vom Körper. Von der ersten kann man bekanntlich beweisen, daß sie bis an und selbst bis in den Körper hinein ihre Bedeutung behält, da unendlich nahe Volumenelemente nur unendlich kleine Beiträge zu dem Werth von φ_1 geben.

φ_2 verhält sich anders — nämlich analog, wie die Differentialquotienten von φ_1 nach den Coordinaten, d. h. wie dessen Feldcomponenten; es ist somit bei den höheren Potentialen der Uebergang von den einzelnen Molekülen zu den Volumenelementen nur für Punkte gestattet, die sich in endlicher Entfernung von dem Körper befinden. Dies würde aber für die uns beschäftigenden Fragen ohne Belang sein; selbst die Mennige- und Schwefelkörnchen, mit denen das Kundtsche Verfahren operirt, befinden sich höchstens mit unendlich kleinen Ladungsantheilen in unendlich kleiner Entfernung von dem bestäubten Krystall.

17. Das Potential φ_2 besitzt ähnlich interessante Eigenschaften, wie φ_1, und verdient deshalb an und für sich eine genauere Untersuchung. Hier genügt es, auf eine Umformung durch zwei theilweise Integrationen hinzuweisen, die φ_2 auf andere, bekannte Potentiale reducirt und häufig zu einer leichteren Beurtheilung des Wirkungsgesetzes verhilft.

Hierzu schreiben wir, indem wir in bekannter Weise die Differentiationen nach den Richtungen λ_h der Tensoren μ_h durch solche nach den Coordinatenaxen ausdrücken und einfache Abkürzungen einführen

$$\varphi_2 = \int \left(\mu_{11} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mu_{22} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mu_{33} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + 2\mu_{23} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + 2\mu_{31} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} + 2\mu_{12} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right) dk. \tag{5)}$$

Dies ergiebt nach einer ersten Integration bei Einführung des Oberflächenelementes do und der Richtungscosinus n_x, n_y, n_z seiner äußeren Normalen n

$$\varphi_2 = \int\left[(\overline{\mu}_{11} n_x + \overline{\mu}_{12} n_y + \overline{\mu}_{13} n_z)\frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial x} + \cdots + \cdots\right] do \tag{6}$$
$$- \int\left[\left(\frac{\partial \mu_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial z}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cdots + \cdots\right] dk.$$

Hierin stellt das zweite Integral ein Potential von der Natur von φ_1, also eines von polarer Erregung dar; das erste giebt die Wirkung einer gewissen Doppelbelegung der Oberfläche des Körpers an, allerdings im allgemeinen abweichend von den sonst auftretenden Doppelschichten. Denn ein Potential von der Form

$$\int \overline{\mu}\,\frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial x}\, do$$

entspricht nicht Ladungen, die in absolut gleicher Stärke auf den durch Normale einander zugeordneten Elementen der beiden Flächen liegen, sondern solchen, für die die Zuordnung durch Parallele zur X-Axe geschieht.

Man wird demgemäß also auch passend die beiden Flächen der Doppelschicht nicht einander parallel und aequidistant, sondern vielmehr einander identisch und parallel der X-Axe gegen einander verschoben denken. $\overline{\mu}$ ist dann das Product aus der Flächendichte in diese Verschiebung; bei positivem $\overline{\mu}$ liegt die positive Ladung auf der Seite der $+X$-Axe. Die Formel (6) läßt erkennen, daß Flächenelemente mit entgegengesesetzten äußeren Normalenrichtungen bei gleichen μ_{hk} gleiche Doppelbelegungen tragen, wenn man sie beide von außen oder beide von innen betrachtet.

Eine zweite partielle Integration liefert

$$\varphi_2 = \int\left[(\overline{\mu}_{11} n_x + \overline{\mu}_{12} n_y + \overline{\mu}_{13} n_z)\frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial x} + \cdots + \cdots\right] do \tag{7}$$
$$- \int\left[\left(\overline{\frac{\partial \mu_{11}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \mu_{12}}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial \mu_{13}}{\partial z}}\right) n_x + \cdots + \cdots\right]\frac{do}{\overline{r}}$$
$$+ \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mu_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial z}\right) + \cdots + \cdots\right]\frac{dk}{r};$$

die beiden letzten Integrale sind hier also gewöhnliche Newton'sche Oberflächen- resp. Raumpotentiale, die allerdings in dem Falle räumlich constanter Erregung, d. h. constanter μ_{hk} verschwinden.

Der durch Letzteres bestimmte einfachste Fall der homogenen

Erregung, in dem man die Coordinatenaxen mit den Richtungen λ_h zusammenfallen lassen kann, führt sonach auf das Potential

$$\varphi_2 = \mu_1 \int n_x \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}} do + \mu_2 \int n_y \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}} do + \mu_3 \int n_z \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}} do. \tag{8}$$

Seine Bedeutung erhellt am einfachsten, indem man jedes Glied in der Weise deutet, wie dies oben allgemein gezeigt ist. Die Flächendichten der drei Doppelschichten sind dann also mit $\mu_1 n_x$, $\mu_2 n_y$, $\mu_3 n_z$ proportional.

18. Eine Erregung der vorstehend behandelten Art durch Erwärmung würde dann zu Stande kommen, wenn analog, wie bei der polaren Pyroelectricität, die Momente μ_h Functionen der Temperatur wären, was nach den neueren Anschauungen durchaus zu erwarten ist. Die Vorgänge würden sich dann unter Eingreifen der oberflächlichen Leitfähigkeiten der Krystalle ganz ebenso abspielen, wie bei den normalen oder acentrischen Erregungen.

In dem uns allein interessirenden Falle eines homogenen Krystalles würden die Ausdrücke für die Potentiale sich dadurch vereinfachen, daß die Richtungen λ_1, λ_2, λ_3 überall die gleichen sind, also die Coordinatenaxen ihnen parallel gewählt werden könnten. Wir hätten demzufolge

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \int \left(\mu_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mu_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dk \\
&= \int \left(\bar{\mu}_1 n_x \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}} + \bar{\mu}_2 n_y \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}} + \bar{\mu}_3 n_z \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}} \right) do \\
&\quad - \int \left(\overline{\frac{\partial \mu_1}{\partial x}} n_x + \overline{\frac{\partial \mu_2}{\partial y}} n_y + \overline{\frac{\partial \mu_3}{\partial z}} n_z \right) \frac{do}{\bar{r}} \\
&\quad + \int \left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial z^2} \right) \frac{dk}{r}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wir bemerken, daß nach diesen Formeln eine Erregung der betrachteten Art sowohl bei regulären Krystallen, als bei isotropen Körpern ausgeschlossen ist; denn in diesen Fällen ist nach Symmetrie nothwendig $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ also, da die Formel (9) sich nur auf äußere Punkte bezieht, auch $\varphi_2 = 0$. Die wirklich centrische Pyroelectricität ist also (ebenso und aus ähnlichen Gründen, wie die Doppelbrechung des Lichtes), eine speciell krystallphysikalische Erscheinung, wobei obenein das reguläre System ausfällt.

Sie ist natürlich keineswegs an die centrische Symmetrie gebunden und kann bei acentrischen Krystallen neben der acentrischen Erregung auftreten, ist aber bei den gewöhnlichen Methoden zur messenden Beobachtung der letzteren unwirksam; nur bei der Kundtschen Bestäubungsmethode könnte sie sich geltend machen, — freilich wie das Folgende lehren wird, nur sehr selten in merklicher Intensität.

Der einfachste in Betracht kommende Fall findet nach dem Gesagten bei Krystallen mit nur einer ausgezeichneter Axe, d. h. bei denen des rhomboedrischen, quadratischen, hexagonalen Systemes, statt. Wird die betreffende Axe zur z-Axe gewählt, also $\mu_1 = \mu_2$ gesetzt, so liefert (9)

$$\varphi_3 = \int (\mu_3 - \mu_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} dk$$

10)
$$= \int (\overline{\mu}_3 - \overline{\mu}_1) n_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{dz} do - \int \frac{\overline{\partial (\mu_3 - \mu_1)}}{\partial z} n_z \frac{do}{r} + \int \frac{\partial^2 (\mu_3 - \mu_1)}{\partial z^2} \frac{dk}{r}.$$

Bei homogener Erregung giebt dies

11)
$$\varphi_3 = (\mu_3 - \mu_1) \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} dk = (\mu_3 - \mu_1) \int n_z \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial z} do.$$

Hat der krystallinische Körper speciell Kugelform, so ergiebt der erste Ausdruck, daß sein Potential dasselbe ist, wie dasjenige eines Vierpolsystemes $+--+$ der S. 414 behandelten Art von dem Moment $(\mu_3 - \mu_1)k$, unter k das Volumen der Kugel verstanden. Aus der Kugel treten, wenn $\mu_3 - \mu_1 > 0$, in polaren Zonen von der Breite von rund 55° Kraftlinien aus, in dem äquatorialen Zwischenraum hingegen ein; der Uebergang erfolgt stetig durch ein Bereich tangential verlaufender Kraftlinien. Das Kundtsche Verfahren würde also in den polaren Zonen Mennige, in der aequatorialen Schwefelbestäubung liefern, zwischen beiden einen Gürtel fehlender Wirkung.

Ist der betrachtete Körper ein Polyeder mit lauter gleichartigen Flächen, z. B. ein Kalkspathspaltungsstück, so ist jede dieser Flächen nach dem zweiten Ausdruck für φ_3 mit einer Doppelschicht derselben oben besprochenen Art aequivalent. Die Wirkungen einer von ihnen erkennt man, indem man außer

der Richtung der Normale n noch zwei dazu normale Richtungen a und b nach der Figur 3 einführt und

$$\frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial z} do = \left(\frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial n} n_z + \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial a} a_z \right) da\, db$$

setzt. Dann resultirt nach (11)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (\mu_2 - \mu_1) \sum \left[n_z^2 \int \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial n} do + n_z a_z \int\int \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial a} da\, db \right] \\ &= (\mu_2 - \mu_1) \sum \left[n_z^2 \int \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial n} do + n_z a_z \int \left(\left(\frac{1}{\overline{\overline{r}}} \right)_\alpha + \left(\frac{1}{\overline{\overline{r}}} \right)_\beta \right) db \right], \end{aligned} \qquad 12)$$

wobei $\overline{\overline{r}}$ die Entfernung des Aufpunktes von dem db zugeordneten Element ds der Randcurve der Fläche bezeichnet, und die Summe $\sum$ über alle Flächen zu erstrecken ist. Rechnet man längs der Randlinie der Fläche eine Variable s in dem Sinne von b (siehe Fig. 3), so ist $db = ds/\cos(b, s)$.

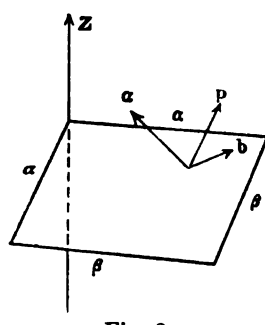


Fig. 3.

φ_2 zerlegt sich hiernach in das Potential einer Schaar unter sich gleichartiger, gewöhnlicher homogener electrischer Doppelflächen, welche das Polyeder vollständig umgeben und somit im äußeren Raum keine Wirkung üben, und in das Potential linteärer Ladungen, die sich auf den Kanten des Polyeders befinden. Ist $\mu_2 - \mu_1 > 0$, so haben die Polkanten positive, die aequatorialen negative Ladungen. Dies Resultat, daß ein centrisch erregtes Polyeder mit lauter gleichwerthigen Flächen, aus einem einaxigen Krystall hergestellt, nur auf seinen Kanten scheinbare Ladungen trägt, erscheint sehr bemerkenswerth.

Hat endlich der Krystall die Gestalt eines zur z-Axe parallelen Prismas (oder Cylinders) von beliebigem Querschnitt, das durch zur z normale Ebenen begrenzt wird, so werden bei der homogenen Erregung diese Endflächen zu gewöhnlichen homogenen electrischen Doppelflächen, deren Kraftlinien die Randcurven umkreisen, derart, daß sie aus den Grundflächen aus- und in die Prismenflächen eintreten. Hier werden die Grundkanten keine Ladungen tragen, aber ihnen benachbart wird auf der Grundfläche positive, auf den Prismenflächen negative scheinbare Ladung in maximaler Dichte liegen.

19. Die sehr verschiedenen Ladungsvertheilungen, die sich bei den im Obigen behandelten drei Formen des Krystallpräparates ergeben, haben nicht nur an sich ein Interesse; sie sind auch von größter Wichtigkeit für die Entscheidung der Frage, wie Beobachtungen zum Aufsuchen der betreffenden Erscheinungen rationell angestellt werden müssen.

Die letzte, cylindrische Form ist offenbar durchaus zu verwerfen; die entgegengesetzten Ladungen in stärkster Anhäufung unmittelbar zu beiden Seiten einer Kante paralysiren sich nicht nur bezüglich ihrer Wirkung nach außen, sie werden sich in Wirklichkeit auch in Folge der nie ganz fehlenden Leitfähigkeit fast momentan ausgleichen. Die Kugelform ist hiervon frei und nur durch die Kostbarkeit der Herstellung unpractisch. Dagegen ist die zweite Form, die durch lauter gleichartige und -werthige, aber im Übrigen beliebige Begrenzungselemente definirt ist, sehr vortheilhaft; die Ladungen erscheinen nur auf den Kanten, und man kann auch Sorge tragen, daß keine zwei entgegengesetzt geladene Kanten einander nahe kommen.

Hierzu hat man nur das Präparat in der Form einer geraden vierseitigen Säule mit einem Rhombus oder Quadrat als Querschnitt herzustellen, derart, daß seine Axe normal liegt zur krystallographischen Hauptaxe.

Nach der Gleichung (11) werden hier die Grundflächen überhaupt nicht erregt, da für sie $n_z = 0$ ist. Die Säulenflächen liefern nach (12) einerseits eine die Säule rings umhüllende gewöhnliche electrische Doppelfläche, außerdem eine Ladung der oberen und der unteren Kante mit der linearen Dichte $2(\mu_3 - \mu_1) n_z a_z$, eine solche der beiden mittleren mit der entgegengesetzten.

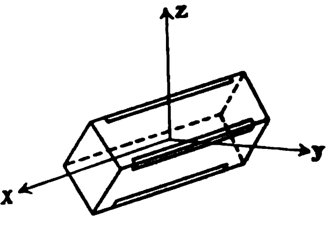


Fig. 4.

Die einhüllende Doppelfläche ist mit zwei die Grundflächen bedeckenden Doppelflächen von entgegengesetztem Moment aequivalent und giebt sonach auf den ihnen nahen Theilen der Säulenflächen allenthalben gleichartige Ladungen. Stellt man die Beobachtungen mit leitenden Belegungen an, die auf den Säulenkanten liegen (s. Fig. 4) und den Grundflächen nicht zu nahe kommen, so sind die Wirkungen der letzteren bedeutungslos. Ist der Querschnitt ein Quadrat und mißt man nur die Ladungs*differenz* der polaren und der aequatorialen Kanten, so kommt die Wirkung der Grund-

flächen auch dann nicht zur Geltung, wenn man die Belegungen über die ganzen Säulenkanten ausdehnt.

Dies Verfahren läßt sich nun auch auf rhombische Krystalle anwenden. Sind z. B. die Diagonalen des Querschnittes die Y- und die Z-Axe und ist die X-Axe die Säulenaxe, so schreiben wir statt (9)

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= (\mu_1 - \mu_2)\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, dk + (\mu_3 - \mu_2)\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\, dk \\
&= (\mu_1 - \mu_2)\int\left(\overline{\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_2} - \overline{\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_1}\right) dq \\
&\quad + (\mu_3 - \mu_2)\sum\left[n_s^2 \int \overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}}\, do + n_s a_s \int\left(\left(\frac{1}{\overline{\overline{r}}}\right)_\alpha - \left(\frac{1}{\overline{\overline{r}}}\right)_\beta\right) dx\right],
\end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

wobei dq das Element der Grund-, do dasjenige der Säulenfläche bezeichnet, und dx an Stelle des in (12) auftretenden db gesetzt ist.

Die Flächenintegrale sind zusammen einem Paar Doppelflächenpotentialen der Grundflächen mit den Momenten $(\mu_1 - \mu_2)$ aequivalent; die Linienintegrale geben die Potentiale der Ladungen der Säulenkanten mit den Dichten $\pm 2\, n_s a_s (\mu_3 - \mu_2)$; somit liegt hier die Sache wesentlich ebenso, wie bei einaxigen Krystallen.

Benutzt man 3 Säulenpräparate von der angegebenen Form mit cyclisch vertauschten Krystallaxen, so erhält man 3 Beobachtungen, die von den Differenzen $(\mu_3 - \mu_2)$, $(\mu_1 - \mu_3)$, $(\mu_2 - \mu_1)$ abhängen. Lassen sich auch nicht quantitative Bestimmungen ausführen, so liefern doch die Vorzeichen der beobachteten Erregungen ein Urtheil darüber, ob der Vorgang wirklich auf centrisch erregten Elementartheilchen beruht. Es dürfen nämlich dann keinesfalls die drei beobachteten Erregungen gleiches Vorzeichen haben. Das ist wenigstens ein qualitatives experimentum crucis.

Wollte man aber statt des in Fig. 4 dargestellten Präparates ein rechtwinkeliges Parallelopiped aus dem rhombischen Krystall mit Flächen normal zu den Krystallaxen gleichförmig erwärmen und etwa zwei Flächenpaare mit Belegungen versehen — wie dies an sich vielleicht am nächsten läge — so würde man vermuthlich keine merklichen Wirkungen erhalten; denn die Erregung eines solchen Präparates ist mit sechs gewöhnlichen electrischen Doppelflächen aequivalent, deren Momente für gegenüberliegende Flächen gleich, für die verschiedenen Paare aber verschieden sind. Solche

Doppelflächen liefern, beiderseitig jeder Kante unmittelbar anliegend, entgegengesetzte Ladungen, die wie schon oben gesagt, kaum zur Geltung kommen könnten.

V. Beobachtungen.

20. Die Methode, die anzuwenden war, um das Vorhandensein wirklich centrischer Pyroelectricität nachzuweisen, ist durch die theoretischen Ueberlegungen des vorigen Abschnittes vollständig bestimmt.

Die in einer der Fig. 4 entsprechenden Gestalt geschliffenen Krystallpräparate (hergestellt von Brunnée-Göttingen) wurden längere Zeit in absolutem Alkohol aufbewahrt, dann zur Herabsetzung der oberflächlichen Leitfähigkeit leicht lackirt. Um die auf den Kanten zu erwartenden Ladungen zur Wirkung kommen zu lassen, wurden die Präparate zwischen vier Kupferfedern geklemmt, die kleine, nach dem Querschnitt ∨ gebogene Blechstreifen trugen, derart, daß ein jeder von diesen die Belegung einer Kante des Krystallpräparates darstellte. Je zwei gegenüberliegende Belegungen waren löthweise mit einem der nach dem Electrometer führenden Drähte verbunden.

Das Electrometer, ein von Bartels-Göttingen nach Dolezalek gebautes Instrument, dessen Nadel nicht dauernd mit einer Spannung verbunden ist, sondern nur vor jeder größeren Beobachtungsreihe einmal geladen wird, war von so hoher Empfindlichkeit, daß seine große Capacität, die im Allgemeinen bei Beobachtungen sehr kleiner Electricitätsmengen stört, dadurch einigermaßen compensirt wurde. In wie hohem Maaße dies der Fall war, zeige die Bemerkung, daß ein stäbchenförmiger Krystall von schwarzem sibirischem Turmalin von ca. 1,3 mm² Querschnitt, wenn die Belegungungen seiner Endflächen mit den Quadranten verbunden waren, bei 1° C. Erwärmung einen Ausschlag der Nadel von ca. 11 cm bewirkte. Nun folgt aus den Beobachtungen von Riecke[1]), daß die electrische Dichte, die sich bei einer solchen Temperaturänderung auf einem schwarzen sibirischen Turmalin entwickelt, von der Ordnung 0,5 g cm sec. ist. Hier kam davon rund der 80. Theil zur Geltung und dem bequem ablesbaren Ausschlag von 1 mm würde sonach die Ladung 0,00006 g cm sec. auf jedem Quadrantenpaar incl. Zuleitungen entsprechen.

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1890, p. 197 u. f.

Der gleiche Ausschlag von 1 mm wurde auch erhalten, wenn die Quadrantenpaare auf eine Potentialdifferenz von 0,0002 Volt gebracht wurden. Nun bestehen zwischen den Potentialen und den Ladungen die Beziehungen

$$E_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3, \; E_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3,$$

wobei die Indices 1 und 2 sich auf die Quadranten mit Zuleitungen, 3 auf die Nadel beziehen und nach Symmetrie

$$C_{11} = C_{22}, \; C_{12} = C_{21}, \; C_{13} = C_{23}, \; E_1 = -E_2 = E$$

gesetzt werden kann. Man erhält sonach

$$2E = (C_{11} - C_{12})(V_1 - V_2),$$

wobei $(C_{11} - C_{12})$ als die Capacität C des Electrometers mit Zuleitungen und Belegungen gelten kann. Aus den obigen Zahlen würde folgen

$$C = 180 \text{ cm};$$

die Capacität des Electrometers ist also, wie auch andere Beobachter erfahren haben, recht bedeutend.

Es mag übrigens bemerkt werden, daß die starke Dämpfung, welche die Schwingungen der Nadel wegen deren außerordentlich kleinem Gewicht erfahren, — so bequem sie bei der Messung von leidlich constant zu erhaltenden Potentialdifferenzen ist, — bei den Bestimmungen kleiner Ladungen ziemlich störend wirkt. Namentlich bei den vorliegenden Beobachtungen, wo die kleinen Ladungen allmählich entstanden und gleichzeitig durch Leitung allmählich verschwanden, war an eine Beobachtung des zeitlichen Verlaufes des Vorganges selten zu denken, und die ablesbaren ersten Ausschläge gaben wenig mehr, als das Vorzeichen und die Größenordnung der auf den Präparaten erregten Ladungen.

Um die Präparate auf verschiedene Temperaturen zu bringen, wurden dieselben abwechselnd in Bäder von kaltem und von warmem Paraffinöl getaucht. Dies geschah einfach in der Weise, daß das Präparat mit seinen Fassungen unverrückt fest gehalten, und die Bäder abwechselnd von unten her genähert und bis zum Eintauchen des Präparates gehoben wurden.

Der Krystall mit den beiden Bädern und die Zuleitungsdrähte waren durch geerdete metallische Umhüllungen gegen Influenzwirkungen von Außen geschützt.

21. Die Benutzung von Oelbädern hatte ich schon früher,[1])

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1898, S. 181.

wegen das schnelleren Wärmeaustausches derjenigen von Luftbädern vorgezogen. Freilich wirkten sie damals, bei der Anwendung flacher und dünner Krystallstäbchen erheblich schneller und präciser, als jetzt, wo es sich um relativ dicke Präparate handelte, aber Luftbäder würden ihre Wirkung ähnlich verschlechtert haben. Da von Vorichtungen für Constanterhalten der Temperaturen und für dauerndes Umrühren der Bäder wegen der Gefahr störender electrischer Wirkungen durchaus abgesehen werden mußte, so konnte die am Anfang und am Ende jeder Versuchsreihe vorgenommene Ablesung nur ganz ungefähre Werthe für die Temperatur der Bäder geben, und diese mochten noch erheblich von den mittleren Temperaturen der Krystalle abweichen.

In der That, die Umkehr der Electrometernadel nach einem Austausch der Bäder markiert angenähert den Moment maximaler Ladungen der Belegungen, aber nicht die erreichte höchste oder tiefste Temperatur resp. die stärkste Erregung des Krystalles. Die Nadel kehrt vielmehr um, wenn die Temperatur und damit die Erregung anfängt, sich so langsam zu ändern, daß der Verlust der Ladung durch Ableitung grösser ist, als der Zuwachs der electrischen Erregung. Da nun die Umkehrung meist nach einer mäßigen Zahl von Secunden stattfand, und die Krystalle durchweg schlechte Wärmeleiter waren, so ergiebt sich von selbst, daß die Bestimmung der Temperaturen der Bäder nur die Größenordnung der Temperaturänderungen der Krystallpräparate lehrt. Schon aus diesem Grunde erübrigt somit die Angabe einzelner Beobachtungen.

Die Messungen litten aber noch unter einem anderen Übelstande. Paraffinöl behält offenbar, auch wenn es mit wasserfreiem Kupfersulfat durchgeschüttelt und lange Zeit in Berührung gewesen ist, eine kleine Leitfähigkeit, und die geringe Structurverschiedenheit der Kupferfassungen genügte, um zwischen ihnen electromotorische Kräfte entstehen zu lassen. die langsam, aber (was nach der oben angegebenen Empfindlichkeit des Electrometers einleuchtend ist) häufig bis zu großen Beträgen wachsende Ausschläge der Electrometernadel bewirkten. Durch Lackiren aller mit dem Oel in Berührung stehenden Theile konnte man den Widerstand in dem Bade so vergrößern, daß die Ladung der Quadranten in Folge der electromotorischen Kräfte hinreichend langsam vor sich ging, um nicht mehr wesentlich zu stören. Aber da mit den Fassungen beim Einsetzen der Krystalle hantirt werden mußte, so bildeten sich auf den Lacküberzügen offenbar Ladungen aus, die sehr merklich waren und (da allmählich Alles mit Oel überzogen

war) sich auch durch Bestreichen von Krystall und Fassung mit einer Alkoholflamme nur unvollkommen beseitigen ließen. Vielleicht saßen auch in dem dickflüssigen Oel von dem Herumrühren mit dem Thermometer Ladungen — kurz, vielfach waren die Ausschläge des Electrometers am Anfang von Beobachtungsreihen ganz wild und regellos. Namentlich die Untersuchung von Krystallen mit schwachen Wirkungen litt darunter; es dauerte oft sehr lange, bis ein regelmäßiger Verlauf eintrat, d. h. die Ausschläge bei Anwendung des warmen und des kalten Bades entgegengesetzte Richtung und gleiche Größenordnung besaßen.

Bei stärker wirksamen Krystallen war nicht selten nahe Gleichheit der Ausschläge nach rechts und links erzielbar; bei schwach wirksamen ließ das Kriechen der Ruhelage in Folge der oben besprochenen Ladung mitunter erhebliche Unterschiede derselben eintreten.

In der That, wenn während der Bewegung der Nadel in Folge der pyroelectrischen Erregung des Krystalles gemäß dem oben Gesagten eine electromotorische Kraft zwischen den Fassungen im Sinne kleinerer Zahlen wirkte, so mußte sie die Erregungen, die für sich die Nadel nach kleineren Zahlen trieben, zu groß, diejenigen, welche sie nach größeren Zahlen trieben, zu klein erscheinen lassen. Bei sehr schwachen pyroelectrischen Erregungen und stärkeren electromotorischen Kräften ging die Verschiedenheit gelegentlich soweit, daß bei den ersteren Erregungen überhaupt kein Umkehrpunkt zu stande kam, während bei den letzteren ein solcher nach einem kleineren Ausschlag stattfand.

Die Verhältnisse wurden noch dadurch complicirt, daß dieselbe Fassung im heißen und im kalten Ölbad, sich gelegentlich verschieden verhielt; das Öl in beiden Bädern hatte offenbar in Folge verschiedener Behandlung verschiedene Verunreinigungen erhalten, auch mochte seine Leitfähigkeit mit der Temperatur variiren.

Wegen dieser Schwierigkeiten habe ich wiederholt, und besonders dann, wenn die Resultate unsicher erschienen, eine naheliegende Methode zur näherungsweisen Elimination der electromotorischen Kräfte in den Fassungen angewendet, die darin bestand, den Krystall zwei Mal in derselben Fassung zu beobachten und ihn dazwischen in der Fassung um 90° zu drehen, sodaß, wenn zuerst das Paar Belegungen $\alpha\alpha'$ mit dem Kantenpaar aa'', das Paar Belegungen $\beta\beta'$ mit dem Kantenpaar bb'' in Berührung war, dann das Umgekehrte geschah. Hierbei wurden die Wirkungen der pyroelectrischen Erregung auf das Electrometer umgekehrt, die der Fassungen blieben dem Sinne nach ungeändert.

Namentlich bei den beobachteten einaxigen Krystallen, die sämmtlich recht schwache Erregungen gaben, war diese Methode nützlich, um festzustellen, daß eine beobachtete Wirkung nicht etwa auf Störungen beruhte.

22. Die Beobachtungen, bei denen mir Herr Dr. Bose behülflich gewesen ist, wurden im Einzelnen nun so angestellt, daß, nachdem die Nadel des Electrometers durch Verbindung mit der isolirten Leitung der städtischen Centrale auf 220 Volt geladen war, das Krystallpräparat zunächst in das kalte Bad eingeführt wurde, während seine (dauernd mit den Quadranten verbundenen) Belegungen geerdet waren. Hatte das Präparat soweit die Temperatur des Bades angenommen, daß bei Aufhebung der Erdung die Nadel merklich still stand, so wurde das kalte Bad gegen das warme ausgewechselt und der Umkehrpunkt der Nadel beobachtet. Darauf wurde, um die Ladungen möglichst schnell zu vernichten, die Erdung wiederhergestellt und so lange erhalten, bis wieder nach vorgenommener Isolation die Nadel merklich still blieb. Nun erfolgte abermals die Auswechselung der Bäder, Beobachtung des Umkehrpunktes u. s. f.

Was die benutzten Materialien angeht, so waren die Kalkspath- und Dolomitpräparate aus farblosen Spaltungsstücken, die Beryllpräparate aus dem großen hellgrünen Ural-Beryll hergestellt, der auch die Stäbchen für meine Elasticitätsbestimmungen geliefert hatte. Der Topas war ein großer farbloser aus Sibirien, die Baryte ebenso wasserklar, angeblich aus Cumberland, beide fast sprungfrei; der Cölestin war ganz leicht bläulich gefärbt, einzig sehr von Sprüngen durchsetzt, und stammte vom Erie-See.

Die Orientirung der Krystalle gegen das Coordinatensystem ist bei Angabe der Resultate ebenso gewählt, wie bei meinen Untersuchungen über Krystallelasticität. Bei einaxigen Krystallen ist die Z-Axe in die Hauptaxe gelegt; bei rhombischen die X-Axe in die Makro-, die Y-Axe in die Brachydiagonale, die Z- in die Verticalaxe. Die Vorzeichen beziehen sich auf eine Erwärmung.

Ist also $\mu_3 - \mu_1$ bei einem einaxigen Krystall positiv, so heißt das: ein nach S. 420 hergestelltes prismatisches Präparat, dessen Axe normal und dessen eine Querdiagonale parallel der krystallographischen Hauptaxe liegt, wird bei Erwärmung an den Polkanten positiv, an den Aequatorialkanten negativ erregt.

Ist bei einem rhombischen Krystall $\mu_2 - \mu_1 > 0$, so bedeutet dies: ein prismatisches Präparat, mit der Axe parallel der Verticalaxe, den Querdiagonalen parallel der Makro- und Brachydiagonale, wird beim Erwärmen so erregt, daß die brachydiago-

nalen Kanten positiv, die makrodiagonalen Kanten negativ erscheinen.

23) Ich gebe nunmehr einige Resultate an, wobei ich mich auf Mittheilung der Größenordnung und des Vorzeichens der Differenzen $\mu_h - \mu_k$ im Falle der Erwärmung um ca. 40° C. beschränke, die in den Formeln (12) und (13) auftreten. Die Größenordnung soll dabei durch die Worte klein, mittel, groß, sehr groß, characterisirt werden, je nachdem der der einfachen Wirkung entsprechende Ausschlag der Electrometernadel, an der 240 cm abstehenden Scala gemessen, 0 bis 1, 1 bis 5, 5 bis 20, 20 bis 50 cm betrug.

Kalkspath[1])	$\mu_3 - \mu_1 < 0$,	klein.
Dolomit	< 0,	klein.
Beryll	< 0,	(sehr) klein (unsicher).
Topas	$\mu_3 - \mu_2 < 0$,	mittel.
	$\mu_1 - \mu_3 < 0$,	groß.
	$\mu_2 - \mu_1 > 0$,	groß.
Baryt	$\mu_3 - \mu_2 < 0$,	sehr groß.
	$\mu_1 - \mu_3 > 0$,	sehr groß.
	$\mu_2 - \mu_1 > 0$,	groß.
Cölestin	$\mu_3 - \mu_2 < 0$,	sehr groß.
	$\mu_1 - \mu_3 < 0$,	mittel.
	$\mu_2 - \mu_1 > 0$,	groß.

Diese Resultate zeigen zunächst durch die ganz verschiedenen Größenordnungen, daß es sich um einen den Medien individuellen und nicht etwa einen auf Fehlern der experimentellen Anordnung beruhenden Vorgang handelt. Hiermit stimmt überein, daß die aus zwei verschiedenen Barytkrystallen beliebig herausgeschnittenen Präparate sich nach Vorzeichen und Größenordnung der Erregung gleich verhalten haben, und ähnliches auch von mehreren aus demselben Coelestin angefertigten Präparaten galt.

Ferner ist die S. 421 als experimentum crucis bezeichnete Forderung der Theorie bei rhombischen Krystallen allenthalben erfüllt: die drei Differenzen $\mu_h - \mu_k$ haben nirgends sämmtlich das

1) Das gleiche Vorzeichen ergab sich bei der Beobachtung eines natürlichen Spaltungsstückes von Kalkspath nach der auf S. 26 erörterten Methode.

gleiche Vorzeichen. Ich bemerke, daß bei Topas, wo alle Präparate angenähert dieselbe Größe hatten, auch die numerische Beziehung

$$(\mu_3 - \mu_2) + (\mu_2 - \mu_1) = (\mu_3 - \mu_1) \qquad 14)$$

angenähert erfüllt ist; bei Baryt und Cölestin gilt dies nicht, weil, dem verfügbaren Material entsprechend, die verschiedenen Präparate sehr verschiedene Dimensionen hatten, und diese Dimensionen in verschiedener Weise den Vorgang beeinflussen.

Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß auch bei ganz identisch geformten Präparaten die unmittelbaren Beobachtungen die obige Beziehung (14) nicht erfüllen können, wenn die Wärmeleitungen bei rhombischen Krystallen in den Richtungen der drei Hauptaxen erheblich verschieden sind. Denn von den transversalen Wärmeleitungen der Präparate hängt nach S. 31 ganz wesentlich ab, wie viel von der factischen Erregung zur Einwirkung auf das Electrometer gelangt.

24) Es erübrigt noch eine Erwägung der Einwände, die gegen eine Deutung der vorstehenden Beobachtungen in dem Sinne der im IV. Abschnitt auseinandergesetzten Theorie erhoben werden könnten. Wenn diese Deutung abgelehnt würde, so könnten die wahrgenommenen Vorgänge nur auf acentrischer (gewöhnlicher) Pyroelectricität beruhen, und dies würde offenbar erfordern, daß die benutzten Präparate in einer der in Abschnitt II und III erörterten Weisen aus mehreren acentrischen Theilen zusammengesetzt wären. Dabei ist sogleich in Betracht zu ziehen, daß die beobachteten Präparate nicht ganze Krystallindividuen darstellen, sondern kleine Theile von solchen, und ganz excentrisch aus den Krystallen geschnitten sind, so daß also die Wahrscheinlichkeit einer starken scheinbar centrischen Erregbarheit nicht allzugroß ist. Immerhin war eine genaue Prüfung der Frage nöthig, die ich denn auf drei Wegen angegriffen habe.

Erstens habe ich die Topas- und Barytpräparate, die nach Homogenität der Structur und Stärke der centrischen Erregung die wichtigsten waren, dem Kundtschen Bestäubungsverfahren unterworfen. Es war nach den Beobachtungen von Mack und Anderen zu erwarten, daß, wenn die Präparate aus Theilen von acentrischer Symmetrie in verschiedenen Orientirungen bestanden, deren Grenzen bei dem Bestäubungsverfahren sich markiren würden. Indessen gab die Beobachtung an den bis auf 120° C. erwärmten Präparaten auch nicht die leiseste Andeutung einer zusammengesetzten Structur. Die Flächen der Präparate zeigten überhaupt keine merkliche Wirkung auf das Mennige-Schwefel-

Gemisch, wie das den Erfahrungen anderer Beobachter mit derartig farblosen Baryten und Topasen entspricht; daß auch die Kanten mit einer Ausnahme weder Gelb- noch Rothfärbung zeigten, erklärt sich daraus, daß an den scharfen Kanten Theilchen kaum haften können, auf die benachbarten Flächenstücke aber die Ladung der Kanten tangential wirkt, also keine Staubtheilchen festzuhalten vermag. Bei einem Barytpräparat glaubte ich indessen eine leichte Färbung der Kanten im Sinne der oben entwickelten Theorie wahrzunehmen.

Nach den auf S. 398 u. f. besprochenen Beobachtungen war zu erwarten, daß eine Zusammensetzung der Präparate aus verschiedenen acentrischen Theilen sich optisch geltend machen würde. Für die hierdurch angegebene zweite Art der Prüfung ließ ich aus den Resten der benutzten Topas- und Barytkrystalle eine resp. zwei der Basis parallele Platten schneiden und poliren. Bei dem (gedrungen ausgebildeten) Topas umfaßte sie die knappe Hälfte des Querschnittes, bei den (plattenförmigen) Baryten, von denen nur kleine, wenn auch zahlreiche Stücke übrig waren, viel weniger; im Ganzen hatten beide Platten 2—3 cm² Fläche.

Im polarisirten Lichte erwiesen sich diese Platten als optisch vollkommen homogen; von einer Feldertheilung war nicht die leiseste Andeutung vorhanden. Gleiches gilt von einer dritten zur Basis normalen Barytplatte. Auch dieser Befund bestärkt die Wahrscheinlichkeit der vorgeschlagenen Deutung unserer Beobachtungen.

Eine dritte Prüfung führte ich so aus, daß ich die Mehrzahl der beobachteten Topas- und Barytpräparate mit nur zwei Belegungen gegenüberliegender Kanten versah und diese mit den Quadrantenpaaren des Electrometers verband. Bei ganz homogener Substanz, gleichförmiger Erwärmung und symmetrischen Belegungen hätte sich bei dieser Anordnung gar keine electrische Erregung durch Temperaturänderung ergeben dürfen. Dies war nun allerdings nicht der Fall; aber die eintretenden Erregungen waren erheblich, meist sogar viel kleiner, als bei der S. 29 beschriebenen Anordnung und daneben von einer auffallenden Unbestimmtheit; bei Wiederholungen wechselte nicht nur die Größe, sondern mitunter auch das Vorzeichen des Ausschlages der Electrometernadel, obwohl die Umstände der Beobachtung eigentlich besonders günstig waren.

Ich möchte insbesondere bei Topas, wo sich diese scheinbaren polaren Erregungen in sehr engen Grenzen hielten, vermuthen, daß die betreffenden Ausschläge auf ungleichförmiger Erwärmung

der Präparate (die gerade an den für die Wirkung wichtigsten Kanten wesentlich durch die angebrachten Belegungen aus Kupferblech bedingt werden) und auf der ungleichen Influenzirung dieser Belege beruhen. In der That ist ja zur Erzielung eines Ausschlages der Electrometernadel keineswegs ein verschiedenes Vorzeichen der Ladungen der Quadrantenpaare erforderlich; es genügt, daß ihre Potentiale an Größe abweichen. Bei Baryt waren die scheinbar polaren Wirkungen relativ zu den centrischen etwas stärker; es ist nicht unmöglich, daß hier eine der im III. Abschnitt besprochenenen chemischen Wirkungen sich neben der im IV. Abschnitt besprochenen wirklichen centrischen Erregung geltend machte. Ein triftiges Argument gegen die letztere scheint mir aber aus allen den beschriebenen Versuchen nicht herleitbar zu sein.

Schließlich sei neben der Thatsache, daß Präparate aus zwei verschiedenen Barytkrystallen und verschiedene aus demselben Coelestin sich gleich verhielten, nochmals das S. 28 erörterte experimentum crucis hervorgehoben. Daß diese Forderung der Theorie sich bei allen den drei beobachteten rhombischen Krystallen übereinstimmend erfüllt gezeigt hat, könnte sich ja vielleicht auch anders erklären; jedenfalls folgt aber aus der hier discutierten gegnerischen Ansicht, die eine acentrische Erregung annimmt, eine solche Regel nicht; ihre Bestätigung darf somit wohl auch als eine Stütze der Annahme einer wirklich centrischen Erregung betrachtet werden.

Ein völlig zwingender Beweis derselben ist natürlich unmöglich; ich glaube aber, jede mögliche Prüfung vorgenommen zu haben und bin dabei auf ernstliche Widersprüche nicht gestoßen.

Resultate.

Die meisten früher beobachteten pyroelectrischen Erregungen centrisch symmetrischer Krystalle sind nicht in den kleinsten Theilen centrisch, sondern acentrisch: die centrische Erregung des ganzen Krystalles beruhte vielmehr auf dessen symmetrischem Aufbau aus Theilen, die entweder wirklich acentrischen Individuen angehörten oder secundär zu acentrischer electrischer Erregung fähig geworden waren. Näheres hierüber enthält der II. und der III. Abschnitt der vorstehenden Arbeit.

Indessen ist nach dem heutigen Zustande unserer molekulartheoretischen Vorstellungen eine wirkliche centrische Pyroelectricität keineswegs unwahrscheinlich. Der IV. Abschnitt entwickelt

die Theorie einer derartigen Erregung; dieselbe zeigt einerseits, daß und warum unter Umständen, wo man eine merkliche Wirkung einer solchen Erregung erwarten möchte, dieselbe sich doch der Beobachtung entzieht; sie giebt auch die Hinweise, wie man die Verhältnisse zu wählen hat, um mit besten Aussichten zu beobachten.

Im V. Abschnitt ist über nach diesen Regeln angestellte Beobachtungen berichtet, welche bei einer ziemlichen Anzahl von Krystallen schwächere oder stärkere Wirkungen ergeben haben, die nach allen begleitenden Umständen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf eine solche, in den kleinsten Theilen centrische pyroelectrische Erregung gedeutet werden dürfen.

Anhang.

Ueber Piezoelectricität centrischer Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. October 1905.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, unterscheiden wir bei acentrischen Krystallen zwei Arten pyroelectrischer Erregung, die eine (wahre), die auch bestehen bleibt, wenn die Temperaturänderung bei aufgehobener oder verhinderter Deformation stattfindet, und die andere (falsche), die mit den Deformationen verschwindet, also wesentlich auf ihnen beruht und von der Temperaturänderung nur insofern bewirkt wird, als letztere Deformationen hervorruft, somit im Grunde piezoelectrisch ist.

Es kann kein Zweifel sein, daß, wenn wirkliche centrische Pyroelectricität vorkommt, Gleiches auch von centrischer Piezoelectricität gelten wird; die Verhältnisse liegen eben ganz analog. Werden die molekularen Systeme electrischer Pole in acentrischen Krystallen sowohl durch Erwärmung, als durch Deformation beeinflußt, so ist nicht einzusehen, warum bei centrischen Krystallen die letztere Wirkung fehlen sollte.

Existirt nun eine wirkliche centrische Piezoelectricität, so sind die Momente μ_{hk} in den früheren Formeln nicht nur Functionen der Temperatur, sondern auch der Deformationen; da aber die Momente μ_{hk} und die Deformationen je ein Tensortripel bestimmen, und da man als elementarsten Ansatz den einer linearen Beziehung zwischen beiden wählen wird, so sind die allgemeinsten Grundformeln der centrischen Piezoelectricität conform mit denjenigen der Elasticität vor Einführung der energetischen Beziehungen, welche die Anzahl der Parameter von 36 auf 21 reducirt. Die Specialisirung dieses allgemeinen Ansatzes auf die 32 Krystallgruppen habe ich seiner Zeit durchgeführt[1]); der Vorgang ist centrisch-symmetrisch und demgemäß ergeben sich nur neun unter einander verschiedene Obergruppen.

Nach dem Inhalt von § 18 bietet es keine Schwierigkeiten, ein Krystallpräparat durch mechanische Einwirkungen so zu deformiren, daß es merkliche centrisch-piezoelectrische Wirkungen äußern könnte.

Beispielsweise lauten für einen rhombischen Krystall die Beziehungen zwischen den Momenten und den Deformationsgrößen

$$\text{15)}\quad \begin{aligned} \mu_{11} &= \alpha_{11} x_x + \alpha_{12} y_y + \alpha_{13} z_z, & \mu_{23} &= \alpha_{44} y_z, \\ \mu_{22} &= \alpha_{21} x_x + \alpha_{22} y_y + \alpha_{23} z_z, & \mu_{31} &= \alpha_{55} z_x, \\ \mu_{33} &= \alpha_{31} x_x + \alpha_{32} y_y + \alpha_{33} z_z, & \mu_{12} &= \alpha_{66} x_y; \end{aligned}$$

die Anzahl der Constanten α_{hk} ist zwölf. Drückt man — was für das Weitere bequemer ist — die Deformationsgrößen durch die Druckcomponenten $X_x, \ldots X_y$ aus, so erhält man analog

$$\text{16)}\quad \mu_{11} = \beta_{11} X_x + \beta_{12} Y_y + \beta_{13} Z_z, \quad \mu_{23} = \beta_{44} Y_z,$$

u. s. f.

Dieselben Beziehungen gelten auch für das quadratische und das hexagonale System mit einigen Beziehungen zwischen den Parametern, von denen für uns nur das Quadrupel

$$\text{17)}\quad \beta_{11} = \beta_{22}, \quad \beta_{12} = \beta_{21}, \quad \beta_{13} = \beta_{23}, \quad \beta_{31} = \beta_{32}$$

in Betracht kommt. Das rhomboedrische System läßt sich nicht als Specialfall von (15) behandeln. Es soll aber, da die zutretenden Glieder für uns nicht wesentlich sind, hier dem hexagonalen einfach analog behandelt werden.

Es mag besonders hervorgehoben werden, daß bei der Specialisirung des Ansatzes (15) auf reguläre Krystalle und auf iso-

1) W. Voigt, Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. in Gött. 36, 11, 1890.

trope Körper die β_{hk} nicht verschwinden. Die centrische piezoelectrische Erregung ist also principiell nicht auf Krystalle beschränkt; aber, wie es scheint, giebt es nicht viele practisch ausführbare Anordnungen, bei denen eine solche Erregung isotroper Körper beobachtbare Wirkungen liefert.

Für einen mit seiner Axe parallel zur X-Axe geschnittenen Cylinder erhält man bei longitudinaler Compression, da hier $X_x = P_1$, d. h. gleich der auf die Flächeneinheit ausgeübten Druckkraft ist, und die übrigen Druckcomponenten verschwinden,

$$\mu_{11} = \beta_{11} P_1, \quad \mu_{22} = \beta_{21} P_1, \quad \mu_{33} = \beta_{31} P_1, \\ \mu_{23} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{12} = 0. \tag{18}$$

Hat der Cylinder insbesondere die Form eines rechteckigen Prisma mit Querschnittsdiagonalen parallel Y und Z, so ergeben Betrachtungen, die den in § 18 angestellten ganz analog sind, daß er durch den Druck — abgesehen von wenig wirksamen entgegengesetzten Ladungen zu beiden Seiten der Grundkanten — nur so erregt wird, daß die Längskanten abwechselnd entgegengesetzte Ladungen annehmen, deren Dichten proportional mit $\pm(\mu_{33} - \mu_{22})$, d. h. mit $\pm(\beta_{31} - \beta_{21})$ sind. Bei isotropen Körpern ist natürlich nach Symmetrie $\beta_{31} - \beta_{21}$ gleich Null. Mit drei derartigen Prismen, deren Lagen cyclisch in einander übergehen, bietet es also keine Schwierigkeit, die Differenzen

$$\beta_{31} - \beta_{21}, \quad \beta_{12} - \beta_{32}, \quad \beta_{23} - \beta_{13}$$

für einen rhombischen Krystall zu bestimmen. Leider sind hiermit erst drei unabhängige Combinationen der 12 unabhängigen Parameter erhalten, und es wird umständlich sein, die übrigen 9 zu bestimmen. Vorläufig handelte es sich aber nur darum, die wirkliche Existenz der durch die Theorie als wahrscheinlich erwiesenen Wirkung in einigen Fällen nachzuweisen.

Wir unterwarfen der Beobachtung demgemäß die oben auf centrische Pyroelectricität untersuchten Präparate; dieselben wurden mit der Prismenaxe aufrecht auf eine Unterlage von Hartgummi gestellt, ebenso mit einer Hartgummiplatte bedeckt und mittelst einer einfachen Hebelvorrichtung einem Druck ausgesetzt. Die Ladungen der Kanten, die beim Be- und Entlasten auftreten, wurden wie oben bei der pyroelectrischen Erregung durch angebrachte kupferne Belegungen, die dauernd mit den Quadranten verbunden waren, zur Einwirkung auf das Electrometer gebracht. Auch hier soll nur eine Vorstellung von der Größenordnung und dem Sinne der beobachteten Ausschläge gegeben werden. Quanti-

tative Bestimmungen bieten vorläufig kein Interesse und scheinen schwierig zu sein.

Schon bei den Messungen der acentrischen piezoelectrischen Erregungen wird die Genauigkeit durch die Schwierigkeit, das Präparat wirklich gleichförmig zu drücken, sehr beeinträchtigt; in noch weit höherem Maaße gilt dies bei centrischer Erregung. Im ersten Falle operirt man nämlich mit Flächenbelegungen, da die scheinbaren Ladungen bei homogenem Druck auf Flächen liegen; im letzten Falle sind Kantenbelegungen anzuwenden, da bei homogenem Druck Kantenladungen auftreten. Eine einfache Ueberlegung zeigt, daß die Wirkung eines inhomogenen Druckes, (der im ersten Falle die Flächenladungen verändert und räumliche Ladungen hervorruft, im zweiten Falle räumliche und flächenhafte Ladungen bewirkt und die Kantenladungen verändert) im zweiten Falle viel stärker sein wird, als im ersten. Die Flächenbelegung summirt eben über ein viel größeres Gebiet, als die Kantenbelegung.

In der That hat sich denn auch bei den Beobachtungen, die wir mit den zu den früheren Untersuchungen benutzten Präparaten angestellt haben, eine sehr große Inconstanz der Resultate ergeben, und die nachstehende Zusammenstellung hat noch weniger Bedeutung, als die in § 23. Immerhin halte ich, wegen gewisser interessanter Resultate die Mittheilung für angezeigt.

Die Größenordnung der beobachteten Erregung ist als klein, mittel, groß, sehr groß bezeichnet, je nachdem die bei Be- oder Entlastung mit 1 kg pro cm² beobachteten Ausschläge von 0 bis 0,5, 0,5 bis 2, 2 bis 10, 10 bis 50 mm betrugen. Da man gelegentlich Prismen von 0,2 cm² Querschnitt mit 10 kg drücken konnte, wodurch die Wirkung sich auf das 50-fache steigert, so waren auch die den „kleinen“ Erregungen entsprechenden Ausschläge sehr merklich.

Bei den nicht sprungfreien Krystallen, wie Dolomit und besonders Coelestin ist auch die Angabe der Größenordnung einigermaßen unsicher, da die Beobachtungen besonders inconstante Resultate ergaben; offenbar finden hier je nach der Art der Belastung Verschiebungen längs der Sprungflächen statt, die jede Regelmäßigkeit der Deformation aufheben.

Das Vorzeichen der angegebenen Differenzen zweier β_{hk} bezieht sich auf die Entlastung.

Kalkspath	$\beta_{31} - \beta_{21} < 0$	mittel.
Dolomit	> 0	klein.
Beryll	> 0	(sehr) klein.
Topas	$\beta_{31} - \beta_{21} > 0$	mittel.
	$\beta_{12} - \beta_{32} < 0$	klein.
	$\beta_{23} - \beta_{13} > 0$	mittel.
Baryt	$\beta_{31} - \beta_{21} > 0$	sehr groß.
	$\beta_{12} - \beta_{32} < 0$	groß.
	$\beta_{23} - \beta_{13} > 0$	groß.
Coelestin	$\beta_{31} - \beta_{21} > 0$	klein.
	$\beta_{12} - \beta_{32} > 0$	groß.
	$\beta_{23} - \beta_{13} > 0$	mittel.

Vergleicht man diese Tabelle mit der auf S. 427 gegebenen, so fallen einige Resultate als unerwartet auf. Einerseits entsprechen sich nicht überall — wie man nach den Resultaten an acentrischen Krystallen erwarten möchte — die Vorzeichen der Parameterdifferenzen; es wirkt also bei centrischen Krystallen Entlastung nicht immer in demselben Sinne wie Erwärmung; andererseits geben von den Präparaten eines rhombischen Krystalles nicht etwa regelmäßig dieselben größte oder kleinste pyro- und piezoelectrischen Erregungen.

Daß es sich bei den beschriebenen Beobachtungen wirklich um eine centrisch-symmetrische Erregung handelt, läßt sich natürlich auch hier nicht streng nachweisen. Doch fallen die S. 428 bis 430 erörterten Thatsachen dafür einigermaßen ins Gewicht Einige Beobachtungen mit nur zwei Belegungen, die allein die polaren Wirkungen zur Geltung kommen ließen, gaben Resultate, die den S. 429 besprochenen ganz analog waren und ähnliche Folgerungen gestatten. Es muß zunächst genügen, die Möglichkeit centrischer piezoelectrischer Erregungen gezeigt und ihr Auftreten einigermaßen wahrscheinlich gemacht zu haben.

Ueber centrische Influenzirung centrischer Krystalle.

Den beiden im Vorstehenden betrachteten centrischen Erregungen durch Erwärmung und durch Deformation schließt sich offenbar noch eine dritte an: auch durch Influenz kann ein centrischer Krystall centrisch erregt werden, und zwar ist dieser

Bemerkungen zu meinem Aufsatz über die sternförmige Erscheinung der Sterne. (Nachrichten 1905 p. 238).

Von

W. Holtz (Greifswald).

Mit einer Figur.

Vorgelegt vom vorsitzenden Sekretär in der Sitzung am 25. November 1905.

Ich bedaure sehr, daß ich bei Abfassung der früheren Mittheilung die einschlägige Literatur nicht genügend kannte und so eine Wahrnehmung als neu beschrieb, die es längst nicht mehr ist, und in Folge dessen auch eine unrichtige Erklärung gab. Vielleicht entlastet mich der Umstand ein wenig, daß der fragliche Gegenstand nur in physiologischen Büchern und nur unter Astigmatismus (der Linse nämlich) auffindbar ist, während ich bei den von mir gesehenen Bildern eine Mitwirkung der Linse kaum für möglich halten konnte.

Jetzt weiß ich, daß schon Young[1]) die strahlenförmige Erscheinung künstlicher Lichtpunkte studierte und aus einer Ungleichmäßigkeit der vorderen Linsenfläche zu erklären suchte. Hassenfratz[2]) sah in den Strahlen die Schnittlinien je zweier kaustischen Flächen, die er für eine Folge der ungleichmäßigen Form der Linse sowohl als der Cornea hielt. Aehnlich Fliedner[3]), der neben künstlichen Lichtpunkten auch Sterne betrachtete, aber merkwürdig strahlenarme und mißgestaltete Bilder sah. Donders[4])

1) Phil. Trans. 1 p. 43.
2) Ann. d. Chim. 72 p. 5.
3) Pogg. Ann. 85 p. 321.
4) Arch. f. Ophthalm. 7 Abt. 1 p. 192.

s einer Ungleichmäßigkeit der ge-
ich spricht sich Helmholtz [1]) aus.
nte, daß die verschiedenen Linsen-
kte hätten und so bei unvollkommener
entrum umkränzende Zerstreuungs-

e beiden oberen der nebenstehenden
n zeigen, wie Helmholtz künstliche
nkte mit dem linken und dem rechten
ah. Sie entsprechen der gegebenen
ng, da Jeder sie leicht durch den
Anblick für ein Conglomerat solcher
ungsbilder hält. Die beiden unteren
n dagegen zeigen, wie ich hellere
und Abends auch die noch mit dem
ämmchen brennenden Laternen sah.
hene Flecke, sondern scharf begrenzte
sie wohl eher aus einer Ungleichheit
Linse erklären konnte. Jetzt weiß
rung nicht zutrifft, weil am Staar
Linse fehlt, die Sterne, wie es heißt,
r noch ein Anderes spricht dagegen,
. der Mondsichel, welche, nach obiger
iner Ungleichmäßigkeit der Netzhaut
wischen beiden Erscheinungen waltet
en ich bisher nicht erwähnt finde.
gleich und immer von gleicher Ge-
eitweisen Veränderungen durch die
holtz merkwürdiger Weise garnicht
Mondsichel aber tritt erst allmählich
mer von gleicher Form. Der Grund
solche Bilder, welche auf derselben
zu einem Bilde zusammenschmelzen,
rschmelzungen immer einer gewissen
ich beide Erscheinungen auch bin-
lich, oder richtiger von schwankender
h, da die Bilder beider Augen ver-
ohl zeitweise der Eindruck des einen
berwiegt.
nung, aber gleichfalls ein Strahlen-

p. 170.

bild gewahrt man, wenn man nach helleren Punkten z. B. hell brennenden Laternen sieht, oder besser nach kleinen von der Sonne beschienenen convexen Flächen, oder einem kleinen elektrischen Kohlenlicht. Es ist ein aus unzähligen radial gerichteten feinsten farbigen Linien den Lichtpunkt in weitem Umfange umgebender Kranz. Helmholtz nennt ihn Haarstrahlenkranz und führt ihn nur flüchtig an, ohne eine Erklärung zu geben, läßt aber durchblicken, daß er wohl auch aus der strahligen Beschaffenheit der Linse resultiert. In der That möchte man glauben, daß deren unzählige radiale Fasern durchleuchtet fast zu selbstleuchtenden Gebilden würden. Behaucht man die Brillengläser, so sieht man gleichzeitig die Beugungsringe d. h. man sieht diese von unzähligen Lichtfäden durchzogen, welche nach außen länger, nach innen kürzer zu werden scheinen. Sieht man den Strahlenkranz für sich, so herrscht häufig eigenthümliche Bewegung in ihm, zumal in den mittleren Partien, als ob die Strahlen ihre Lage änderten. Aber hieran sind zweifellos nur die fliegenden Mücken schuld, deren Conturen man übrigens nicht sieht, weil die Unruhe nach Augenbewegungen größer ist und allmählich erlischt.

Die drei Haupterscheinungen sind so alltäglich und eigenartig, daß sie auch in physikalischen Lehrbüchern, deucht mir, eine kurze Erwähnung finden sollten.

Die Wirkung des Hintergrundes bei der Größenschätzung z. B. des Mondes am Horizont.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Mit einer Figur.

Vorgelegt vom vorsitzenden Sekretär in der Sitzung am 25. November 1905.

Es ist ein seit Ptolemäus [1]) bekanntes Theorem, daß wir uns bei der Größenschätzung nicht bloß nach dem Sehwinkel richten, sondern die scheinbare Entfernung mit berücksichtigen und von zwei Körpern gleichen Sehwinkels denjenigen größer sehn, welcher uns ferner scheint. Wieviel größer wir ihn sehn, hängt, wie ich durch Versuche zu ermitteln suchte [2]), von der scheinbaren relativen sowohl als absoluten Entfernung ab, aber auch davon, ob wir mit einem oder mit beiden Augen und ob wir die Körper seitlich einander näher oder ferner sehn. Ich zeigte auch mit Hülfe kleiner Apparate [3]), daß, wenn bei gleichgroßen und gleichentfernten Objecten dem Auge für das eine eine größere Entfernung vorgespiegelt wird, dieses sofort größer erscheint, und daß dasselbe Object augenfällig anschwillt, wenn man dem Auge vorspiegelt, daß es in größere Entfernung rückt. Letztern Falls benutzte ich einen Apparat, bei dem man durch eine Oeffnung nach einem kleinen senkrecht gestellten Scheibchen sieht, das anschwillt, sobald eine dahinter befindliche größere Scheibe, an der man das Scheibchen haften wähnt, weiter fortgeschoben wird. Es ist eine Modificierung des von R. Smith [4]) angegebenen Ex-

1) Priestley, Geschichte der Optik, übers. von Klügel p. 11.
2) Diese Nachr. 1893 p. 159.
3) Diese Nachr. 1893 p. 469.
4) R. Smith, Opticks, remarks p. 48.

perimentes mit der in den Brennpunkt einer Linse gestellten Oblate, welche anschwillt, wenn man sich von der Linse entfernt. Aber ich sprach schon damals die Vermuthung aus, daß es sich bei beiden Experimenten wohl nicht allein um die scheinbare Zunahme der Entfernung handle, sondern daß auch die scheinbare Verkleinerung des Hintergrundes mitwirke, für den bei dem Smith'schen Versuch die Fassung der Linse zu setzen sei.

Daß wir Gegenstände größer sehn auf kleinerem Hintergrunde, und daß letzterer also bei der Größenschätzung mitwirkt, kann garnicht bestritten werden. Von drei gleichgroßen Scheibchen sei eins auf ein anders farbiges Papierstück, das zweite auf die Tischfläche gelegt und das dritte an einem feinen senkrechten Stäbchen so befestigt, daß die Wand den Hintergrund macht. Dann wird letzteres von allen am kleinsten erscheinen. Ein Stuhl erscheint kleiner in der Mitte des Zimmers als an der Wand und am kleinsten, wenn man ihn auf der Straße sieht. Es ist eine Kontrastwirkung ähnlich derjenigen, nach welcher ein kleiner Mensch neben einem größeren noch kleiner erscheint. Die beiden genannten Experimente zeigten dies ja auch, aber hier war der Effect nicht rein, sondern hing noch von der scheinbaren Zunahme der Entfernung ab. Es schien mir daher nicht überflüssig eine Vorrichtung zu construieren, bei der man das Anschwellen eines Scheibchens nur wegen verkleinerten Hintergrundes sieht. Ich nahm ein winkliges schwarzes Pappstück von 50 cm Länge mit einem Schlitz in der Mittellinie von 1—2 mm Breite (Fig. 1). Vor demselben konnte eine Cartonscheibe an einer durch den Schlitz gesteckten Nadel und einer hinteren Leiste hin und her geschoben werden. Man sah die Scheibe dann allemal anschwellen, in dem Maaße, als sie der Winkelspitze näher trat. Es war zweifelhaft, ob ein ähnlicher Effect noch eintreten würde, wenn das Pappstück nicht mehr winklig war. Ich nahm deshalb eine 75 cm große Pappscheibe mit radialem Schlitz und sonst gleichem Mechanismus versehn. Auch hier schwoll die weiße Scheibe noch an, wenn sie aus der Mitte kommend dem Rande näher trat. Die letztere Form wählte ich wegen des Sonnen- und Mondproblems, von dem ich gleich reden will. Sonst führe ich noch folgende fast gleichwiegende Experimente an. Man sehe durch ein kurzes Papprohr, das leicht verschiebbar im Innern eines andern steckt, nach einer aufgestellten Scheibe hin. Verschiebt man dann das innere nach außen, so verkleinert sich das Gesichtsfeld, und die Scheibe schwillt

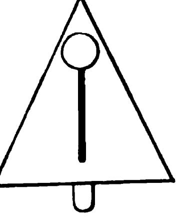


Fig. 1.

augenscheinlich an. Man erzeuge mit Sonnen- oder Projectionslicht eine größere Lichtfläche und hefte dem Schirm in ihrer Mitte eine farbige Scheibe an. Man sieht sie dann jedesmal anschwellen, wenn man durch schnelle Verschiebung der Linse jene Fläche kleiner macht. In beiden Fällen ist es erwünscht, daß die Scheibe immer möglichst in der Mitte des größeren Feldes bleibt.

Nach Ptolemäus, Alhazen[1]) und R. Smith sehn wir Sonne und Mond deshalb größer am Horizont, weil uns der Himmel dort ferner zu liegen scheint. Die späteren Physiker schlossen sich dem an, nur wenige führten noch andre Gründe, wie die Wirkung von Dünsten oder die Einschränkung des Hintergrundes auf. Anfang der 90er Jahre stellte dann E. Reimann[2]) besonders sorgfältige und vielseitige Messungen über die scheinbare Gestalt des Himmels an, welche das Interesse für jene Frage neu belebten. Er selber behandelt sie in einer dritten Arbeit[3]) und meint, daß die fragliche Vergrößerung aus der scheinbaren Gestalt des Himmels allein erklärlich sei. 1898 aber meinte K. Lühr[4]), daß eine Wirkung des Hintergrundes oder Contrastes hierbei wahrscheinlicher sei.

Ich sagte am Ende meiner zweiten Arbeit, daß Vergrößerung der Entfernung und Verkleinerung des Hintergrundes meistens Hand in Hand gingen und in ihrer Wirkung somit schwer zu sondern sein. Heute, nach den mitgetheilten Versuchen, glaube ich erst recht, daß wir bei der scheinbaren Vergrößerung jener Gestirne die Verkleinerung des Hintergrundes mit empfinden. Ganz sicher ist dies unter abnormen Verhältnissen, wenn wir den Mond z. B. zwischen Bäumen oder am Ende einer Straße zwischen Häusern sehn, wo er jedem Menschen besonders groß erscheint. Aber auch für gewöhnlich dürfte wenigstens ein Theil der scheinbaren Vergrößerung auf Rechnung des verkleinerten Hintergrundes zu setzen sein.

---

1) Alhazen, Optic 7 p. 53.

2) E. Reimann, Beiträge zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes, Programmarb. d. Hirschberger Gymnas. Ostern 1890 u. 1891.

3) E. Reimann, die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizont, Programmarb. Ostern 1903.

4) Mitth. d. Vereins v. Freunden d. Astron. u. kosm. Physik 8 (3) p. 31.

Das hüpfende Bild bei abwechselnd links- und rechtsäugigem Sehen.

Von

W. Holtz (Greifswald).

Vorgelegt vom vorsitzenden Sekretär in der Sitzung vom 25. November 1905.

Ich hatte vor längerer Zeit eine gewisse Schwierigkeit beim Sehen in die Ferne, als ob die beiden Bilder meiner Augen nicht mit einander harmonieren wollten. Endlich verschob ich die Brille ein wenig und fand, daß ich deutlicher sah, wenn das linke Brillenglas etwas tiefer lag, woraus ich schloß, daß die Stellung meiner Augen beim Sehen in die Ferne nicht ganz gleichmäßig sei. Um dies zu prüfen, schloß ich abwechselnd das linke und rechte Auge, einen Punkt fixierend, der etwa in gleicher Höhe mit ihnen lag, und fand nun, daß sich das Bild allemal hob, wenn ich mit dem linken, und senkte, wenn ich mit dem rechten Auge sah. Aber auch beim Fixieren höher oder tiefer gelegener Punkte ergab sich ein Gleiches, auch ein Gleiches, wenn ich abwechselnd mit beiden und dann nur mit dem linken Auge sah. Keine Hebung und Senkung indessen gewahrte ich, wenn ich abwechselnd mit beiden und dann nur mit dem rechten Auge sah.

Ich hielt die Erscheinung anfangs für einen specifischen Fehler meiner Augen, erfuhr aber bald, als ich Andre fragte, wie sich ihre Augen dabei verhielten, daß es ein sehr verbreiteter Fehler unsrer Augen sei. Angeboren konnte er nicht sein; er mußte sich also durch irgend eine Lebensgewohnheit allmählich entwickelt haben, und da dachte ich gleich, daß er während des Schreibens entstanden sei. Wir schreiben mit der Rechten und legen deshalb das Papier aus Bequemlichkeit mehr vor die rechte als die linke Seite des Körpers, so daß das linke Auge demselben

stets etwas ferner ist. Hieraus folgt dann, daß wir beim Fixieren der Feder das linke um einen kleineren Winkel, als das rechte, nach unten drehen müssen, wenn beide Augenbilder auf identische Stellen der Netzhaut fallen sollen. Geschähe dies nur ausnahmsweise, so würde es weiter nicht schaden; da wir es täglich und meist täglich mehrere Stunden thun, so gewöhnen sich unsre Augen an diese Stellung und behalten sie auch bei, wenn wir nach andern Gegenständen sehn. Dann können die Bilder aber nicht mehr genau identisch liegen, und die Folge ist, daß wir weniger deutlich sehn. Tragen wir eine Brille, so kann der Fehler durch Senkung des linken Brillenglases etwas verringert werden. Hiernach müßte man beim Schreiben, oder allgemein rechts gelegene Punkte fixierend, wenn man abwechselnd links- und rechtsäugig sieht, keine hüpfende Bilder sehn. Dies geschieht aber doch etwas und spricht also gegen meine Erklärung. Andrerseits spricht dafür, daß, wenn wir links gelegene Punkte fixieren, die hüpfende Bewegung die entgegengesetzte wird.

Uebrigens sollte es mich wundern, wenn über die Erscheinungen, welche ich hier erwähne, nicht schon irgendwo geschrieben wäre. In der physiologischen Optik von Helmholtz finde ich jedoch Nichts, auch nicht in den Referaten der Beiblätter, soweit sie die physiologische Optik betreffen, desgleichen in physiologischen Zeitschriften, soweit ich sie sah; aber es giebt ihrer gegenwärtig so viele, daß alle zu durchforschen fast unmöglich ist. Andrerseits sehe ich aus der Schrift v. Zehnder's [1]) und mehr noch aus derjenigen von Ahrens [2]), daß die unrichtige Augenstellung beim Schreiben schon erkannt und eine Verbesserung von verschiedenen Seiten in Erwägung gezogen ist. Die fraglichen Erscheinungen jedoch finde ich auch hier nicht erwähnt, doch muß ich bemerken, daß mir v. Zehnder's Schrift nur in einem Referate zugänglich war.

1) v. Zehnder, über optische Täuschungen u. s. w. Leipz. 1902.

2) A. Ahrens, Untersuchung über die Bewegung der Augen beim Schreiben, Dissert. Rostock 1891.

Messungen der Dichte des vertikalen elektrischen Leitungsstromes in der freien Atmosphäre bei der Ballonfahrt vom 30. VIII. 1905.

Von

H. Gerdien.

Mit einer Tafel.

Vorgelegt von Herrn Wiechert in der Sitzung am 25. November 1905.

Am 30. August dieses Jahres hatte ich wiederum Gelegenheit, meine luftelektrischen Arbeiten im Freiballon fortzuführen; die Fahrt fand statt zur Zeit einer in Mitteleuropa partiellen Sonnenfinsternis und gehörte dem Kreise der zum Studium dieses Phänomens auf internationaler Grundlage vereinbarten wissenschaftlichen Untersuchungen an. Obgleich ich einen einwandfrei feststellbaren Einfluß der Sonnenfinsternis auf die luftelektrischen Phänomene in den mittels des Freiballons zugänglichen Schichten der Atmosphäre nicht erwartete, entschloß ich mich freudig zur Teilnahme an der Fahrt, da mir jede Gelegenheit, meine hypothetischen Annahmen[1]) über den Elektrizitätshaushalt der unteren Atmosphäre durch die Beobachtung nachzuprüfen, willkommen sein mußte. Wiederum bin ich Herrn Geheimrat R. Aßmann dafür zu Dank verpflichtet, daß er mir die Teilnahme an dieser Fahrt gestattete und mir sogar die Führung des Ballons anvertraute.

Das luftelektrische Instrumentarium.

Das bei dieser Fahrt benutzte luftelektrische Intrumentarium war identisch mit dem bei der Fahrt vom 11. Mai dieses Jahres[2])

1) H. Gerdien, Phys. Z.-S., 6, 647—666, 1905.

2) H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. der Wissenschaften in Göttingen Math.-phys. Klasse 1905. 240—251, 258—270.

mit Erfolg verwendeten; lediglich an dem Elektrometer für Potentialgefällemessung war eine Änderung der Schutzbacken vorgenommen worden, welche eine bessere Sicherung der Aluminiumblättchen gegen Beschädigung auf dem Transport bezweckte. Die Schutzbacken umfaßten zusammen geschoben den Blättchenträger mit den Blättchen in analoger Weise, wie bei meinem Elektrometer zur Untersuchung radioactiver Induktionen, das ich an anderer Stelle beschrieben habe [1]).

Verhütung von Ballonladungen, Ballast.

Die luftelektrischen Messungen wurden wieder unter den erprobten Vorsichtsmaßregeln ausgeführt, die in meinem Bericht über die Fahrt vom 11. Mai beschrieben sind.

Ich hatte geplant, bei dieser Fahrt, für deren Führung ich allein verantwortlich sein sollte, den größten Teil des verfügbaren Ballastes in Form von Warmwasserballast und nur den für das Abfahrts- und Landungsmanöver notwendigen Teil in Form von Sandballast mitzunehmen. Zur Aufbewahrung des Wasserballasts hatte ich bei der Firma Riedinger in Augsburg 4 Säcke aus Ballonstoff mit Umhüllungssäcken aus grober Leinwand anfertigen lassen; die Säcke waren zylindrisch mit abgerundeten Enden und hielten je 80 Liter. An den etwa 1,1 m auseinanderliegenden Enden waren Schlauchansätze von 30 mm lichter Weite und 30 mm Länge nach aussen angekittet, durch die von oben bis unten in der Längsachse des Sackes ein Messingrohr von etwa 1,2 m Länge hindurchgesteckt war. Das Rohr war innerhalb der Schlauchansätze mit aufgelöteten Ringen versehen, zwischen welchen die Schlauchansätze abgebunden wurden. Innerhalb des Sackes hatte das Messingrohr dicht unter dem oberen Schlauchansatz eine kleine seitliche Öffnung und dicht über dem Boden zwei diametral gegenüberliegende Schlitze von etwa 10 cm Länge und je etwa 10 cm^2 Querschnitt, die oben und unten spitz zuliefen. Unterhalb dieser Schlitze war das Rohr durch einen Kolben mit gefetteter Ledermanschette abgedichtet, der von oben mittels eines axial innerhalb des Rohrs geführten, oben mit Handgriff versehenen Eisendrahtes von 8 mm Dicke auf- und abgeschoben werden konnte. Der Draht war am oberen Rohrende durch einen locker schließenden Korkstopfen geführt und konnte hier in jeder gewünschten Höhe festgeklemmt werden. (Die Füllung geschieht am besten durch einen Schlauch, den man über das unten aus dem Boden des Sackes

1) H. Gerdien, Phys. Z.-S. 6, 433–436, 1905.

herausragende Ende des Messingrohrs überschiebt, bei frei aufgehängtem Sack und hochgezogenem Kolben.) Diese Verschlüsse[1]) gestatteten eine Regulierung des Wasserausflusses von einigen Tropfen in der Sekunde bis zur Entleerung des ganzen Inhalts von 80 Litern in etwa $^3/_4$ Minute. Die Säcke sollten außen an der Korbwand in Netzen aus starkem Hanfleinen, deren Enden am Ringe befestigt waren, aufgehängt werden. Leider wurden zwei von ihnen schon bei der Füllung bezw. bei dem Transport zum Korbe beschädigt, so daß bei der Fahrt nur 160 kg Wasserballast — immerhin erheblich mehr als bei den früheren Fahrten — zur Verwendung kommen konnten. Zur Speisung der Spritzkollektoren wurden etwa 50 Liter Alkohol in einem der früher zur Aufnahme von Wasserballast verwendeten Ballonstoffsacke mitgeführt.

Resultate.

Fahrtbericht: Ballon „Brandenburg" (1280 cbm), Füllung 1200 cbm Wasserstoff; Ballast 27 Sack Sand, 160 kg Wasser circa 40 kg Alkohol: Abfahrt von Berlin, Übungsplatz des Luftschiffer-Bat. 30. August 1905, $10^h\ 33^m$ a. Landung bei Novemiasto 25 km nördlich von Modlin (Novo-Georgiewsk), Russ. Gouvernement Warschau $5^h\ 35^m$ p. Ballonführer H. Gerdien, (Luftelektrische Beobachtungen), Teilnehmer: Dr. A. Wegener (Meteorologische und Astronomische Beobachtungen). Die Führung des Ballons unterlag insofern einigen Beschränkungen, als die Abfahrt erst nach 10^h a. erfolgen sollte und noch vor Eintritt der Sonnenfinsternis die unteren Wolken überflogen werden mußten. Die Abfahrt verzögerte sich ein wenig durch die Montierung der Instrumente und des Wasserballasts; bei frischem Westwinde konnte endlich der Ballon losgelassen werden. Er erreichte schon unterhalb 1000 m die Prallhöhe. Eine zeitweise vollkommen geschlossene Strato-Cumulus-Decke lag über uns, unter ihr flogen einzelne Fracto-Cumuli, in deren Bereich mehrfach Wind im Korbe gespürt wurde. Es galt zunächst, in der kurzen noch verfügbaren Zeit die Orientierung zu behalten. Der Ballon verbrauchte unter der Strato-Cumulus-Decke sehr viel Ballast, da er durch Niederschläge belastet wurde. Obgleich hin und wieder der Ausblick nach der Erde durch Zusammenschließen der Fracto-Cumuli verhindert wurde, gelang es doch, die Orientierung noch etwa $1^1/_2$ Stunden nach der Abfahrt zu behalten; die Fahrt ging mit in größeren

1) Die Verschlüsse waren von der Firma Spindler und Hoyer in Göttingen angefertigt.

Höhen zunehmender Geschwindigkeit ostwärts. Gegen Mittag begann ich, den Ballon hochzutreiben; doch gelang das Durchstoßen der Wolkendecke nnr nach großen Ballastopfern, da der Ballon mehr und mehr sich mit Niederschlägen bedeckte. Bei 2900 m Höhe erreichten wir endlich die obere Wolkengrenze und konnten nun den unvergleichlichen Anblick des sonnenbestrahlten wogenden Wolkenmeeres unter uns genießen. Über uns war noch leichte Altocumulus- und Cirrostratus-Bewölkung. Wir hatten uns rechtzeitig den Anblick der Sonne erstritten. Nachmittags schossen aus der Strato-Cumulus-Decke in unserer Nachbarschaft gewaltige Böenwolken auf; die mächtigen Türme mit ihren oben sich ausbreitenden Cirrostratusschirmen boten mir ein hochwillkommenes Schauspiel, hatte ich doch schon lange gewünscht, diese nach meiner Auffassung für den Elektrizitätshaushalt der unteren Atmosphäre so bedeutungsvollen Kondensationsphänomene aus der Nähe beobachten zu können. Doch der Donner rollte warnend von den Böenwolken her; ich durfte es nicht abwarten, bis der Ballon etwa in den aufsteigenden Luftstrom der Böen hineingezogen wurde, weil dadurch wohl ein schnelles Ende der Fahrt herbeigeführt und ihr Hauptzweck vereitelt worden wäre. Ich trieb daher den Ballon stufenweise höher; er war auch in größeren Höhen sehr geneigt zu schnellem Fallen und fand erst in etwa 4200 m Höhe eine Stabilitätsschicht über den Alto-Cumuli, deren untere Grenze sich deutlich durch Wind im Korbe bemerkbar machte. Doch der Tag ging zur Neige; ich mußte schnell den Ballon zur Maximalhöhe emportreiben, denn unter der mächtigen Wolkendecke mußte am Boden schon früh die Dunkelheit hereinbrechen. Auch mußte ich aus dem Aufschießen der Gewitterböen bis zu mehr als 6000 m Höhe auf eine Landung in böigem Winde gefaßt sein und durfte diese nicht bis zur Dämmerung hinausschieben. Um 4^h 46^m kulminierte der Ballon in 6046 m Höhe; obgleich der Ballast bis auf den zur Landung unter den zu erwartenden Verhältnissen unbedingt notwendigen Rest von 4 Sack verbraucht war, konnte der Ballon, offenbar unter der Last der in den Wolken auf ihm abgelagerten und noch nicht völlig verdampften Niederschläge nur diese verhältnismäßig geringe Maximalhöhe erreichen. In größter Eile mußten die zahlreichen Instrumente verpackt werden, da der Ballon ohne Ventilzug nach Verbrauch des letzten verfügbaren Ballasts sehr schnell zu fallen begann. Beim Eintauchen in die Strato-Cumulus-Decke hemmte ich den ungewöhnlich schnellen Fall durch Ausgabe von 2 Sack Ballast um zunächst das Schlepptau ausbringen zu können.

Kaum war dies gelungen, als die Erde sichtbar wurde; schnell wurde der Korb klar zur Landung gemacht. Ich sah, wie die Kronen starker Bäume sich im Winde neigten, ließ den letzten Ballast gehen und warnte meinen Gefährten. Sobald das Ende des Schlepptaus sich auf die Erde legte, versuchte ich, zumal da in der Fahrtrichtung ein Dorf auftauchte, die Reisleine auszuklinken — da wurden wir durch einen gewaltigen Ruck im Korbe niedergeworfen. Gleich darauf schwebte der Ballon pendelnd und sich um die Vertikale drehend weiter. Ich bemerkte, daß nur noch ein kurzes Stück des Schlepptaus vom Ringe herabhing und riß nun den Ballon unverzüglich. Nach äußerst heftigem Aufprall überschlug sich der Korb, beim erneuten Anrucken des Ballons gewahrte ich, daß mein Gefährte nicht mehr im Korbe war. Nur noch wenige Sekunden dauerte die Schleiffahrt, dann hörte ich ein lautes Klatschen und Prasseln — der Ballon war in zwei nebeneinander auf freiem Felde stehenden Bäumen festgeraten. Ich kletterte mit Mühe aus dem Korbe und sah zu meiner Freude meinen Gefährten, Herrn Dr. Wegener, anscheinend unverletzt heranlaufen.

Wie wir feststellen konnten, hatte sich das Schlepptauende kurz nach dem Auflegen auf die Erde an einem starken Baum verankert, der obere, dünne Teil des Schlepptaus hatte dann den Zug des Ballons nicht ausgehalten und war einige Meter unterhalb des Ringes gerissen. So konnte es geschehen, daß der Korb nicht mit der Schleifseite, sondern mit einer Ecke auf den Boden auftraf, wodurch wohl das Ueberschlagen herbeigeführt wurde. Dr. Wegener war wohl schon beim ersten Aufprall des Korbes zwischen den Korbleinen hindurch herausgeschleudert worden, hatte aber noch eine Zeit lang festgehalten, so daß er ein Stück mitgeschleift wurde, wobei er vermutlich zeitweise unter den Korb geraten sein dürfte. Er hatte nur unbedeutende Hautabschürfungen davon getragen und klagte anfangs über Schmerzen im Rücken. Mein linker Arm war infolge einer Zerrung im Schultergelenk einige Tage unbrauchbar — im übrigen hatte ich nur unbedeutende Verletzungen erlitten. Die auf der Rückseite des Korbes außen verpackten Instrumente waren zum Teil unter den Korb geraten; dabei war der große lederne Instrumentenkoffer des Aeronautischen Observatoriums geplatzt und der Apparat für Potentialgefällemessung in Trümmer gegangen. Der Leitfähigkeits-Apparat hatte diese Landung völlig unbeschädigt im Ringe befestigt überstanden.

Die Strecke von dem Baume, an welchem das Schlepptau sich

verankert hatte bis zum Landungsplatz, wurde durch Abschreiten zu etwa 500 m ermittelt; da die Windgeschwindigkeit zur Zeit der Landung etwa 12—15 m/sec betrug, läßt sich schätzen, daß sich die Ereignisse vom Festkommen des Schlepptaus bis zum Zerplatzen der Hülle in den Bäumen in wenig mehr als einer halben Minute abgespielt hatten.

Wir wurden mit unserem Gepäck von dem Schulzen des benachbarten Dorfes in Verwahrung genommen; sofort wurde der Landrat des Kreises benachrichtigt, der unsere Verbringung auf die Festung Novo-Georgiewsk verfügte. Am Vormittag des 31. August konnte die Bergung des Netzes und der in drei große und einige kleinere Stücke zerrissenen Hülle bewerkstelligt werden — eine bei dem noch immer herrschenden Sturme recht mühsame Arbeit. Am Spätnachmittage mußten wir mit dem Amtsvorsteher und einem Gensdarme die Wagenfahrt nach der Festung antreten, die erst nach 7 Stunden ein Ende nahm; wer die Verfassung polnischer Landwege nach anhaltendem Regenwetter kennt, wird sich ein Bild von den Reizen dieser Fahrt machen können. In der Festung erhielten wir gute Unterkunft und wurden in den beiden folgenden Tagen in liebenswürdigster Weise von den russischen Offizieren bewirtet. Am 2. September traf endlich vom Gouverneur aus Warschau das Telegramm ein, durch welches unsere Freilassung verfügt wurde. So passierten wir am Abend Warschau, dessen Straßen einem Feldlager glichen (die Stadt befand sich im „Zustande des verstärkten Schutzes"), um erst am Morgen des 3. September wieder auf deutschen Boden zu gelangen.

Wetterlage. Am Vortage der Fahrt lag eine tiefe Depression über dem größten Teil von Europa, die ein tiefes Minimum über der Nordsee und ein Teilminimum über Oberitalien aufwies. Hochdruckgebiete lagen über Finnland im Nordosten und im Südwesten über Spanien. Am Morgen der Fahrt lag der Kern der Depression über der Ostsee nördlich der Danziger Bucht, das Minimum über der Nordsee hatte sich etwas nach Süden bewegt und verflacht; ein Hochdruckgebiet bestand in Nordosten. Am Nachmittage des 30. August lag das Zentrum der Depression über der Danziger Bucht; der Gradient nahm im Südwesten davon noch zu, am Abend wurde ein Teilminimum über das nordwestliche Rußland hin entsendet.

Die Bewölkung wechselte im Verlauf der Fahrt merklich; zu Beginn des Aufstiegs zogen in 500—900 m Fracto-Cumuli von der für starke Aenderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe ty-

pischen, schräg liegenden, an den Rändern vielfach Wirbel verratenden, zerfetzten Form. Aus dieser Schicht stiegen später massige Cumuli bis zu etwa 1600 m Höhe empor, deren Gestalt gleichfalls auf die erwähnte Aenderung der Windgeschwindigkeit hindeutete. Darüber lag die schon im Fahrtbericht genannte Strato-Cumulus-Decke zwischen 1900—2800 m Höhe. Sie brach gegen Mittag stellenweise für kurze Zeit auf, sodaß anscheinend die Erde sichtbar wurde; ihre obere Grenze zeigte schon auf den ersten Blick vielfach unregelmäßige Gestaltung. Gegen Mittag entwickelten sich aus der Strato-Cumulus-Decke die oben erwähnten Gewitterböen, die eine von derjenigen der Decke abweichende Fortbewegung zu haben schienen. Gegen Abend war die Strato-Cumulus-Schicht mit dem darunter liegenden Gewölk anscheinend zu einer einzigen Nimbusschicht verschmolzen, aus der reichlich böige Niederschläge fielen. Bei rund 4000 m Höhe wurde eine leichte, wenig mächtige Alto-Cumulus-Schicht angetroffen, darüber war schwache Cirrostratus-Bewölkung sichtbar. Die Gewitterböen durchdrangen die Alto-Cumulus-Schicht und schienen den Ballon in seiner Maximalhöhe noch zu überragen. In der Tafel sind die vom Ballon aus beobachteten Wolken mit Ausnahme der Böenwolken, deren Höhe nur geschätzt werden konnte, schematisch angedeutet.

Der vertikale Temperaturgradient war innerhalb der unteren Wolkenschichten nahe der für mit Kondensationsprodukten gemischte Luft geltende Gradient des labilen Gleichgewichts; er betrug im Mittel zwischen dem Boden und der oberen Grenze der Strato-Cumulus-Decke 0,59 °/100 m. Oberhalb der Region der Fracto-Cumuli und der Strato-Cumuli scheint eine schwache Abnahme des Gradienten bestanden zu haben; doch kann von einer Stabilitätsschicht noch nicht die Rede sein. Bis über die Alto-Cumulusschicht hinaus befolgt der Gradient nahezu das Gesetz des labilen Gleichgewichts; erst über der Alto-Cumulus-Schicht bestand eine wenige 100 m mächtige, nahezu isotherme Schicht, die sich, wie schon im Fahrtbericht betont wurde auch durch relative Stabilität des Ballons bemerkbar machte. Darüber herrschte bis zur Maximalhöhe ein Gradient von im Mittel 0,68 °/100 m. Ersichtlich war die Atmosphäre bis zu mittleren Höhen fast vollkommen labil; so konnten starke aufsteigende Luftströme wohl bis in große Höhen vordringen, wodurch das Aufschießen der Böenwolken verständlich wird.

Die relative Feuchtigkeit hielt sich vom Boden bis zur oberen Grenze der Strato-Cumulus-Decke nahe an der Sättigungsgrenze

(vgl. die Tafel), hier tritt eine geringe Abnahme ein; die verhältnismäßig hohe relative Feuchtigkeit von 80—90 % besteht noch bis zu etwa 4500 m Höhe fort. Oberhalb der isothermen Schicht ist eine sprunghafte Abnahme erkennbar, der für einige 100 m Höhe wieder eine kleine Zunahme und dann bis zur Maximalhöhe eine schnelle Abnahme auf nahezu verschwindende relative Feuchtigkeit folgt. Der für das Niederschlagsgebiet nahe dem Zentrum einer Depression charakteristische Verlauf des Wasserdampfgehaltes der Luft tritt auch deutlich in dem Diagramm der spezifischen Feuchtigkeit hervor; mit geringen Schwankungen, die wohl durch Wiederverdampfen von Kondensationsprodukten veranlaßt sind, nimmt die spezifische Feuchtigkeit stetig mit der Höhe ab, um in der Maximalhöhe nahezu auf Null zu sinken.

Die mittlere Windrichtung war fast rein W: über der Strato-Cumulus-Decke war es natürlich ausgeschlossen, sichere Daten über Windrichtung und Windgeschwindigkeit zu erhalten, da die Orientierung während mehr als fünf Stunden unmöglich war. Die Windgeschwindigkeit wuchs, wie auch die Form der Wolken verriet, bis zur unteren Grenze der Strato-Cumulus-Schicht schnell an; es wurden mit wechselnder Höhe 11,9, 14,7, 15,4 16,3 und 17,1 m/sec gemessen. In der Region der Alto-Cumuli wurde eine schnelle Aenderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe — vermutlich eine Zunahme — bemerkt; auch die Windrichtung schien hier eine Aenderung zu zeigen. Da die mittlere Windgeschwindigkeit sich zu 20,7 m/sec berechnet, dürfte die Geschwindigkeit in den höchsten vom Ballon erreichten Schichten etwa 25 m/sec betragen haben. Bei der Landung herrschte eine Geschwindigkeit von 12—15 m/sec, die in den Böen aber zeitweise stark anwuchs.

Die Luftmassen der unteren und mittleren Höhen stammten offenbar vom Meere her, was durch ihren hohen Wasserdampfgehalt und ihre Strömungsrichtung sich deutlich erkennen läßt. Sie waren durchweg in aufsteigender Bewegung begriffen und somit fand lebhafte Kondensation des Wasserdampfes in ihnen statt. Die nach Wasserdampfgehalt, Strömungsgeschwindigkeit und wahrscheinlich auch nach Strömungsrichtung von diesen unterschiedenen höheren Schichten, waren vermutlich von anderer Herkunft.

Luftelektrische Messungen.

Die Resultate der Potentialgefälle- und Leitfähigkeitsmessungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die Bezeichnungen sowie auch die graphische Darstellung in der beigegebenen Tafel

sind in Uebereinstimmung mit denjenigen in meinem Bericht über die Fahrt vom 11. Mai 1905[1]).

Bei der ersten Potentialgefällemessung bemerkte ich, daß von dem einen Kollektor nur große Tropfen abfielen; da offenbar seine Wirksamkeit verringert war, habe ich den so gemessenen Potentialgefällewert als unsicher von der Darstellung in der Tafel und von der Diskussion ausgeschlossen.

(Tabelle siehe Seite 456.)

Diskussion der Resultate.

Obgleich die Fahrt nahe dem Zentrum einer großen Depression stattfand, wurde das Potentialgefälle und damit auch die Dichte des vertikalen Leitungsstromes dauernd positiv gefunden. Die Messungen konnten erst unterhalb der Strato-Cumulus-Decke in 1730 m Höhe beginnen; hier wurden noch 40,1 Volt/m gefunden. Die Messungen in größeren Höhen zeigen eine regelmäßige Abnahme des Gefälles bis zu dem relativ hohen Wert von 7,9 Volt/m in der Maximalhöhe. Bei meinen früheren Fahrten, die im wesentlichen im Bereich eines absteigenden Luftstromes stattfanden, konnte ich in entsprechender Höhe nur erheblich kleinere Werte des Potentialgefälles nachweisen. Stellt man sich auf den Boden der hypothetischen Annahmen über den Elektritätshaushalt der unteren Atmosphäre, die ich an anderer Stelle[2]) dargelegt habe, so ist es einleuchtend, daß gerade in den Gebieten des aufsteigenden Luftstromes, also in dem Bereiche ausgedehnter Kondensation des Wasserdampfes noch in mittleren Höhen ein verhältnismäßig starkes Potentialgefälle bestehen muß, da in diesen Gebieten nach meiner Annahme gerade die Konvektion positiver Ladungen nach oben und diejenige negativer Ladungen durch die Niederschläge nach unten stattfindet. Es ist bemerkenswert, daß sich diese positiven Ladungen in mittleren Höhen mit voller Sicherheit nachweisen ließen. Während über der Strato-Cumulusschicht das Gefälle zwischen 3160 und 4080 m Höhe nur von 31,5 auf 28,5 Volt/m, also um 0,00326 Volt/m^2 abnimmt — entsprechend einer positiven räumlichen Ladungsdichte von $1{,}09 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einheiten, nimmt es zwischen 4080 und 4810 m Höhe von 28,5 auf 11,4 Volt/m ab, also um 0,0234 Volt/m^2 — entsprechend einer positiven räumlichen Ladungsdichte von $7{,}85 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einheiten.

1) H. Gerdien, Nachr. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse. 1905, 258—270.

2) H. Gerdien, Phys. Z.-S. 6, 647—666, 1905.

Zeit bezw. Beginn der Messung	Dauer der Messung in Sekunden	Höhe über dem Meere in Metern	$\lambda_p \cdot 10^4$	$\lambda_n \cdot 10^4$	$\lambda \cdot 10^4$	Potentialgefälle		Dichte des vertikalen Leitungsstromes in elektrost. Maße 10^7	Bemerkungen
						Volt/m	in elektrost. Einheit. 10^4		
12h 15m p.	300	1650—1715	1,74		3,54				
12h 22m 30s p.	300	1740—1790—1750		1,80					
12h 28m 30s p.		1740				(+ 31,6 ?)	(+ 10,5 ?)		Der eine Kollektor versagt; er wird gereinigt.
12h 37m 30s p.		1730				+ 40,1	+ 13,4	4,74	
1h 45m p.	180	3160—3250	1,90		5,34				Über den unteren Wolken. In der Nachbarschaft erheben sich Böenwolken über das Wolkenmeer. Wiederholt Donner.
1h 50m p.	180	3260—3190		3,44					
1h 54m p.		3160				+ 31,5	+ 10,5	5,61	
2h 49m p.	120	4100	6,01		9,36				
2h 53m p.	120	4090		3,35					
2h 57m p.		4080				+ 28,5	+ 9,5		
3h 17m 30s p.	120	4300—4310	3,44		8,69				Über den Alto-Cumuli.
3h 21m 30s p.	120	4330—4350		5,25					
3h 25m p.		4355				+ 22,2	+ 7,4	6,43	
3h 59m p.	120	4600	4,87		11,59				
4h 03m p.	120	4750—4800		6,72					
4h 06m p.		4810				+ 11,4	+ 3,8	4,40	
4h 42m 30s p.	90	6000—6020	11,4		20,6				
4h 46m p.	90	6045—6035		9,21					
4h 48m p.		6030				+ 7,9	+ 2,6	5,36	

Diese Messung wird gestützt durch den in 4355 m Höhe vorgefundenen Gefällewert von 22,2 Volt/m. In der Schicht zwischen 4810 m und 6030 m fand nur eine weit schwächere Abnahme des Gefälles (von 11,4 auf 7,9 Volt/m) statt, entsprechend einer positiven Ladungsdichte von $0,96 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einheiten. Es lag also zwischen 4080 m und 4810 m Höhe eine Schicht, welche die 7,2fache Ladungsdichte hatte, als die darunter liegende und die 7,5fache Ladungsdichte als die darüberliegende. Diese Schicht ist identisch mit der aus dem Temperaturverlauf und den horizontalen Strömungsverhältnissen erkennbaren und während der Fahrt an der Stabilität der Höhenlage des Ballons aufgefundenen Stabilitätsschicht. Nach der Schätzung der Höhe, bis zu welcher die Köpfe der Gewitterböen hinaufreichten, lag die Schicht schon einige 1000 m niedriger als diese Gebilde, es ist also wohl denkbar, daß die in der Schicht vorgefundenen starken positiven Ladungsdichten aus diesen gewaltigen Kondensationsprozessen herstammten. Das Absinken der positiven Ladungen muß in großen Höhen in der Nachbarschaft des Kondensationsvorganges verhältnismäßig schnell vor sich gehen; erst eine Adsorbtionsschicht wird das Abströmen der Ladungen nach unten merklich aufhalten können — auf diese beiden Punkte habe ich schon in meiner oben zitierten Arbeit hingewiesen.

Die Anteile der positiven und der negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit sind unterhalb der Strato-Cumulus-Decke etwa doppelt so groß als im Mittel am Erdboden. Ueber dieser Decke nehmen beide Anteile zunächst langsam, dann schneller zu; der Verlauf beider in der Nachbarschaft der Altocumulusschicht und der darüber liegenden Stabilitätsschicht entspricht dem bei der vorliegenden Schichtung nach früheren Erfahrungen zu erwartenden. Bemerkenswert ist die ganz ungewöhnlich hohe Leitfähigkeit, die in der trockenen, klaren Luft bei 6000 m Höhe vorgefunden wurde.

Dem Verhalten des Potentialgefälles und der Leitfähigkeit entspricht der in mehrfacher Hinsicht interessante Verlauf der Dichte des vertikalen Leitungsstromes mit der Höhe. Zunächst bestätigt sich die bei der Fahrt vom 11. V. 1905 vorgefundene, relativ hohe Konstanz des Vertikalstromes im Vergleich zu den starken Aenderungen des Gefälles und der Leitfähigkeit mit der Höhe. Während das Gefälle von oben bis unten in Verhältnis 1 : 5, die Leitfähigkeit nahezu im Verhältnis 6 : 1 varriert, ändert sich die Dichte des vertikalen Leitungsstromes nur im Verhältnis 1 : 2, und zwar stimmen die Werte in großen und mittleren Höhen

fast vollständig überein, eine Störung in dem Verlaufe des Vertikalstroms ist lediglich innerhalb und unterhalb der schon mehrfach genannten Stabilitätsschicht vorhanden, die, wie oben gezeigt wurde, starke positive Ladung enthält. Offenbar ist das Einströmen dieser positiven Ladungen in horizontalem Konvektionsstrome erst vor verhältnismäßig kurzer Zeit eingetreten, sodaß sich unterhalb der positiv geladenen Schicht noch nicht der stationäre Strömungszustand einstellen konnte.

Bemerkenswert ist die am 30. August vorgefundene absolute Größe des vertikalen Leitungsstromes — das Maximum vom 30. August erreicht fast den 3,5fachen Betrag des Maximums vom 11. Mai 1905. Besonders auffällig ist aber die Größe des vertikalen Leitungsstromes in der Maximalhöhe; hier wurden noch $5{,}36 \cdot 10^{-7}$ elektrostate Einheiten gefunden, d. h. mehr als 4 mal so viel als am 11. Mai in 5760 m Höhe. Ob der stärkere Vertikalstrom und das stärkere Potentialgefälle in großen und mittleren Höhen ein Merkmal der cyklonalen Wetterlage ist, das sie von der anticyklonalen typisch unterscheidet — wie ich aus meinen hypothetischen Annahmen folgern muß — das kann erst ein weit ausgedehnteres Beobachtungsmaterial entscheiden lassen. Die vorliegenden luftelektrischen Messungen sind die ersten quantitativen Daten aus dem Gebiete einer großen Depression, so wie die am 11. Mai gewonnenen die ersten quantitativen Daten aus dem Bereich eines Hochdruckrückens waren.

Am Schlusse meines Berichts möchte ich es nicht unterlassen, meinem Gefährten, Herrn Dr. A. Wegener, für seine opferwillige Unterstützung meinen herzlichen Dank zu sagen.

Die Kosten ber Untersuchung wurden aus dem von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaft für luftelektrische Arbeiten zur Verfügung gestellten Fonds bestritten.

Göttingen, Geophysikalisches Institut. November 1905.

Der Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen und die Spektra der positiven Atomionen.

Von

J. Stark.

Mit einer Figur.

Vorgelegt von Herrn Riecke am 25. November 1905.

§ 1. **Einleitung.** — Auf Grund gewisser Ueberlegungen und Beobachtungen kann man sich die Ansicht bilden, daß die positiven Atomionen eines chemischen Elementes dessen Linienspektra emittieren. Nach W. Wiens Untersuchungen sind die Teilchen der Kanalstrahlen positiv geladene chemische Atome oder Atomgruppen, die eine große Geschwindigkeit besitzen. Es ist darum zu erwarten, daß das Licht, welches Kanalstrahlen in einem Gas zur Emission bringen, zum Teil ein Linienspektrum besitzt.

Wenn ein Kanalstrahlteilchen als positives Atomion Spektrallinien emittiert, während es eine beträchtliche Geschwindigkeit besitzt, so muß an seinen sämtlichen Linien der Doppler-Effekt zu beobachten sein. Es bezeichnen λ_n die Wellenlänge einer Linie, wenn sie normal zur Richtung der Kanalstrahlen beobachtet wird, λ_p sei die Wellenlänge derselben Linie, wenn sie parallel den Kanalstrahlen beobachtet wird, und zwar in der Weise, daß die Kanalstrahlen auf den Beobachter zulaufen; v sei die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen, c diejenige des Lichtes. Gemäß dem Doppler'schen Prinzip gilt dann

$$1) \qquad \lambda_n - \lambda_p = \lambda_n \frac{v}{c} \cdot$$

Infolge der Bewegung der Kanalstrahlen erscheint demnach jede „bewegte“ Linie (λ_p) des betreffenden Atomions gegen die „ruhende“

Linie (λ_n) nach Ultraviolett zu verschoben; die Größe $\frac{\lambda_n - \lambda_p}{\lambda_n}$ hat für alle Linien desselben positiven Atomions den gleichen Wert.

Die Kanalstrahlteilchen haben im Gas hinter der Kathode im allgemeinen nicht alle die gleiche Geschwindigkeit. Die maximale Geschwindigkeit, die sie haben können, berechnet sich aus der Spannungsdifferenz ΔV, welche sie vor der Kathode im elektrischen Felde frei durchlaufen haben. Es sei ε die elektrische Ladung, μ die Masse des Kanalstrahlteilchens. Wenn dann die ganze elektrische Arbeit in kinetische Energie des Teilchens transformiert wird, so gilt

2)
$$\varepsilon \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \mu \cdot v_0^2 \text{ oder}$$
$$v = \sqrt{2 \frac{\varepsilon}{\mu} \Delta V}$$

Indem die Kanalstrahlen vor der Kathode nicht den ganzen Kathodenfall frei durchlaufen oder hinter der Kathode Zusammenstöße erfahren, kommen hier außer der maximalen Geschwindigkeit v noch beliebig kleinere Geschwindigkeiten vor. Demgemäß muß die bewegte Linie λ_p nach Rot stark verbreitert erscheinen, oder genauer sie setzt sich entsprechend der Geschwindigkeitsvariation aus einer Anzahl verschobener Linien zusammen:

$$\lambda_n - \lambda_{p1} = \lambda_n \frac{v_1}{c}, \; \lambda_n - \lambda_{p2} = \lambda_n \frac{v_2}{c} \text{ u. s. w.}$$

Mit λ_{p0} sei die nach Ultraviolett liegende Kante der bewegten Linie bezeichnet. Berechnet man für sie nach Gleichung 1) die zugehörige Geschwindigkeit v_0, so muß deren Wert nahezu gleich sein der Geschwindigkeit v_0, welche sich aus der Gleichung 2) berechnet.

Wie sich wahrscheinlich machen läßt, kommt bei der Wiedervereinigung von positiven Atomionen mit negativen Elektronen zu neutralen Atomen ein Bandenspektrum zur Emission. Da die Kanalstrahlen das von ihnen durchlaufene Gas ionisieren, muß in diesem neben der Ionisierung auch Wiedervereinigung statt haben, also ein Bandenspektrum zur Emission kommen. Da der Träger des Bandenspektrums, das System positives Restatom — negatives Elektron, nicht die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen besitzt, so müssen die von ihm emittierten Spektrallinien die gleiche Lage

und Breite haben, mögen sie normal oder parallel zu den Kanalstrahlen beobachtet werden.

Die vorstehenden theoretischen Folgerungen lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen. Das Licht, welches Kanalstrahlen auf ihrem Wege durch ein Gas zur Emission bringen, zeigt neben einem Linienspektrum ein Bandenspektrum; diese Folgerung ist von mir und Herrn Hermann experimentell an Stickstoff und Wasserstoff bestätigt worden. Das von den Kanalstrahlen emittierte Linienspektrum zeigt den Doppler-Effekt, das von ihnen erregte Bandenspektrum zeigt den Doppler-Effekt nicht. Ueber die experimentelle Bestätigung dieser zweiten Folgerung bei einigen Elementen, besonders bei Wasserstoff berichtet die vorliegende Mitteilung.

§ 2. **Methode und Resultate bei Wasserstoff.** — Die Kanalstrahlen wurden erzeugt in 4—5 cm weiten zylindrischen Glasröhren. Als Kathoden dienten Aluminiumscheiben, diese waren mit sehr vielen 1 mm weiten Löchern versehen; um sie in den Röhren zu fixieren, waren sie auf zylindrische Ringe aus Aluminiumblech aufgenietet.

Zur Evakuation der Röhren diente eine Oelluftpumpe, hauptsächlich, um störende Quecksilberdämpfe zu vermeiden. Die Röhren wurden erst oftmals evakuiert und dazwischen wieder mit frischem trockenem Wasserstoff gefüllt; gleichzeitig wurde ein starker elektrischer Strom durch sie gesandt, um aus ihnen Wasser und Kohlenwasserstoffe nach Möglichkeit zu entfernen.

Als Stromquelle diente eine Hochspannungsbatterie von 3000 Volt elektromotorischer Kraft. Vor die Röhre war ein Amylalkohol-Jodkadmium-Widerstand geschaltet. Zur Messung des Kathodenfalles (Elektrodenspannung) diente ein Braunsches Elektrometer. Durch Abpumpen oder Zulassen von Gas wurde der Kathodenfall auf ungefähr 2000 Volt gehalten. Die Stromstärke betrug im Mittel 0,007 Ampère.

Zur Analyse des Lichtes der Kanalstrahlen diente der Prismenspektrograph, den ich bereits in einer früheren Mitteilung[1]) näher beschrieben habe. Er wurde so eingestellt, daß die Linien im Violett am schärfsten wurden. Die Expositionszeiten betrugen 3—5 Stunden.

Erstens wurden Aufnahmen gemacht, indem das Kollimatorrohr senkrecht zu den Kanalstrahlen gestellt wurde; der Spalt

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 16, 493, 1905.

war hierbei auf das Licht unmittelbar hinter der Kathode gerichtet; alles übrige Licht war durch schwarzes Papier abgeblendet. Zweitens wurden Aufnahmen gemacht, indem das Kollimatorrohr in die Richtung der Kanalstrahlen gebracht wurde, so daß diese direkt auf den Spalt zuliefen. Bei dieser zweiten Stellung ist unvermeidlich, daß durch die Löcher in der Kathode Licht aus der negativen Glimmschicht auf den Spalt fällt.

Die Figur 1 gibt die erste photographische Aufnahme des Doppler-Effektes bei den Kanalstrahlen in Wasserstoff wieder. Aus ihr lassen sich bereits bei genauer Betrachtung nachstehende Sätze ablesen. Sichergestellt wurden diese Sätze natürlich dadurch, daß eine „normale“ und eine „parallele“ Aufnahme mit den Schichtseiten auf einander gelegt und so verglichen wurden.

Die Linien des ersten Spektrums oder des Serienspektrums von Wasserstoff ($H\beta, H\gamma, ..$) zeigen in den Kanalstrahlen den Doppler-Effekt. Parallel den Strahlen beobachtet, bietet sich jede einzelne Linie als ein Duplet dar, bestehend aus der „ruhenden“ und aus der „bewegten“ Linie. Die ruhende Linie ist scharf, die bewegte unscharf. Die bewegte Linie ist in der ganzen Serie nach Ultraviolett verschoben. Mißt man für verschiedene Linien die maximale Verschiebung und berechnet $\frac{\lambda_n - \lambda_{p0}}{\lambda_n}$, so erweist sich diese Größe für alle Linien dieser Serie als konstant. Berechnet man aus Gleichung 1) die maximale Geschwindigkeit v_0, so findet man $v_0 = 5 \cdot 10^7$ cm . sec^{-1}; die berechnet man aus Gleichung 2) für $\Delta V = 2000$ Volt, $\frac{\varepsilon}{\mu} = 9{,}5 \cdot 10^8$ magn. Einh. v_0, so ergibt sich $6 \cdot 10^7$ cm . sec^{-1}.

Die Verschiebung der bewegten Linie nach Ultraviolett ist um so größer, je größer die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen, je größer also der Kathodenfall ist. Dies ergaben weitere Aufnahmen des Effektes bei 1000, 1500 und 3000 Volt Kathodenfall. Die maximale Verschiebung ist gemäß diesen Aufnahmen angenähert proportional der Quadratwurzel aus dem Kathodenfall. Eine besonders große Verschiebung wurde bei Anwendung eines großen Induktoriums bei niedrigem Gasdruck erzielt; freilich erweist sich hierbei die verschobene Linie als stark verbreitert entsprechend der variablen Spannung des Induktoriums.

Die Linie 4687,9, welche als eine Linie der Hauptserie des Wasserstoffes erklärt wird, konnte in den Spektrogrammen bis jetzt nicht aufgefunden werden. Auch konnte die zweite Nebenserie bis jetzt nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden.

Die Linien des zweiten Wasserstoffspektrums (Bandenspektrum), die sich neben den Serienlinien in großer Zahl — auch Stickstoffbanden sind angedeutet — finden, zeigen den Doppler-Effekt in keinem der zahlreichen Spektrogramme.

§ 3. **Vorläufige Beobachtungen über den Doppler-Effekt bei anderen Elementen.** — Das Linienspektrum des Stickstoffs ist bei den Kanalstrahlen nur in geringer Intensität zu erhalten. Mit Sicherheit konnte von Herrn W. Hermann bis jetzt die Linie $\lambda = 3995{,}3$ identifiziert werden. Diese zeigt nun auch den Doppler-Effekt; sie wird um so mehr nach Ultraviolett verschoben, je größer die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen ist. Die Linien des Bandenspektrums des Stickstoffs zeigen auch bei großen Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen unveränderte Lage. Der Doppler-Effekt wurde von mir und Herrn W. Hermann auch bei den Linien des Quecksilbers aufgesucht. Bei diesem Element ist er wegen des großen Atomgewichtes nur sehr gering. Die Dispersion des zur Verfügung stehenden Spektrographen gestattete bei Anwendung der hohen Spannung eines großen Induktoriums eben noch die Beobachtung einer geringen Verschiebung einiger intensiver Linien (5461,0 – 4358,6 – 4046,8 – 3650,3) im Sinne des Doppler-Effektes. Alle diese Quecksilberlinien sind Serienlinien. Ueber die Resultate dieser Untersuchungen wird an anderer Stelle ausführlich berichtet werden.

Die Untersuchung des Doppler-Effektes bei den Alkalien, speziell bei Natrium und Kalium, habe ich zusammen mit Herrn K. Siegl in Angriff genommen. Es sind dabei sehr große Schwierigkeiten zu überwinden; die mit Natrium- oder Kaliumdampf gefüllten Natronglas-Röhren sind nämlich nur kurze Zeit haltbar. Wir konnten darum bis jetzt nur kurze Expositionszeiten erzielen und auch nur einen niedrigen Kathodenfall anwenden. Es ließ sich bis jetzt folgendes feststellen. Die Kanalstrahlen in Natrium- und Kaliumdampf bringen die Haupt- und die erste und zweite Nebenserie zur Emission. Die erste Nebenserie des Natriums zeigt den Doppler-Effekt, ebenso wurde an der zweiten intensiven Linie ($\lambda = 4044{,}29$) des violetten Duplets der Hauptserie des Kaliums eine Verschiebung im Sinne des Doppler-Effekts konstatiert. Die Verschiebung der ersten Nebenserie des Natriums ist angenähert so groß, wie sie sich für ein einwertiges Natriumion aus dem Kathodenfall berechnet. Ebenso ist die Linie $\lambda = 4044{,}29$ der Hauptserie des Kaliums um so viel verschoben, wie bei Einwertigkeit des Kaliumions erwartet werden darf. An den übrigen

Serien des Natriums und Kaliums konnte der Effekt noch nicht untersucht werden, da sie in den Spektrogrammen nur angedeutet waren. Ueber die Methoden und erweiterten Resultate dieser Untersuchung wird später ausführlich berichtet werden.

§ 4. **Folgerungen.** — An die vorstehenden Resultate lassen sich mehrere Folgerungen knüpfen.

Die Linien des zweiten Wasserstoffspektrums und die Linien des Bandenspektrums von Stickstoff besitzen als Träger nicht positive Atomionen.

Alle Linien der Wasserstoffserie ($H_\alpha, H_\beta, ..$) besitzen den gleichen Träger, nämlich das einwertige positive Wasserstoffion.

Die Hauptserie und die erste Nebenserie der Alkalien besitzen als Träger das einwertige positive Atomion.

Die Serien des Quecksilbers besitzen als Träger positive Atomionen.

Nach Analogie ist zu schließen, daß die Serienspektra aller chemischen Elemente positive Atomionen als Träger haben. Welche Valenzzahl des Ions indes der einzelnen Serie zuzuordnen ist, hat die spezielle Untersuchung zu ergeben.

Es ist möglich, daß die positiven Ionen außer den Serien noch andere Linien emittieren. Diese müssen dann auch in den Kanalstrahlen den Doppler-Effekt zeigen. Wie weiter unten dargelegt ist, darf man diesen Effekt bei allen Linien erwarten, welche Linien durch eine Druckänderung verschoben werden; alle diese haben demnach positive Atomionen als Träger.

Die Serienlinien zeigen den Zeeman-Effekt; aus dessen Vorzeichen ist zu folgern, daß die Emissionszentren der Serienlinien negative Elektronen sind. Wir müssen darum annehmen, daß in den positiven Atomionen neben der positiven Ladung noch negative Elektronen vorhanden sind. Diese führen in dem elektrischen Felde der positiven Ladung Schwingungen aus unter Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen.

Die Beobachtung des Doppler-Effektes bei den Kanalstrahlen eröffnet uns die Möglichkeit festzustellen, welche Spektra den positiven Atomionen eines Elementes zuzuschreiben sind. Ferner kann aus der Größe des Dopplers-Effektes bei den Kanalstrahlen deren spez. Ladung $\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)$ wenigstens angenähert bestimmt werden. Durch Kombination von Gleichung 1) und 2) erhält man nämlich

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{1}{2 \cdot \Delta V} \cdot \frac{c^2 (\lambda_n - \lambda_{p0})^2}{\lambda_n^2}. \tag{3}$$

Die Größen ΔV, λ_n und λ_{p0} sind der Messung zugänglich. Hat man ein Gemisch von verschiedenartigen Kanalstrahlen, welche alle die gleiche Spannungsdifferenz frei durchlaufen haben, so gilt

$$4)\qquad \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}\Big/\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} = \left[\frac{\lambda_{n1}-\lambda_{p01}}{\lambda_{n1}}\Big/\frac{\lambda_{n2}-\lambda_{p02}}{\lambda_{n2}}\right]^2.$$

Ist $\mu_1 = \mu_2$, hat man also verschiedenartige Ionen desselben Elementes, so muß das Verhältnis $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ aus der Gleichung 4) als eine ganze Zahl oder deren reziproker Wert $(2, 3, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\cdots)$ sich ergeben.

Aus der Tatsache, daß Serienspektra der chemischen Elemente positive Atomionen als Träger haben, erklärt sich ungezwungen die bekannte Tatsache[1], daß Serienlinien durch Druckänderungen verschoben werden. Die Emissionszentren der Serienlinien führen ja ihre Schwingungen in dem elektrischen Feld der positiven Ladung aus. An ihnen muß sich darum der sogenannte „elektrische Zeeman-Effekt“ [2]) zeigen, d. h. durch die Stärke des elektrischen Feldes wird die Schwingungszahl der Elektronen beeinflußt. Veränderung der Stärke dieses Feldes hat eine Aenderung der Schwingungszahl zur Folge. Da nun die Wirkungssphäre des elektrischen Feldes am positiven Ion viel größer ist als die Dimensionen des Atoms, so befindet sich in ihr eine große Anzahl von Molekülen; die Stärke des Ionenfeldes wird durch deren Anwesenheit beeinflußt. Da die atomischen Dimensionen klein sind verglichen mit denjenigen des Ionenfeldes, so kann jener Einfluß durch eine Kontinuumskonstante des Mediums, durch deren Dielektrizitätskonstante, dargestellt werden. Es bezeichnen λ_1 die von einem Elektron emittierte Serienlinie für den Druck p_1, die Masse des Elektrons sei μ, die Kraft für λ_1 sei K_1. Wir können nach dem obigen K_1 darstellen als Produkt zweier Funktionen $\varkappa_1$ und k, von denen $\varkappa_1$ abhängt von der Dielektrizitätskonstante des Mediums, k von der Bindung des Elektrons im Atom. Es ist also

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{\frac{\mu}{K_1}} = 2\pi c\sqrt{\frac{\mu}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}},$$

$$\lambda_2 = 2\pi c\sqrt{\frac{\mu}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varkappa_2}},$$

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. II. S. 322.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4, 197. 1901.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu}{k}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\varkappa_2}} - \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}}\right],$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2}}{\sqrt{\varkappa_2}}.$$

Nun können wir in kleinen Variationsbereichen die Beziehung zwischen $\varkappa$ und p durch die Interpolationsformel $\varkappa = \frac{a}{(b+p)^2}$ darstellen, wo a und b Konstanten sind. Dann erhalten wir

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1 \cdot \frac{p_2 - p_1}{b + p}.$$

Die Vermutung, daß die Aenderung der Wellenlänge durch Druck auf den Einfluß der Dielektrizitätskonstante des Mediums zurückzuführen sei, wurde zuerst von Fitzgerald[1]) ausgesprochen. Verständlich wird dieser Einfluß erst durch die Erkenntnis, daß der Träger der verschobenen Serienlinie ein positiv geladenes Atomion ist. Umgekehrt kann man nun schließen, daß alle Linien eines chemischen Elementes, welche durch Druck verschoben werden können, positive Atomionen als Träger haben. Bandenspektra, welche keine Ionen als Träger haben, dürfen nach dem Vorstehenden durch Druck nicht verschoben werden. Dies ist nach Kayser[2]) in der Tat der Fall.

§ 5. **Historisches.** — Verschiedene Autoren haben die Ansicht ausgesprochen, daß das Auftreten verschiedenartiger Spektra bei demselben Element auf eine Dissoziation der chemischen Atome zurückzuführen sei; insbesondere hat Lockyer diese Dissoziationshypothese auf eine große Anzahl spektralanalytischer Erscheinungen angewandt. Kayser[3]) hat mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß die Ionenhypothese für die elektrische Leitung in Gasen der Folgerung sich nicht entziehen könne, daß den positiven und negativen Ionen sowie den neutralen Atomen besondere Spektra zuzuweisen seien. Im Jahre 1902 habe ich in meinem Buche über „die Elektrizität in Gasen“ (Leipzig) über den Träger der Linienspektra S. 447 folgende spezielle Hypothese aufgestellt. „Das Linienspektrum ist dem positiven Atomion als Träger zuzueignen.“ Hierzu fügte ich später (1904) eine Hypothese[4]) über den Ursprung

1) G. F. Fitzgerald, Astrophys. Journ. 5, 210, 1897.
2) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. II S. 327.
3) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie. I. S. 202.
4) J. Stark, Ann. d. Phys. 14, 525, 1904.

des Bandenspektrums eines Elementes. „Wir wollen nun annehmen, daß das Bandenspektrum als Träger das System positives Restatom — negatives Elektron hat, das in der Umbildung zu einem neutralen Atom begriffen ist.“ Auf Grund dieser zwei Arbeitshypothesen ließ sich die Erscheinung finden, daß leuchtendem Quecksilberdampf durch ein elektrisches Feld wohl die Träger des Linienspektrums, nicht aber diejenigen des Bandenspektrums entzogen werden. Die zwei Arbeitshypothesen ergänzte ich später (Januar 1905) durch folgenden Zusatz [1]. „Aus der Hypothese, daß die Linienspektra den positiven Atomionen eigen sind, folgt zwanglos die spezielle Annahme, daß ein chemisches Element, welches mehrere Valenzstufen besitzt, entsprechend viele Linienspektra haben kann, die strukturell von einander verschieden sind.“ — „Kommt das Bandenspektrum bei Wiederanlagerung eines negativen Elektrons an ein positives Ion zustande, und sind bei den Ionen eines Elementes mehrere Wertigkeits- oder Dissoziationsstufen vorhanden, so werden dem Elemente auch mehrere Bandenspektra verschiedener Struktur eigen sein.“ In der Tat ergab sich, daß Quecksilberdampf in der negativen Glimmschicht neben dem gewöhnlichen Linienspektrum noch ein zweites Linienspektrum emittiert.

Lenard [2]) hat im Jahre 1903 gezeigt, daß die einzelnen konzentrischen Schichten des Lichtbogens von dem Lichte der einzelnen Serien der Alkalien verschieden stark erleuchtet erscheinen; der äußere relativ niedrig temperierte Lichtbogenmantel erscheint ausschließlich im Lichte der Hauptserie, die nach innen folgenden Schichten erscheinen der Reihe nach im Lichte der einzelnen Nebenserien. Er deutete die beobachteten Erscheinungen dahin, „daß jedes Metallatom im Bogen, während es die verschiedenen Flammenschichten passiert, eine Reihe verschiedener Zustände annehme, deren mindestens so viele sind, als sein Spektrum Serien enthält.“ — „Auch unter den extremen Verhältnissen des elektrischen Bogens oder Funkens sind bisher nur Erscheinungen beobachtet, welche auf das Vorhandensein ungeteilter Atome hinweisen. Sämtliche Spektralserien der Alkalimetalle beispielweise bestehen aus Linienpaaren, und die Schwingungsdifferenz aller Paare ist Funktion des Atomgewichtes. Wenn danach bei der Emission aller Serien eines und desselben Metalles die ganze Masse eines Atoms eine Rolle spielt, so ist es das Nächstliegende, diese

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 16. 512, 1905.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 11, 636, 1903.

ganze Masse in den Emissionszentren auch als vorhanden anzunehmen." Später (April 1905) spricht Lenard[1]) folgende Ansicht über die Träger der Linienspektra aus. „Die Emissionszentren der Hauptserie sind elektrisch neutrale Metallatome." — „Die Emissionszentren der Nebenserien sind positiv geladene Metallatome, das sind solche, welche negative Elementarquanta verloren haben. — Dies schlossen wir aus der Tatsache ihrer elektrischen Wanderung. Es ist aber dann naheliegend anzunehmen, daß die verschiedenen Nebenserien desselben Metalles von Atomen emittiert werden, welche eine verschiedene Zahl von Elementarquanten verloren haben, im besonderen, daß die Emissionszentren der I., II., III.,... Nebenserie Atome sind, welche 1, 2, 3,... negative Elementarquanten verloren." Ob diese Spezialisierung der allgemeinen Hypothese den wirklichen Verhältnissen entspricht, läßt sich aus den zwei Erscheinungen, mit welchen Lenard jene speziellen Hypothesen zu begründen sucht, nicht mit Sicherheit ableiten. Bei der Deutung der scheinbar konzentrisch geschichteten Emission der verschiedenen Serien im Lichtbogen ist der Umstand zu berücksichtigen, daß von der zentralen Axe des Lichtbogens nach außen ein sehr starker Abfall der Temperatur statt hat. Infolgedessen wird das von den inneren Schichten emittierte Licht von den äußeren absorbiert; bei genäherter Anwendung des Kirchhoff'schen Gesetzes ist zu folgern, daß eine innere Schicht um so ärmer an Licht von der Wellenlänge λ_1 dem Beobachter erscheint, je mehr es von einer äußeren kälteren Schicht emittiert wird; denn um so größer ist in dieser dann auch die Absorption des von innen kommenden Lichtes. Darum erscheint das Innere der äußeren Schicht arm an der Emission der Wellenlänge λ_1. In Wirklichkeit emittiert aber die innere Schicht entsprechend ihrer höheren Temperatur die Wellenlänge λ_1 nach der äußeren Schicht stärker als diese selbst. Kommen darum die Wellenlängen $\lambda_1, \lambda_2, ..$ erst bei verschieden hohen Temperaturen $T_1, T_2 ...$ zu gleich starker Emission, so erscheinen dem Beobachter die einzelnen nach innen folgenden Schichten des Lichtbogens überwiegend in dem Lichte der Wellenlänge $\lambda_1, \lambda_2 ..$ Die verschiedenen Serien können einen und denselben Träger haben; wenn nur die Emission der Serien bei der gleichen Temperatur verschieden intensiv ist, wird sich die von Lenard beobachtete schichtenartige Emission am Lichtbogen zeigen. Bei Flammen ist der Temperaturabfall von innen nach außen nicht so groß; darum können hier die Emissionen der verschiedenen

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17, 227, 229, 1905.

Serien räumlich auch nicht so scharf scheinbar auseinander treten, was Lenard[1]) in der Tat findet.

Weiter führt Lenard zur Begründung seiner speziellen Hypothese die Erscheinung der elektrischen Wanderung leuchtender Metalldämpfe an. Er erinnert zunächst an eine frühere Beobachtung[2]) von ihm, daß ein leuchtender Salzdampfstreifen in einer Flamme nach der negativen Seite hin abgelenkt wird, wenn die Flamme zwischen zwei Platten von mindestens 2000 Volt Spannungsdifferenz gestellt wird. Lenard deutete diese Erscheinung als eine elektrische Wanderung des Salzdampfes und glaubte als spez. Geschwindigkeit der positiven Träger in den leuchtenden Flammen den Wert 0,08 cm/sec./Volt/cm aus seinen Beobachtungen ableiten zu dürfen. So wenig nun eine elektrische Wanderung positiver Metallionen in Gasen zu bestreiten ist, so scheint doch die von Lenard beobachtete Erscheinung nur indirekt von der elektrischen Wanderung der Ionen veranlaßt zu sein. Auf der negativen Seite einer elektrischen Strömung in einer Flamme bildet sich nämlich eine positive Ladung infolge des Wegwanderns der sehr schnellen negativen Elektroionen. Diese vom elektrischen Feld nach der Kathode getriebene positive Ladung übt auf das ganze Flammengas einen Zug aus und führt so als elektrischer Wind einen Teil der Flamme nach der negativen Seite. Diese Ablenkung der ganzen Flamme ist leicht zu beobachten; Lenard selbst konstatiert, daß unter Umständen ein Teil der Flamme den abgelenkten leuchtenden Dampfstreifen begleitet; er berücksichtigt indes bei der Deutung der Erscheinung nicht die Relativbewegung von Ionen und neutralem Gas. Unter diesem Gesichtspunkt erklärt sich, warum Lenard als scheinbare spez. Geschwindigkeit der positiven Flammenionen 0,08 findet, während H. A. Wilson nach einer anderen Methode ungefähr 60 gefunden hat. Ferner versteht man eher, warum Verminderung[3]) der Leitfähigkeit durch Einführung von Chlor in die Flamme nicht eine Verminderung der Ablenkung des Salzdampfstreifens zur Folge hat. Später hat Lenard einen von Riecke[4]) und mir am Glimmstrom in freier Luft angestellten Versuch am Lichtbogen wiederholt. In dem Versuch mit dem Glimmstrom dürfte die elektrische Wanderung von Metallionen in einem Gas einwandfrei nachgewiesen sein; in ihm erfolgt nämlich die elektrische Wanderung entgegen der me-

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. 219, 1905.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 9, 642, 1902.

3) F. L. Tufts, Physik. Zeitschr. 5, 157, 1904.

4) E. Riecke und J. Stark, Physik. Zeitschr. 5, 537, 1904.

chanischen Gasströmung. Nicht die gleiche Beweiskraft besitzt der Versuch im Falle des Lichtbogens; hier kann die Ungleichheit der Verdampfung der Elektroden ähnliche Erscheinungen wie die Elektrolyse bewirken, indem von der Anode infolge ihrer höheren Temperatur Dampf nach der Kathode strömt oder destilliert. Unter diesem Gesichtspunkt beurteilt Kayser[1]) frühere im Sinne einer Elektrolyse gedeutete Beobachtungen am Lichtbogen. Uebrigens läßt sich aus dem fraglichen Versuch kein sicherer Schluß auf die Träger der Linienspektra im leuchtenden Metalldampf ziehen. Man kann in jenem Versuch nur eine Stütze für die Hypothese über den Träger der Linienspektra sehen, nicht einen Beweis. Indem nämlich positive Metallionen nach der Kathode wandern, treffen sie mit negativen Elektronionen zusammen und verwandeln sich durch Wiedervereinigung mit diesen zum Teil in neutrale Atome. Neben den positiven Metallionen sind darum notgedrungen immer auch neutrale Metallatome vorhanden, und so bleibt unentschieden, ob die Serienspektren, welche von dem Gebiet der elektrischen Wanderung emittiert werden, den neutralen Atomen oder den Ionen zuzueignen sind. Man kann es lediglich für wahrscheinlich halten, daß die Zahl der neutralen Metallatome klein ist, verglichen mit der Zahl der Ionen, und daraus folgern, daß die emittierten Serien den Ionen eigentümlich sind. Lenard glaubt aus dem elektrischen Wanderungsversuch sogar folgern zu dürfen, daß die Hauptserie der Alkalien von den neutralen Atomen emittiert werde. Er findet nämlich, daß der Kern des Lichtbogens nur schwach von dem Licht der Hauptserie erhellt ist, daß dagegen in dem äußeren Mantel des Lichtbogens Alkalidämpfe zur Emission der Hauptserie gebracht werden können, ohne daß sie vom elektrischen Feld nach der Kathode geführt werden. Indes ist erstens zu beachten, daß nach den obigen Darlegungen in Wirklichkeit auch im Innern des Lichtbogens die Hauptserie kräftig leuchtet. Zweitens darf nicht übersehen werden, daß im Mahtel des Lichtbogens die elektrische Feldstärke viel kleiner als im Innern ist, so daß hier die elektrische Wanderung nur sehr schwach sein kann.

So weit ich urteilen kann, besitzen wir bis jetzt nur eine Methode, die Spektra der Atomionen zu ermitteln, nämlich die Beobachtung des Doppler-Effektes bei den Kanalstrahlen.

Es sei mir noch der Hinweis gestattet, daß ich bereits in meinem Buche über die Elektrizität in Gasen (Leipzig 1902) S. 457 mit fol-

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1, 165.

genden Worten den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen vorausgesagt habe. „Auch kann man vielleicht hier (Kanalstrahlen) eine Verschiebung oder Verbreiterung der Spektrallinien gemäß dem Dopplerschen Prinzip beobachten; hier besitzen nämlich die positiven Ionen einerseits eine große Geschwindigkeit, anderseits müssen auch sie selbst bei einem Zusammenstoß nicht blos das von ihm getroffene Teilchen, ja sogar viel stärker als dieses zum Leuchten erregt werden.“ Warum frühere Autoren an der Emission der positiven Lichtsäule und an dem von Kathodenstrahlen erregten Licht den Doppler-Effekt nicht finden konnten, ist nach den neuen Erfahrungen leicht zu verstehen.

Zum Schlusse möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. E. Riecke herzlich dafür danken, daß er von Anfang an mit großer Bereitwilligknit für meine spektralanalytischen Untersuchungen die notwendigen Mittel beschafft und mir zur Verfügung gestellt hat.

Göttingen, 5. November 1905.

Bestimmung aller Kurven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen.

Von

Georg Scheffers in Darmstadt.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 25. November 1905.

In einer kürzlich unter dem gleichen Titel erschienenen Arbeit kommt Herr Stäckel zu dem Ergebnis [1]: „Wenn aber Lie geglaubt hat, daß mit dem Scherkschen Flächen und deren Ausartungen, der geradlinigen Schraubenfläche und der Ebene, die Minimalflächen erschöpft seien, die sich durch Translation einer Kurve von nicht verschwindendem Bogenelement erzeugen lassen, so hat er sich geirrt". Es ist jedoch leicht, zu zeigen, daß sich nicht Lie, sondern Herr Stäckel geirrt hat. Dies nachzuweisen und zu einigen anderen Behauptungen in derselben Arbeit Stellung zu nehmen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

1. Die Lösung des Problems, alle Minimalflächen zu finden, die noch Translationen von Kurven mit nicht verschwindendem Bogenelement zulassen, eines Problems, das übrigens längst von Lie als Spezialfall eines allgemeinen Problems erledigt worden ist [2], führt Herrn Stäckel zu zwei Flächenkategorien. Die mit (S_1) bezeichnete stellt Scherk'sche Minimalflächen dar — zu denen auch Lie gekommen war —, die Flächenkategorie (S_2) dagegen hält Herr Stäckel für neu. Ihre Gleichungen, in denen zwei

1) Nachrichten der K. Gesellscht der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1905. Heft 4, S. 343. Vgl. insbes. S. 356.

2) Lie's eigene Arbeiten hierüber findet man zusammengestellt in meiner Abhandlung: „Das Abel'sche Theorem und das Lie'sche Theorem über Translationsflächen", Acta Mathematica, 28. Band, S. 65—91. Der von Herrn Stäckel behandelte spezielle Fall ist ebenda auf S. 89 erwähnt.

Konstanten λ und γ auftreten, lauten:

$$
(S_2)\begin{cases}
x = \sin\gamma\,.\,(u+v)\\
y = -\left[\log\dfrac{\lambda\cos u+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}{\lambda+1}+\log\dfrac{\lambda\cos v+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}}{\lambda+1}\right],\\
z = \cos\gamma\,.\,[\arcsin(\lambda\sin u)+\arcsin(\lambda\sin v)].
\end{cases}
$$

Herrn Stäckels Schlußfolgerung ist diese: Die Funktionaldeterminante von x, y, z hinsichtlich u, v, λ ist nicht identisch gleich Null, folglich enthält die Gleichung zwischen x, y, z, die sich aus (S_2) durch Elimination von u und v ergibt, zwei wesentliche Konstanten (gemeint sind λ und γ). Bei der Kategorie (S_1) dagegen enthält sie nur eine (nämlich γ). Folglich können die Flächen (S_2) nicht die Flächen (S_1) sein.

Hierbei ist ein einfacher Umstand übersehen: Diejenigen Flächen (S_2) nämlich, die sich für denselben Wert der Konstanten γ, aber für verschiedene Werte der Konstanten λ ergeben, sind einander kongruent. In der Tat: Ueben wir auf die Fläche (S_2) eine solche Translation parallel der y-Axe aus, bei der y um die Konstante

$$\log(\lambda^2-1)-2\log(\lambda+1)$$

wächst, so stellt sich die Fläche (S_2) so dar:

$$
(\Sigma_2)\begin{cases}
x = \sin\gamma\,.\,(u+v),\\
y = -[\log(\lambda\cos u+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u})-\tfrac{1}{2}\log(\lambda^2-1)]\\
\qquad -[\log(\lambda\cos v+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v})-\tfrac{1}{2}\log(\lambda^2-1)],\\
z = \cos\gamma\,.\,[\arcsin(\lambda\sin u)+\arcsin(\lambda\sin v)].
\end{cases}
$$

Durch diesen sehr einfachen Prozeß ist das erreicht, was Herr Stäckel bei den Flächen (S_2) vermißt: Jetzt nämlich ist die Funktionaldeterminante von x, y, z hinsichtlich u, v, λ identisch gleich Null. Die Gleichung also, die aus (Σ_2) durch Elimination von u und v hervorgeht, ist auch frei von λ, d. h.: Alle Flächen (S_2), die zu demselben Werte von γ, aber zu verschiedenen Werten von λ gehören, sind einander kongruent. Hieraus folgt noch ein Umstand, den Herr Stäckel infolge seines Fehlers naturgemäß nicht bemerkt hat: Die Fläche (Σ_2) kann auf unendlich viele Weisen durch Translation von Kurven erzeugt werden.

2. Das Beweismittel Herrn Stäckels dafür, daß die Flächen (S_2) wesentlich von den Flächen (S_1) verschieden sein müssen, ist

durch das Vorhergehende hinfällig geworden: Die Gleichungen (S_2) enthalten ebenso wie die Gleichungen (S_1) nur eine „wesentliche“ Konstante, nämlich γ. Immerhin wäre es ja denkbar, daß trotzdem die Flächen (S_2) nicht die Flächen (S_1) wären. Aber in dieser Beziehung macht einen schon der folgende Umstand stutzig:

Wenn man bei den Scherk'schen Flächen (S_1), die sich übrigens offenbar analog (Σ_2) so darstellen lassen[1]):

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} x = \sin\gamma\,.\,(u+v), \\ y = -[\log(\lambda\cos u + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}) - \frac{1}{2}\log(\lambda^2-1)] \\ \qquad + [\log(\lambda\cos v + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}) - \frac{1}{2}\log(\lambda^2-1)], \\ z = \cos\gamma\,.\,[\arcsin(\lambda\sin u) - \arcsin(\lambda\sin v)], \end{cases}$$

und bei den Flächen (S_2) die partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach den Flächenparametern u und v berechnet, so ergiebt sich, daß sie sich bei (S_1) und (S_2) nur durch das Vorzeichen der Quadratwurzel

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 v}$$

unterscheiden. Daraus folgt: Die Gleichungen (S_2) lassen sich — abgesehen von additiven Kunstanten — so schreiben, daß sie sich von den Gleichungen (S_1) nur durch das Vorzeichen dieser Irrationalität unterscheiden. Da nun Herr Stäckel ganz richtig zeigt, daß die Fläche (S_1) in der von dieser Irrationalität freien Form

$$(1)\qquad e^y = \frac{\cos(\varrho x - r z)}{\cos(\varrho x + r z)} \quad \left(\varrho = \frac{1}{2\sin\gamma},\ r = \frac{1}{2\cos\gamma}\right)$$

dargestellt werden kann, so muß sich notwendig die Fläche (S_2) oder (Σ_2) in einer solchen Form:

$$e^{y+c} = \frac{\cos(\varrho x - r z + a)}{\cos(\varrho x + r z + b)}$$

darstellen lassen, wo a, b, c Konstanten sind.

3. Es ist aber auch leicht, direkt aus (Σ_2) die Parameter u und v zu eliminieren. Zu diesem Zwecke schließen wir so: Wenn wir in (Σ_2) für u und v ein und dieselbe Veränderliche t setzen,

---

1) In der Stäckel'schen Arbeit steht vor der zweiten Quadratwurzel ein Minuszeichen. Dies ist jedoch ein offenbarer Druckfehler, wie die Stäckelschen Formeln (S) für $\varepsilon = -1$ zeigen.

so ergiebt sich eine Kurve auf der Fläche $(\sum_2)$:

$$(K) \begin{cases} x = 2 \sin \gamma . t \\ y = -2 \log (\lambda \cos t + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 t}) + \log (\lambda^2 - 1), \\ z = 2 \cos \gamma . \operatorname{arc} \sin (\lambda \sin t), \end{cases}$$

und die Fläche $(\sum_2)$ ist offenbar der Ort der Mitten aller Sehnen dieser Kurve (die übrigens eine Haupttangentenkurve ist). Da nun λ in $(\sum_2)$, wie bewiesen, nur scheinbar auftritt, so folgt, daß auf der Fläche $(\sum_2)$ alle diejenigen unendlich vielen Kurven liegen, die durch (K) für die verschiedenen Werte der Konstanten λ dargestellt werden, d. h: Die Gleichung der Fläche $(\sum_2)$, geschrieben in x, y, z allein, geht durch Elimination von t und λ aus (K) hervor. Diese Elimination gibt

$$e^y = -\frac{\sin (\varrho x - r z)}{\sin (\varrho x + r z)} \quad \left(\varrho = \frac{1}{2 \sin \gamma}, \; r = \frac{1}{2 \cos \gamma}\right)$$

oder:

$$e^y = \frac{\cos (\varrho x - r z + \frac{1}{2} \pi)}{\cos (\varrho x + r z - \frac{1}{2} \pi)}. \tag{2}$$

Die Vergleichung mit (1) lehrt: Die Fläche $(\sum_2)$ oder (S_2) ist eine Scherk'sche Minimalfläche. Die angeblich neuen Flächen des Herrn Stäckel sind also tatsächlich nicht neu; der gegen Lie erhobene Vorwurf wird damit vollständig hinfällig.

4. Von Lie rührt die schöne Bemerkung her, daß diejenigen Kurven, durch deren Translation eine Scherk'sche Minimalfläche erzeugt werden kann und deren Bogenelement nicht verschwindet, so gefunden werden können: Man greife eine beliebige Haupttangentenkurve der Fläche heraus, ziehe von irgend einem ihrer Punkte alle Sehnen der Kurve und halbiere sie. Der Ort der Mitten ist eine erzeugende Kurve. Läßt man den gewählten Punkt variieren, so erhält man in dieser Weise alle unendlich vielen Erzeugenden einer Schar. Nach dieser Methode hat ein Schüler von Lie, Herr R. Kummer, auf einem Gipsmodell einer Scherk'schen Fläche eine allgemeine Schar von erzeugenden Kurven konstruiert. Das Modell ist im Besitze des Leipziger mathematischen Institutes; doch findet man in der Kummer'schen Dissertation[1]) stereoskopische Abbildungen davon. Ich erinnere mich noch deutlich daran, wie Lie damals, als Herr Kummer

---

1) Richard Kummer, „Die Flächen mit unendlich vielen Erzeugungen durch Translation von Kurven", Leipziger Dissertation, gedruckt bei Julius Klinkhardt, Leipzig 1894.

das Modell anfertigte, Tag für Tag in der Arbeitsstätte vorsprach, weil er sich danach sehnte, einmal wirklich die Erzeugung der Fläche durch Translation einer möglichst allgemeinen Kurve zu *sehen*. Die Kurve wurde damals aus Draht gewunden, und wir drei freuten uns, zu beobachten, wie es diese periodische Kurve fertig brachte, sich in Translationsbewegung längs der ebenfalls periodischen Scherk'schen Fläche hinzubewegen. Das Nähere über die *sehr einfache* Bestimmung dieser Kurve findet man in der erwähnten Dissertation. Dieser Reminiszenz stelle ich die Worte des Herrn *Stäckel* gegenüber: freilich hat *Lie* „dort nur die *Existenz* der unendlich vielen Erzeugungen nachgewiesen, während hier deren explicite *Darstellung* gegeben wurde". Vermutlich kennt Herr *Stäckel* die Arbeit *Kummer's* nicht; jedenfalls aber ist Herr *Kummer* einen Schritt weiter als Herr *Stäckel* gegangen: er hat erzeugende Kurven allgemeinster Art *wirklich hergestellt*.

5. Da die Scherk'schen Flächen zwei diskrete Scharen von Haupttangentenkurven haben, so gehören dazu *selbstverständlich* zwei wesentlich verschiedene Kategorien von Darstellungen dieser Flächen durch Translation von Kurven. Für *Lie* wäre also die Existenz der beiden Darstellungsarten (Σ_1) und (Σ_2) der Flächen gar nichts wunderbares gewesen.

Gehen wir zu den Ausartungen über, so stoßen wir auf die *gemeine Schraubenfläche*. Hier artet die eine Schar von Haupttangentenkurven in gerade Linien aus und gibt *keine* Kategorie von Darstellungen; dies hatte *Lie* vollständig richtig erkannt. Herr *Stäckel* aber ist auch in diesem Punkte in Widerspruch mit *Lie*, indem er auf S. 353 behauptet, daß für die gemeine Schraubenfläche:

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y$$

die beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} x &= c(\sin p_1 + \sin q_1), & x &= c(\cos p_2 - \cos q_2), \\ y &= p_1 + q_1, & y &= p_2 - q_2, \\ z &= c(\cos p_1 + \cos q_1); & z &= -c(\sin p_2 + \sin q_2) \end{aligned}$$

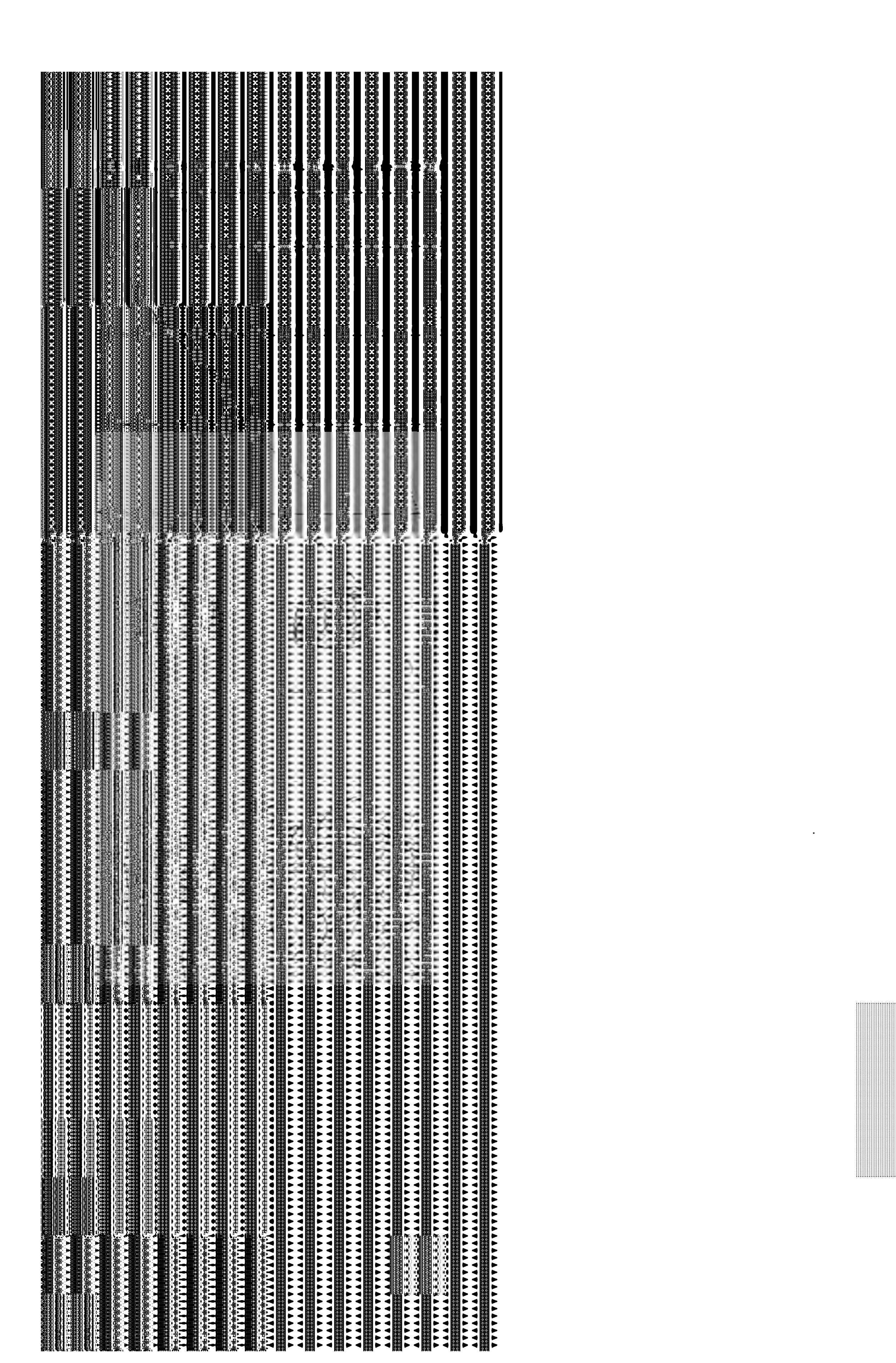
wesentlich verschieden seien. *Auch hier ist der Widerstreit zu Ungunsten des Herrn Stäckel zu entscheiden.* Denn wenn man in der ersten Darstellung setzt:

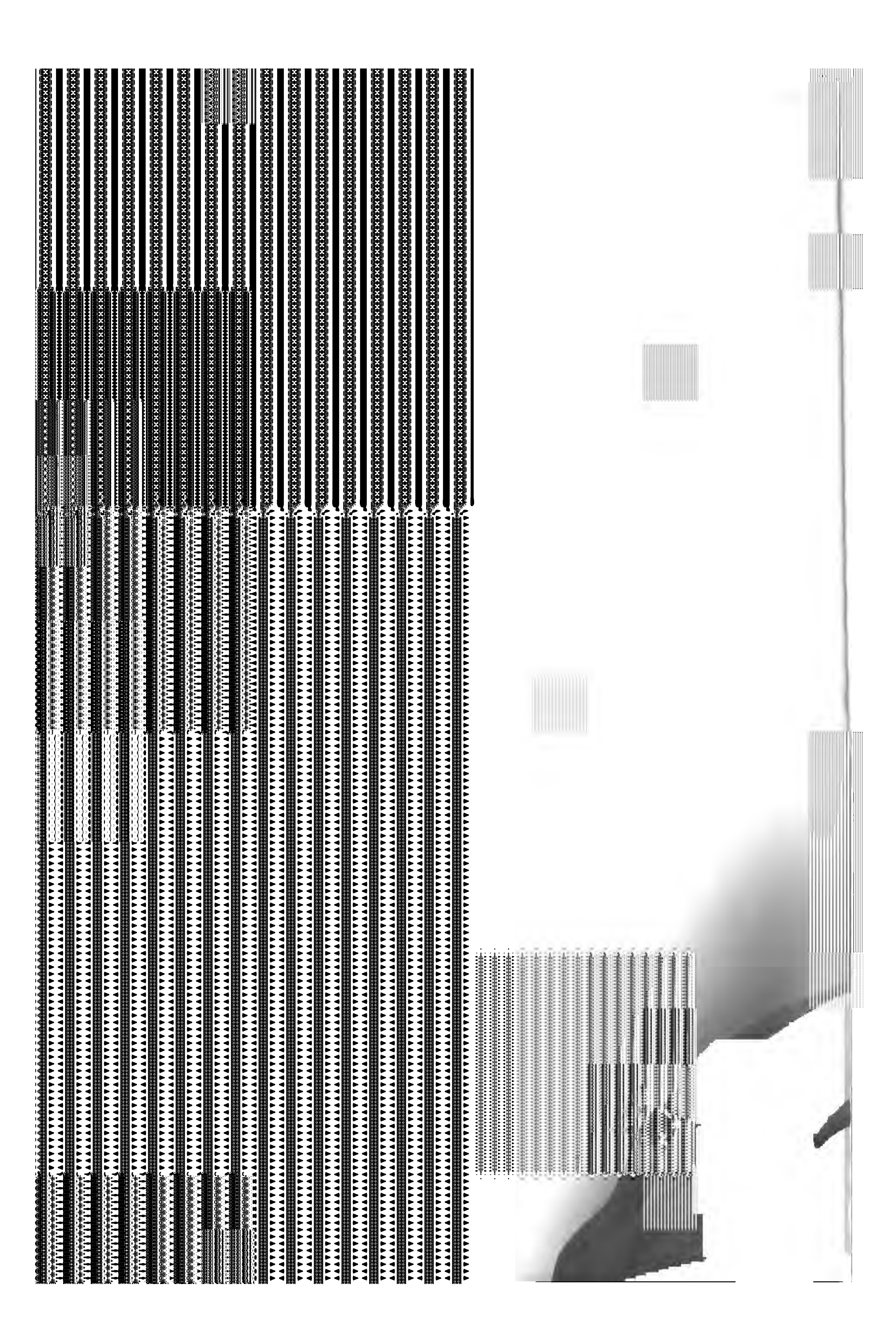
$$p_1 = p_2 - \tfrac{1}{2}\pi, \quad q_1 = \tfrac{1}{2}\pi - q_2,$$

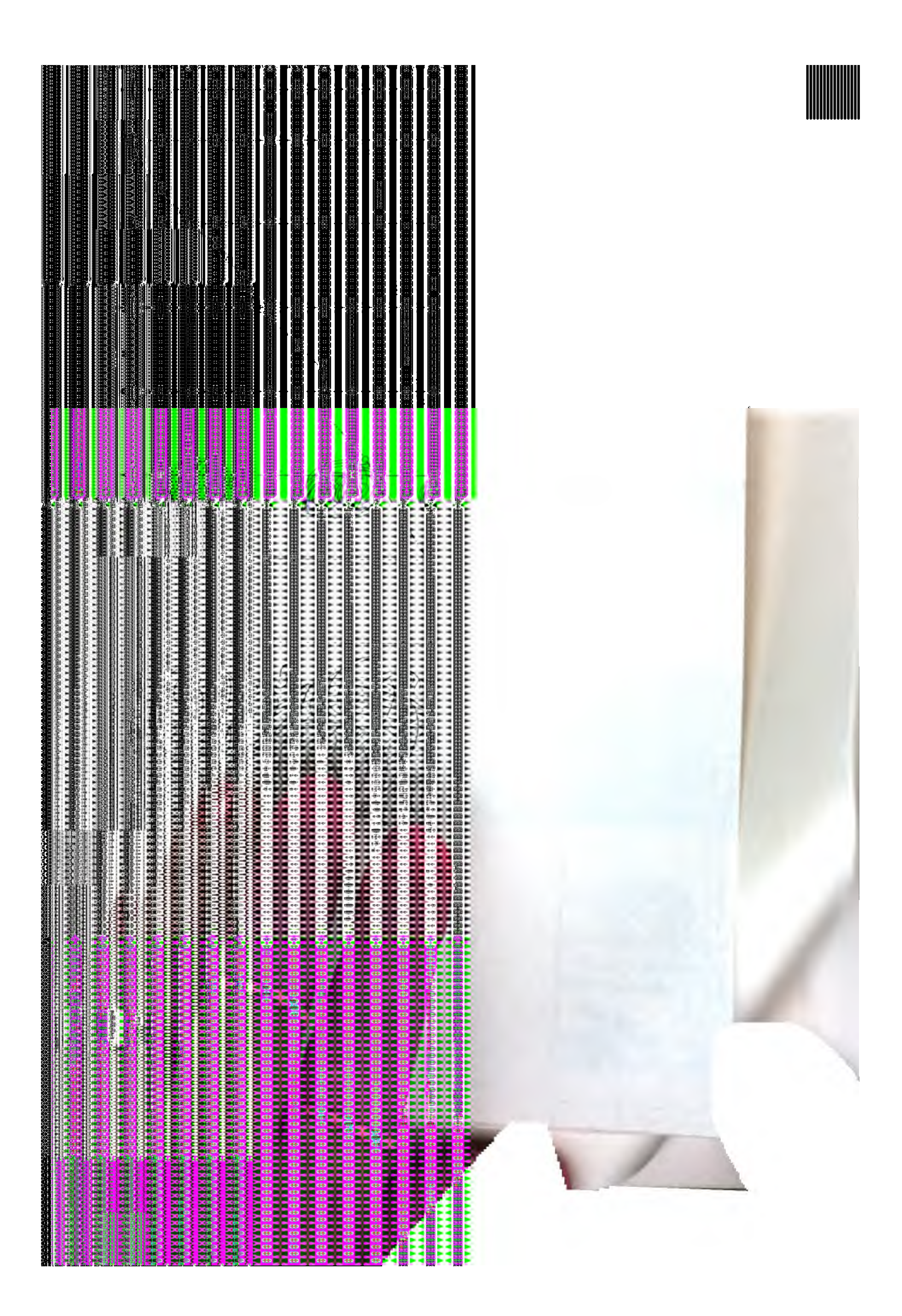
so geht ja sofort die zweite hervor.

6. Das von Herrn Stäckel behandelte Problem ist, wie schon angedeutet, ein spezieller Fall eines von Lie gelösten Problems. Nach Lie findet man alle Flächen mit mehrfacher Erzeugung durch Translation von Kurven, indem man Abelsche Integrale in bezug auf eine beliebige ebene Kurve vierter Ordnung heranzieht. Lie selbst hat gezeigt, wie man insbesondere vorgehen muß, um alle Minimalflächen zu finden, die noch weitere Translationen als die ihrer Minimalkurven gestatten. Die anzuwendende Methode ist sehr einfach; die rechnerische Ausführung dieses speziellen Falles macht nur einen Teil der erwähnten Kummer'schen Dissertation aus. Ich räume aber ausdrücklich ein, daß Herr Stäckel dieses spezielle Problem auf einem von Lie unabhängigen Wege in Angriff genommen hat; und darin liegt der bleibende Wert der Stäckel'schen Arbeit, wenn man von den bezeichneten Irrtümern absieht.

Darmstadt, den 29. Okt. 1905.







Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen

aus dem Jahre 1905.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1905.

Inhalt.

Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1. April 1904 bis 31. März 1905.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat während dieses Jahres 14 ordentliche Sitzungen abgehalten, über deren wissenschaftlichen Inhalt unten die Berichte folgen. Ueber die beiden öffentlichen Sitzungen ist in den Geschäftlichen Mittheilungen berichtet worden.

Die Nachrichten der philologisch-historischen Klasse sind mit 5 Heften (547 Seiten), die der mathematisch-physikalischen Klasse mit 6 Heften (560 S.) abgeschlossen worden.

Von den Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse ist erschienen:

Bd. V Nr. 2. W. Schulze, Zur Geschichte lateinischer Eigennamen.

Bd. VII Nr. 4. J. Flemming und H. Lietzmann, Apollinaristische Schriften syrisch, mit den griechischen Texten und einem syrisch-griechischen Wortregister.

Nr. 5. E. Schwartz, Ueber den Tod der Söhne Zebedaei, ein Beitrag zur Geschichte des Johannesevangeliums.

Bd. VIII Nr. 1. W. Meyer, Die Legende des h. Albanus, des Protomartyr Angliae, in Texten vor Beda.

Nr. 2. F. Frensdorff, G. A. v. Münchhausens Berichte über seine Mission nach Berlin im Juni 1740.

Von den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse:

Bd. III Nr. 1. E. Ehlers, Neuseeländische Anneliden.

Nr. 2. A. v. Koenen, Ueber die untere Kreide Helgolands und ihre Ammonitiden.

Nr. 5. F. Linke, Luftelektrische Messungen bei zwölf Ballonfahrten.

Die Göttingischen Gelehrten Anzeigen sind durch Herrn Prof. R. Meissner in der gewohnten Weise fortgeführt worden.

In den Schriftenaustausch sind 7 neue Theilnehmer (2 amerikanische, 2 italienische, 1 englische, 1 indische, 1 belgische Körperschaft) eingetreten. Ueber diesen und die sonst der Gesellschaft zugegangenen Schriften gibt das weiterhin mitgetheilte Verzeichniß Auskunft, das zugleich als Empfangsbescheinigung dienen soll, soweit eine solche nicht auf besonderen Wunsch direct ertheilt worden ist.

Zur Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen hat die Gesellschaft bewilligt:

Herrn Lüders in Rostock für Arbeiten zur Vorbereitung des der Internationalen Association der Akademien vorgelegten Planes einer Neuausgabe des Mahâbhârata	M.	500
den Herren Riecke und Wiechert zur Fortsetzung luftelektrischer Untersuchungen	„	1000
für die vom Cartell wissenschaftlicher Körperschaften herausgegebene Mathematische Encyklopädie	„	500
Herrn Biltz in Göttingen für Arbeiten über die Colloide	„	500
Herrn Riecke für Entladungsversuche	„	500
Herrn Wagner für Drachenbeobachtungen in Samoa	„	500
Herrn Boruttau in Göttingen für Untersuchungen über die pathologischen Veränderungen der Function der Nervenfasern	„	600
Herrn Voigt für Untersuchungen über Einwirkung eines elektrischen Feldes auf die optischen Eigenschaften der Körper	„	800
den Herrn Riecke und Wiechert für Herstellung eines Apparates zur Registrierung der elektrischen Leitungsfähigkeit der Luft	„	500
Herrn Schwartz für die Vorbereitung einer Ausgabe der syrischen Uebersetzung der Concilskanones	„	1000
Herrn Merkel für Erlangung frischen menschlichen Untersuchungsmaterials	„	500
Herrn Hertel in Jena für Studien über die physiologischen Wirkungen der chemisch wirksamen Lichtstrahlen	„	400
Herrn Verworn für eine Studienreise betr. das älteste Auftreten des Menschen in Europa	„	600
außerordentlicher Zuschuß für den Thesaurus linguae latinae	„	1000

Die Unternehmungen der Gesellschaft haben durch die preußische und die Reichsregierung dankenswertheste Unterstützung erfahren. Ueber die Erhaltung des Samoa-Observatoriums für die Jahre 1904—1908 wird unten berichtet werden. Für die Fortführung der luftelektrischen Forschungen ist eine erste Rate im Betrage von 4400 M. in den Entwurf zum nächstjährigen Staatshaushaltsetat eingestellt worden. Der oben bezeichnete Zuschuß für den Thesaurus linguae latinae ist der Gesellschaft durch eine besondere Zuwendung von Seiten des vorgesetzten Ministeriums ermöglicht worden.

Bei der Delegirtenversammlung der cartellirten Körperschaften, die in Wien am 22. April 1904 stattfand, war die Gesellschaft durch Herrn F. Klein vertreten. Bei dieser Gelegenheit erklärte die K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften ihren Beitritt zur Bearbeitung der Mathematischen Encyklopädie.

Vom 25.—27. Mai 1904 wurde in London die zweite Allgemeine Versammlung der Internationalen Association der Akademien abgehalten. Die Gesellschaft war vertreten durch ihre Sekretäre Leo und Ehlers, ferner durch die Herren Kielhorn und Riecke. Die Protokolle sind besonders erschienen. Von speciellen Beratungsgegenständen nahmen die Delegirten der Gesellschaft vornehmlich theil an den Verhandlungen über die Bearbeitung des Mahâbhârata, über die von der British Academy angeregte Herstellung eines Thesaurus linguae graecae, die luftelektrische Forschung, die Gehirnforschung, die Organisation der seismologischen Beobachtungen, die magnetische Aufnahme längs eines Parallelkreises. Von diesen Gegenständen waren der erste und dritte von Seiten des deutschen Cartells vorgelegt worden.

In den Internationalen Ausschuß wurden die Sekretäre der Gesellschaft wiedergewählt.

Dem Curatorium des in München begründeten Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik trat Herr Nernst als Vertreter der Gesellschaft bei.

Die Gesellschaft richtete einen Glückwunsch an die Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt zu deren 150jährigem Jubiläum.

Ihrem Ehrenmitgliede Exc. Planck überbrachte die Gesellschaft ihre Glückwünsche zum 80. Geburtstage durch ihre Sekretäre.

Durch den Tod verlor die Gesellschaft ihr Ehrenmitglied

Ernst Abbe in Jena am 14. Januar 1905 (E. M. seit 1901),

ihr ordentliches Mitglied in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Georg Meissner am 30. März 1905 (O. M. seit 1861),

ihre correspondierenden Mitglieder in der historisch-philologischen Klasse:

Hugo Berger in Leipzig am 27. September 1904 (C. M. seit 1901),

Konstantin Höhlbaum in Gießen (C. M. seit 1889),

Karl Koppmann in Rostock (C. M. seit 1889),

Joh. Gottfr. Wetzstein in Berlin am 18. Jan. 1905 (C. M. seit 1886),

in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Wilhelm His in Leipzig (C. M. seit 1880).

In Folge seiner Berufung nach Berlin trat Herr W. Nernst aus der Reihe der ordentlichen in die der auswärtigen Mitglieder über.

Die Gesellschaft wählte zu auswärtigen Mitgliedern in der mathematisch-physikalischen Klasse die Herren:

Gustav Retzius in Stockholm (C. M. seit 1886),

Ernst Wilhelm Benecke in Straßburg (C. M. seit 1889),

Ewald Hering in Leipzig,

Paul Ehrlich in Frankfurt a/M,

zu correspondierenden Mitgliedern in der philologisch-historischen Klasse die Herren

Bruno Keil in Straßburg,

Paul Jonas Meier in Braunschweig,

Arthur Napier in Oxford,

Paolo Orsi in Syrakus,

Richard Reitzenstein in Straßburg,

Karl Schuchardt in Hannover,

Rudolf Thurneysen in Freiburg i/B.;

in der mathematisch-physikalischen Klasse die Herren

Dietrich Barfurth in Rostock,

Friedrich Becke in Wien,

Robert Fricke in Braunschweig,

Alfred Pringsheim in München,

Theodor Nikolaus Tschernyscheff in St. Petersburg.

Bericht über den Thesaurus linguae latinae.

Der Druck ist im abgelaufenen Jahr um 50 Bogen (Bd. I um 34, Bd. II um 16 Bogen) gefördert worden. Der geringe noch ausstehende Rest von Bd. I ist im Drucke; die Vollendung von Bd. II hat sich wegen der überwiegenden Masse von Eigennamen verzögert.

Die Commission, die im Juni 1904 in München tagte, hat vor allem der Gefahr, die dem Unternehmen von der Last der Eigennamen droht, durch besondere Bestimmungen für deren Behandlung zu begegnen gesucht; sie hat gleichzeitig auf eine gedrängtere Behandlung des übrigen Materials hingewirkt, durch welche der wissenschaftliche Werth der einzelnen Artikel eher gehoben als gedrückt werden wird.

Obwohl das Unternehmen durch die regelmäßigen Beiträge der vereinigten Körperschaften und durch besondere Zuschüsse deutscher Staaten (Baden, Hamburg, Elsaß-Lothringen, Württemberg, Preußen) und Akademien (Berlin, Wien, Göttingen) dauernd gesichert ist, läßt die Finanzlage zu wünschen übrig, so daß eine regelmäßige Erhöhung der Gehälter nicht hat durchgeführt werden können und dem Unternehmen oft die erprobtesten Kräfte verloren gehn.

Auch dieses Jahr hat eine Reihe sehr unerwünschter Verluste gebracht, die sich langsam ersetzen. Von entscheidender Wichtigkeit ist es, daß das Jahr mit der Ernennung des Generalredactors Herrn Vollmer zum ordentlichen Professor an der Münchener Universität geschlossen hat. Die Veränderungen, die sich hieraus ergeben und ungefähr mit dem Beginn des III. und IV. Bandes zusammenfallen werden, sollen die auf Pfingsten d. Js. angesetzte Conferenz der Thesauruscommission beschäftigen.

F. Leo.

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

An erster Stelle haben wir auch in diesem Jahr dem Herrn Minister der geistlichen u. s. w. Angelegenheiten unsern ehrerbietigsten Dank auszusprechen. Wie im Vorjahr bewilligte er unserm ständigen Mitarbeiter Dr. E. Caspar ein Stipendium und verlängerte den dem Oberlehrer Dr. W. Wiederhold gewährten Urlaub nach Frankreich um ein weiteres Halbjahr.

An den Arbeiten beteiligten sich der Leiter des Unternehmens Prof. Kehr, der ständige Mitarbeiter Dr. Caspar, unsere beiden durch langjährige Teilnahme an den Arbeiten erprobten früheren Mitarbeiter, Oberlehrer Dr. Wiederhold in Goslar und Oberlehrer Dr. Brackmann in Marburg, endlich unsere bewährten italienischen Freunde Prof. Schiaparelli in Florenz und Prof. Fedele in Neapel.

I. Die Revisionsarbeiten in Italien hat Prof. Kehr, unterstützt von Schiaparelli, Fedele und andern Gelehrten fortgesetzt. Es liegt in der Natur der archivalischen Ueberlieferung dieses Landes, daß immer wieder neue Fonds mit unbekannten Urkunden an den Tag kommen, zuweilen auch da, wo man es am wenigsten vermutet. So brachten die Bemühungen der Archivare des Vaticanischen Archivs noch eine stattliche Zahl neuer Inedita zum Vorschein, denen voraussichtlich noch andere folgen werden. In dem Archiv des Fürsten Chigi fand der Archivar A. Corvisieri mehrere Originale auf, die zu dem wichtigen Fonds des toscanischen Monte Amiata gehören. Auch im römischen Staatsarchiv stieß der Archivar F. Tonetti auf uns unbekannt gebliebene Urkunden aus den Marken. In dem benachbarten Orte entdeckte Cav. Pasquinangeli die lang vermißten Urkunden des Kapitel-

archivs von S. Maria. In Bologna fand Dr. A. Hessel mehrere Stücke, die uns früher entgangen waren, und in Neapel gelang es Prof. Fedele ältere Papsturkunden aufzufinden, die von nicht geringem Werte sind.

Dies ist der Anlaß, daß wir mit dem Druck der schon länger angekündigten *Italia pontificia*, deren Manuscript, soweit Rom und Mittelitalien in Betracht kommt, in der Hauptsache druckfertig vorliegt, noch zurückgehalten haben. Doch wird der Druck noch in diesem Jahr zugleich mit dem Material für Süditalien sicher begonnen werden.

Hiermit hat sich Dr. Caspar beschäftigt. Er hat in Berlin mit den Bücherschätzen der Königlichen Bibliothek die Bearbeitung soweit vorbereitet, daß er nunmehr seit Januar 1905 die noch nötigen Revisionsarbeiten in Italien selbst hat vornehmen können. Während des ersten Quartals des Jahres 1905 arbeitete er in Rom, während des Sommers und Herbstes wird er vorzüglich in Neapel und vielleicht auch in Palermo zu arbeiten haben.

II. In Deutschland hat Dr. Brackmann sich der Bearbeitung der *Germania pontificia* gewidmet und sie, soweit seine Amtsgeschäfte es erlaubten, nachdrücklich gefördert. Am wichtigsten und ergiebigsten war eine im Juli 1904 zusammen mit Prof. Kehr unternommene Forschungsreise nach der Schweiz, wo nicht nur einiges neue Material gefunden wurde, sondern auch mehrere schwierige kritische Fragen untersucht worden sind. Die Ergebnisse dieser Forschungsreise hat Brackmann in unsern Nachrichten für 1904 veröffentlicht. Ausführlicher wird über seine Tätigkeit der Herr Director der Wedekindstiftung, in deren Auftrag und mit deren Unterstützung die Germania pontificia bearbeitet wird, berichten.

III. Nachdem Dr. Wiederhold in mehrjähriger Arbeit die Vorarbeiten für Frankreich zum Abschluß gebracht hat, hat er während des ganzen Jahres, vom April 1904 bis in den April 1905, ununterbrochen und unermüdet, im südöstlichen Frankreich gearbeitet. Er begann in Nizza, ging dann nach Marseille und in die kleinen Departementalarchive der Provence und der Dauphiné, arbeitete längere Zeit in Arles, Nimes, Avignon, Valence und Grenoble, und verweilte dann geraume Zeit in Lyon, Bourges, Lons le Saulnier, Besançon, Vesoul und Dijon und schloß seine Reise in Auxerre ab. Er hat also in der Hauptsache die archivalischen Forschungen für den Bereich des alten Burgund und Arelate vollendet. Die Ernte, die er heimbringt, ist überaus stattlich und wichtig, weit über alles Erwarten. Das war freilich nur möglich

Dank dem besonderen Entgegenkommen, das ihm die französische Regierung auf Grund einer Empfehlung durch unsern Herrn Cultusminister erwies, und Dank der wahrhaft gastfreundlichen Aufnahme und bereitwilligen Unterstützung, die er überall in den Archiven und Bibliotheken Frankreichs gefunden hat. Wir sagen Allen hierfür unsern besten Dank.

Die Commission für die Herausgabe der älteren Papsturkunden.

Bericht über die Vorarbeiten für eine Germania pontificia.

Vorgelegt vom Director der Wedekind-Stiftung, F. Frensdorff.

In dem verflossenen Jahre, Ostern 1904 bis Ostern 1905, wurde zunächst die Bearbeitung der westfälischen und mittelrheinischen Papsturkunden fortgesetzt; den Abschluß dieser Arbeiten wird voraussichtlich das nächste Jahr bringen.

Die Hauptarbeit dieses Jahres erstreckte sich auf die Papsturkunden der Schweizer Archive. Durch die Mitarbeit des Herrn Geheimrat Professor Dr. Kehr in Rom wurde es möglich, die Originale sämtlich an Ort und Stelle zu erledigen. Leider brachte es die beschränkte Ferienzeit von 4 Wochen, die dem Unterzeichneten für die Archivreise zur Verfügung stand, mit sich, daß die Archive von Genf, Sitten und St. Maurice nicht besucht werden konnten. In Genf hat inzwischen Herr Dr. Wiederhold gearbeitet; es fanden sich dort nur die wenigen schon bekannten späteren Papsturkunden für Genf; Sitten und St. Maurice beabsichtigt Herr Geheimrat Kehr später zu besuchen.

Ueber die übrigen Archive und Bibliotheken der Schweiz ist in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1904, Heft 5, ein ausführlicher Bericht erstattet, auf den ich mir an dieser Stelle zu verweisen erlaube. Die Ausbeute an neuem Material war nicht groß; doch wurden wertvolle alte Ueberlieferungen bekannter Urkunden gefunden. Von besonderem Interesse waren eine Reihe diplomatischer Fälschungen, die in genanntem Berichte eingehender behandelt sind. Abgesehen von der noch ausstehenden kritischen Untersuchung einiger Urkunden, z. B. der Leos VIII. für Einsiedeln, deren Unter-

suchung zwar begonnen, aber noch nicht abgeschlossen ist, und einiger Papsturkunden für Pfävers, deren Ueberlieferung anderweitig benutzt wurde, sind durch die Arbeiten dieses Jahres die Schweizer Materialien, so weit sich das kontrollieren lässt, für die Germania pontificia vollständig benutzt worden.

Den Archivaren der Schweizer Archive sind wir für ihre tatkräftige Hülfe zu besonderem Danke verpflichtet. Für briefliche Auskunft und Mitteilungen haben wir namentlich zu danken den Herren Professor Dr. Schnürer und Professor Dr. Steffens in Freiburg, dem Stiftsarchivar P. Odilo Ringholz O. S. B. in Einsiedeln, dem Staatsarchivar Professor Dr. Türler und dem Oberbibliothekar Professor Dr. von Mülinen in Bern, der Kantonsbibliothek in Luzern, dem Staatsarchivar Walter in Schaffhausen. Letzterem Herrn sind wir auch für die Uebersendung der Urkunde Gregors VII. für Schaffhausen an das Königliche Staatsarchiv in Hannover zu Dank verpflichtet.

A. Brackmann, Marburg i. H.

Bericht über das Samoa-Observatorium.

Das von der K. Gesellschaft der Wissenschaften mit Unterstützung der Staatsregierung wie der Reichsregierung im Jahre 1902 ins Leben gerufene geophysikalische Observatorium in Apia ist im Berichtsjahr 1904 in ein neues Stadium seiner Entwickelung getreten. Ursprünglich als ein temporäres gedacht, hätte dasselbe nach zweijähriger Wirksamkeit im vergangenen Jahre aufgelöst werden sollen, wenn nicht inzwischen von verschiedenen Seiten Stimmen laut geworden wären, die sich für eine längere Dauer der dortigen Beobachtungen aussprachen. Wie bereits im vorjährigen Bericht (Geschäftl. Mitt. 1904, S. 21) mitgeteilt ist, regten besonders die amerikanischen Erdmagnetiker unter Führung von Dr. L. A. Bauer, des Chefs der „Division of Terrestrial Magnetism, U. S. Coast and Geodetic Survey", in Washington die ununterbrochene Fortführung der erdmagnetischen Beobachtungen auf Samoa für eine Reihe von Jahren an als Ergänzung der Arbeiten, die von den neugegründeten amerikanischen Stationen im Stillen Ozean, auf Honolulu und den Philippinen begonnen sind.

Die Unterhandlungen, welche hierüber von der K. Gesellschaft mit der Staatsregierung gepflogen wurden, haben ein sehr erfreuliches Ergebnis gehabt. Am 6. Juni v. J. fand auf Einladung des Reichsamts des Innern zu Berlin eine kommissarische Beratung statt, an welcher Vertreter des genannten Reichsamts, des Reichsschatzamtes, der Kolonialabteilung und des K. Preuß. Kultusministeriums, welches die Anregung zu der fraglichen Sitzung gegeben hatte, unter Zuziehung der Herren Wagner und Wiechert von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen als Sachverständiger teilnahmen. Allgemein ward hier die Notwendigkeit der Aufrechterhaltung des Samoa-Observatoriums von deutscher Seite als patriotische Pflicht anerkannt und über die

Beschaffung der Mittel beraten. Man kam überein, daß die Kosten der Erhaltung für weitere fünf Jahre 1904—1908 in Aussicht zu nehmen seien unter Zugrundelegung eines jährlichen Bedarfs von 25000 M. Diese sollten zur Hälfte von Preußen, zur andern vom Reiche getragen werden, wie ja beide auch schon bisher die Zuschüsse für Begründung und Erhaltung des Observatoriums zu gleichen Teilen übernommen hatten. Im übrigen ward von den Zentralbehörden Wert darauf gelegt, daß Verwaltung und Beaufsichtigung der Station ganz wie bislang in den Händen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen verbleibe. Die Angelegenheit ist inzwischen etatsmäßig geordnet und damit der Fortbestand des Unternehmens in dankenswertester Weise endgültig bis 1908/9 gesichert.

Bei dieser Lage der Sache schien es der Gesellschaft zweckmäßig, die hiesige Verwaltung des Observatoriums aus den Händen der größeren geophysikalischen Kommission einem kleineren, aus drei Mitgliedern bestehenden Kuratorium zu übertragen. Dasselbe wird auf Wunsch der Gesellschaft von den ordentlichen Mitgliedern Wagner, Riecke und Wiechert gebildet. Der erstere übernahm als Kurator, wie schon bisher, die Geschäftsführung. Gleichzeitig ward der Gouverneur von Samoa, Herr Dr. Solf, von uns ersucht, in das Kuratorium mit einzutreten, um unsere Interessen an Ort und Stelle, auch unsern Beamten gegenüber, zu wahren. Wir ergreifen die Gelegenheit Herrn Dr. Solf für seine Bereitwilligkeit und sein uns mehrfach bewiesenes Entgegenkommen aufrichtigen Dank auszusprechen. Wie schon seit 1902, wird auch in Zukunft die umfangreiche Rechnungsführung des Observatoriums in Betreff der in Apia erwachsenden Kosten durch die dortige Gouvernementskasse unentgeltlich besorgt.

Der bisherige Observator, Dr. Otto Tetens, erklärte sich bereit, die Leitung der Arbeiten des Observatoriums bis zur Ankunft eines Ersatzmannes fortzuführen. Letzterer wurde in Dr. Franz Linke aus Helmstedt bereits im Mai 1904 gewonnen, doch konnte er erst Ende September in die Dienste der Gesellschaft treten. Dr. Linke hatte 1901 als Geophysiker in Berlin promoviert und war dann längere Zeit am landwirtschaftlichen Institut zu Berlin, später auch an der erdmagnetischen Abteilung des Meteorologischen Instituts in Potsdam tätig. Im Jahre 1902/3 war er Assistent am Göttinger geophysikalischen Institut gewesen, sodaß er mit allen für jetzt in Betracht kommenden Beobachtungen gründlich vertraut war. Nach kurzer Vorbereitungszeit in Potsdam, Hamburg und Göttingen im Oktober v. J. verließ Dr. Linke Eu-

ropa am 8. November von Bremen aus, um über Amerika die Samoa-Inseln möglichst schnell zu erreichen.

Er nahm eine nicht unbedeutende Zahl neuer Instrumente, Utensilien und Ersatzausrüstungsstücke mit. Die ersteren betrafen vor allem das Gebiet der Erforschung der Luftelektrizität. Denn den von Göttingen aus in jüngster Zeit gepflegten Studien über letztere sollte nunmehr durch Beobachtungen während der Meeresfahrten und auf den tropischen Inseln Vorschub geleistet werden. In liberalster Weise wurde die neue Ausrüstung des weitern vom Reichsamt des Innern dadurch unterstützt, daß uns eine große Zahl von Instrumenten, Apparaten, Uhren, Werkzeugen etc. aus dem zurückgebrachten Bestande der Deutschen Südpolarexpedition zur Verfügung gestellt wurde. Die Reparaturkosten für diese Gegenstände sind freilich nicht ganz unbedeutend gewesen.

Die Fahrt über Amerika benutzte Dr. Linke, um in Washington seine erdmagnetischen Instrumente zu vergleichen und persönliche Beziehungen mit Dr. Bauer anzuknüpfen, welcher ihm aufs liebenswürdigste entgegen kam. Am 15. Dezember 1904 gelangte er wohlbehalten in Apia an und am 10. Januar 1905 fand unter Beistand des Vertreters des Gouverneurs von Samoa die formelle Uebergabe des Observatoriums an Dr. Linke statt.

Als eine dringende Notwendigkeit hatte sich schon seit länger die Entsendung einer technischen Hülfskraft erwiesen, welche dem Leiter des Observatoriums bei den vielseitigen Beobachtungen zur Seite stände. In Apia war eine solche schwer für die Dauer zu beschaffen. Bei den schwierigen sozialen Verhältnissen auf den Samoa-Inseln kam es vor allem auf eine zuverlässige Persönlichkeit an. Statt auf einen jungen Mechaniker fiel daher unsere Wahl auf einen geschickten ehemaligen Matrosen, der sich auf der Deutschen Südpolarexpedition besonders bewährt hatte, Albert Possin aus Rheinsberg i. Pr. Nach kurzer Lehrzeit bei einem hiesigen Mechaniker verließ unser Gehülfe am 11. November 1904 Genua und traf mit einem Lloyddampfer über Australien fahrend am 12. Januar 1905 in Apia ein.

Dr. Linke, unter dessen Verantwortung das Samoa-Observatorium seit dem 1. Januar d. J. steht, hat bereits eine Reihe von Neuerungen im Betrieb desselben eingeführt, durch welche die Registrierungen, vor allem am Seismometer und den Variationsinstrumenten verschärft werden. Das erstere hat einen neuen Aufsatz erhalten, um auch Fernbeben zu registrieren, während es bisher nur für Nahbeben eingestellt war. Es werden nunmehr auch regelmäßige Meldungen über wichtige Erdbeben zur unmittel-

baren Veröffentlichung an das hiesige geophysikalische Institut gesandt. Luftelektrische Beobachtungen und solche mittelst Drachen konnten von Dr. Linke noch nicht angestellt werden.

Dr. Tetens hat seine Tätigkeit am Observatorium mit Ende Januar d. J. eingestellt. Im Auftrage des Gouvernements hat er sich in den folgenden Monaten mit der Einrichtung meteorologischer Stationen auf dem Archipel der Samoa-Inseln beschäftigt und gedachte im Mai d. J. Apia zu verlassen. Der abschließende Bericht über seine Tätigkeit steht noch aus. Die Bearbeitung der Ergebnisse seiner zweijährigen geophysikalischen Beobachtungen wird er erst nach seiner Rückkehr nach Deutschland beginnen können.

Im Februar d. J. weilte Dr. Bauer aus Washington kurze Zeit in Göttingen und nahm mit den Verwaltern des Observatoriums nähere Rücksprache über Kooperation der Arbeiten im Stillen Ozean. Er stellte in Aussicht eine geeignete Persönlichkeit, die zur Zeit sich auf den Fidschi-Inseln aufhält, für eine Reihe von Monaten auf Kosten seines Instituts nach Samoa zur Unterstützung Dr. Linke's zu senden, was von uns mit Dank angenommen wurde.

H. Wagner.

Bericht
über die ausgesetzten Preisaufgaben.

Für die auf das Jahr 1905 von der mathematisch-physikalischen Klasse gestellte Preisaufgabe ist keine Bewerbungsschrift eingegangen.

Die für das Jahr 1907 gestellte Preisaufgabe der philologisch-historischen Klasse lautet:

Die Gesellschaft verlangt eine Geschichte der antiken Commentare zu den Gedichten Hesiods, in Verbindung mit einer Untersuchung der wichtigsten Scholienhandschriften, die so weit geführt sein muß, daß der Plan einer wissenschaftlichen Ausgabe danach aufgestellt werden kann.

Die zur Bewerbung um den Preis bestimmten Arbeiten müssen vor dem 1. Februar 1907 an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften eingeliefert werden, mit einem Spruch versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und den Wohnort des Verfassers. Der Preis beträgt 1000 Mark.

Verzeichnis der im Jahre 1904/5 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Oeffentliche Sitzung am 30. April 1904.

Berichte, erstattet von den Herren Ehlers, Wagner, Klein, Leo.

Gedächtnißrede der Herren F. Merkel auf K. Gegenbaur, A. v. Koenen auf K. v. Zittel, F. Frensdorff auf L. Hänselmann, E. Schwartz auf Th. Mommsen.

Ordentliche Sitzung am 14. Mai 1904.

D. Hilbert legt vor: Ph. Furtwängler, Die Construction des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 173.)

Derselbe legt vor: L. Heffter, Ueber eine Definition des bestimmten Integrals im zweidimensionalen Gebiet. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 196.)

Derselbe legt vor: G. Prasad, Ueber den Begriff der Krümmungslinien. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 201.)

E. Schwartz legt vor: J. Geffcken, Die Acta Apollonii. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 262.)

F. Leo, Didymos περὶ Δημοσθένους. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 254.)

Ordentliche Sitzung am 11. Juni 1904.

G. Berthold legt vor: Untersuchungen zur Physiologie der pflanzlichen Organismen Bd. II, 1. Hälfte.

E. Riecke legt vor: E. Stark, Versuche über die Entstehung des Banden- und Linienspectrums. Mit 4 Textfiguren. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 205.)

F. Klein legt vor: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III 2, H. 2.

F. Kielhorn überreicht: List of inscriptions of southern India.

Ordentliche Sitzung am 25. Juni 1904.

F. Klein legt vor: Mathematische Encyklopädie V, 2 Heft 1.

D. Hilbert, Grundzüge einer Theorie der linearen Integralgleichungen. (Zweite Mitteilung.) (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 213.)

H. Minkowski, Dichteste gitterförmige Lagerung congruenter Körper. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 311).

F. Leo berichtet über die Jahresconferenz der Akademischen Commission für den Thesaurus linguae latinae in München am 12. und 13. Juni.

Ordentliche Sitzung am 9. Juli 1904.

E. Wiechert legt vor: H. Gerdien, Luftelektrische Messungen bei zwei Ballonfahrten. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 277.)

W. Nernst, Ueber die Bildung von Stickoxyd bei hohen Temperaturen. Mit 3 Fig. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 261.)

O. Wallach legt vor: W. Biltz, Ultramikroskopische Beobachtungen, I. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 300.)

Ordentliche Sitzung am 23. Juli 1904.

E. Schwartz, Theokrits Daphnis. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 285.)

Th. Liebisch, Ueber optisch zweiaxige Krystalle mit Drehungsvermögen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

F. Klein legt vor: L. Ambronn, Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen Heliometer der Sternwarte zu Göttingen. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: M. Brendel, Mondtheorie. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

W. Voigt legt vor: A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie. II. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 363.)

Derselbe legt vor: M. Laue, Ueber die Fortpflanzung der Strahlung in dispergirenden und absorbirenden Mitteln. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 480.)

Derselbe, Wirkung elektrischer Schwingungen auf optisch aktive Körper. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

E. Riecke, Evakuation Geißlerscher Röhren durch den elektrischen Strom. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 526.)

E. Wiechert legt vor: G. v. d. Borne, Seismische Registrirungen in Göttingen. Mit 1 Tafel. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904. S. 440.)

E. Wiechert legt vor: F. Lincke, Luftelektrische Messungen (Abhandlungen, math.-phys. Kl. III 5.)

D. Hilbert kündigt eine dritte Mitteilung über Theorie der Integralgleichungen an. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 29. Oktober 1904.

E. Riecke, Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geißlerschen Röhren. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 356.)

F. Klein legt vor: Mathematische Encyklopädie I 8 und II 1,5; ferner das 1. Heft der französischen Bearbeitung, publicirt von Molk.

D. Hilbert legt vor: A. Schoenflies, Geometrische Invarianten der Analysis situs. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 514.)

Derselbe legt vor: F. Bernstein, Bemerkung zur Mengenlehre. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 557.)

W. Voigt, Etwas über Tensoranalysis. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904 S. 495.)

E. Schwartz legt vor: R. Reitzenstein, Ein Stück hellenistischer Kleinlitteratur. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 309.)

Derselbe, Zur Geschichte des Athanasius, I. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 333.)

N. Bonwetsch legt vor: Band I des mit Unterstützung der Gesellschaft unternommenen Werkes von H. Lietzmann 'Apollinaris von Laodicea und seine Schule'.

F. Kielhorn legt vor: J. Jolly, Viśvarûpás Commentar zu Yâjñavalkya. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 402.)

E. Schröder macht Mitteilungen über die Gründung eines Verbandes der nordwestdeutschen Alterthumsvereine.

H. Wagner berichtet über den Stand des Samoa-Unternehmens und die Ausarbeitung der Ergebnisse der ostafrikanischen Pendelexpedition von 1898/1900.

Oeffentliche Sitzung am 5. November 1904.

J. Wackernagel, Ueber Sprachtausch und Sprachmischung.

Ordentliche Sitzung am 19. November 1904.

F. Andreas legt vor: F. Schulthess, Christlich-palästinische Fragmente aus der Omajjaden-Moschee zu Damaskus. Mit 4—5 Tafeln. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.).

F. Frensdorff, Studien zum Braunschweigischen Stadtrecht. Erster Beitrag. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905 S. 1).

Ordentliche Sitzung am 3. Dezember 1904.

E. Schwartz, Zur Geschichte des Athanasius, II. III. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 357.)

K. Dilthey legt das Werk 'Die Bau- und Kunstdenkmäler der Stadt Wolfenbüttel' von P. J. Meier (corr. Mitgl. der Gesellschaft) vor.

F. Frensdorff legt vor: A. Brackmann, Papsturkunden der Schweiz. Dritter Bericht der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte. Mit kritischen Excursen von P. Kehr und A. Brackmann. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 94.)

R. Pietschmann macht Mitteilungen über Bibliothekswesen in den Vereinigten Staaten.

Ordentliche Sitzung am 17. Dezember 1904.

E. Schwartz, Zur Geschichte des Athanasius, IV. V. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1904 S. 518).

E. Schröder, Das sogenannte Sesenheimer Liederbuch. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1905 S. 51.)

W. Voigt legt vor: G. Herglotz, Berechnung retardirter Potentiale. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1904. S. 549.)

Ordentliche Sitzung am 14. Januar 1905.

F. Klein legt das neueste Heft der Mathematischen Encyklopädie vor.

F. Leo legt das Protokoll der 2. Generalversammlung der Internationalen Association der Akademien vor.

Ordentliche Sitzung am 28. Januar 1905.

J. Wellhausen, Ueber den geschichtlichen Wert des 2. Buchs der Makkabäer. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

E. Schwartz, Zur Geschichte des Athanasius, V. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

N. Bonwetsch legt vor: K. Müller, Calvins Bekehrung. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

A. v. Koenen, Ueber Wirkungen des Gebirgdruckes im Untergrunde in tiefen Bergwerken. (Erscheint in den Nachrichten, math. phys. Kl.)

W. Nernst legt vor: Nernst und Schoenflies, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 4. Aufl.

Derselbe und v. Wartenberg, Dissociation des Wasserdampfs. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 11. Februar 1905.

F. Klein legt vor: C. Schwarzschild, Beiträge zur geometrischen Optik. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: W. Biltz, Weitere Beiträge zur Theorie des Färbevorganges. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 25. Februar 1905.

E. Schwartz, Zur Geschichte des Athanasius, VI. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

F. Leo, Der Saturnische Vers. (Erscheint in der Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

W. Nernst und v. Wartenberg, Dissociation der Kohlensäure. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

E. Wiechert, Bemerkungen zur Elektronenbewegung bei Ueberlichtgechwindigkeit. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: H. Schering, Erdbebenregistrirungen im Jahre 1904. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

D. Hilbert legt vor: C. Carathéodory, Allgemeines Problem der Variationsrechnung. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: L. Maurer, Differentialgleichungen der Mechanik. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe kündigt an: Zur Variationsrechnung. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

W. Voigt legt vor: M. Laue, Ueber die Fortpflanzung der Strahlung in dispergirenden und absorbirenden Mitteln, II. Mitteilung. (Erscheint in den Nachrichten, math.phys. Kl.)

W. Voigt legt vor: Happel, Ueber die Zustandgleichung für einatomige Körper. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: T. Tamaru, Bestimmung der piezoelektrischen Constanten von krystallisirter Weinsäure. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 11. März 1905.

F. Leo legt vor: A. Schulten, Numantia, mit 2 Karten. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

R. Pietschmann macht Mitteilungen aus Berichten von Dr. L. Borchardt über Ausgrabungen in Aegypten.

Zur Erinnerung an K. Höhlbaum und K. Koppmann.

Von

F. Frensdorff.

Die beiden Namen, denen meine Gedenkworte gelten, hat nicht erst die Gemeinschaft des Todes in demselben Zeitraum zusammengeführt. Sie dienten beide einer Wissenschaft, wirkten in demselben Arbeitsgebiete, waren aus einer Schule hervorgegangen, und die Beziehungen, die die Lehrjahre unter ihnen geknüpft hatten, haben für das ganze Leben Stand gehalten.

Karl Koppmann, der uns am 25. März 1905 entrissen wurde, war um zehn Jahre älter als Konstantin Höhlbaum, der am 2. Mai des vorigen Jahres starb, Koppmann war 1839, Höhlbaum 1849 geboren. Koppmann stammte aus Hamburg, Höhlbaum aus Reval. Beide waren Schüler von Georg Waitz; beide Theilnehmer der historischen Übungen, die für die Geschichte der Wissenschaft und des geschichtlichen Studiums in Göttingen von Bedeutung geworden sind. Für wie viele ihrer Theilnehmer wurden diese Jahre des Göttinger Aufenthalts bestimmend für ihr ganzes Leben! Nicht bloß daß sie hier arbeiten lernten, auch die Beziehung zu der großen Persönlichkeit, in die sie damals, in ihrer bildsamen Zeit traten, wirkte auf ihren Charakter, ihr ganzes Wesen für alle Zeit ein. Diese allgemeine Beobachtung gilt nicht zum wenigsten von den beiden Geschichtsforschern, die wir heute betrauern.

Ihr gemeinsamer Ausgangspunkt, die historischen Übungen Göttingens, verdienten einmal eine eingehende Schilderung. Es ist hier nicht der Ort dazu. Ich könnte sie auch nicht besser geben als mit den Worten, die Koppmann ihnen in einem Nach-

ruf für Hermann Hildebrand im J. 1890 gewidmet hat.[1]) Das Bezeichnendste war die Freiheit, die in den Übungen waltete. Die Studien der Mitglieder galten allen Theilen der deutschen Geschichte, überwiegend dem Mittelalter. Dank der zurückhaltenden Weise des Leiters entwickelte sich eine grosse Mannichfaltigkeit der Arbeiten. Jeder Individualität war freier Lauf gewährt. Es gab keine Einschränkung auf gestellte Themata. Jeder wählte sich selbst den Gegenstand seiner Forschung. Neben der Reichsgeschichte nach ihrer politischen wie nach ihrer rechtlichen Seite, auf die die Vorlesungen über deutsche Geschichte und Verfassungsgeschichte die Zuhörer hinwiesen, war es der Norden Deutschlands, aus dessen Vergangenheit sie ihre Aufgaben entnahmen. Ein großer Theil der Waitzschen Schüler stammte aus Norddeutschland. Der Kampf um Schleswig-Holstein, je unglücklicher sein Ausgang war, hatte einen unauslöschlichen Eindruck in den Gemüthern hinterlassen. Er wirkte auch in der Wissenschaft nach. Die großen Fragen der deutschen Nationalität hatten damals ihren ersten realen Ausdruck gefunden. Der praktisch-politische Gegensatz zu den nördlichen und östlichen Nachbarn lenkte die Aufmerksamkeit auf die historische Entstehung dieses Gegensatzes zurück. So war es nur natürlich, wenn auch die angehenden Historiker ihre Aufgaben aus der Geschichte des deutschen Nordostens wählten. Seine Besiedelung, die Anfänge seiner Cultur unter Leitung der Kirche, der Kampf gegen die Dänen, gegen das Slaventum, die Begründung der Städte, die Niederlassung des deutschen Ordens, die Verbindung der Städte mit einander durch das Recht und durch den Handel, die Begründung und Ausbreitung der Hanse und ihrer Seemacht: das war das grosse und anziehende Gebiet, dem sich die aufstrebenden jungen Geister zuwandten. Die Art, wie sie ihre Kräfte auf diesem Felde versuchten, konnte nur die sein, die ihr Lehrer durch Wort und noch mehr durch die That gezeigt hatte und zu zeigen nicht müde wurde. Die Erforschung des Sachverhalts aus den zuverlässigen Quellen ohne Voreingenommenheit, „nichts ut affecten“ wie es einmal ein Chronist des 16. Jahrh., Renner, ausgedrückt hat, nicht im Dienste einer Partei irgendwelcher Art, ohne Respect vor der bloßen Tradition, die nicht Stand hielt vor dem aus den alten und ursprünglichen Quellen Geschöpften: das waren die Kennzeichen der Methode, die die Arbeiten beherrschte. Eine besonders liebevoll gepflegte Richtung galt den

1) Mittheilungen aus der Geschichte von Liv- Esth- und Kurland Bd. 14. (Riga 1890) S. 502.

Quellen selbst. Sie nach Herkunft und Verzweigung zu untersuchen, das Eigene und das Abgeleitete zu sichten, die Quellen aus den handschriftlichen Schätzen der Bibliotheken und Archive womöglich zu mehren, in sauberen Editionen der wissenschaftlichen Benutzung zugänglich zu machen: eine Fülle von Arbeiten wird durch die Aufzählung dieser Rubriken in die Erinnerung gerufen. Auch ein großer Theil dessen, was unsere beiden Freunde in langer wissenschaftlicher Thätigkeit geleistet haben, fällt unter diese Gesichtspunkte.

Beide giengen von der Geschichte ihrer Heimat aus. Von da aus eroberten sie sich ihre Stellung in der Wissenschaft. Die Erforschung der hansischen Geschichte vereinte sie in einem Arbeitsgebiete. Kritische Untersuchungen und Quelleneditionen waren die Formen ihrer Thätigkeit. Zu größerer historischer Darstellung ließ keinen die mühevolle, unablässig fortgesesetzte Forscherthätigkeit gelangen. Beide waren organisatorische Naturen, und ihrem Triebe, gleichgesinnte und gleichgestimmte Persönlichkeiten zu historischer Arbeit zu vereinigen und das Publikum für diese Arbeit warm und wirksam zu interessieren, entsprach auf beiden Seiten ein reicher Erfolg. Beide haben auch eine Zeitlang in dem gleichen Lebensberuf gestanden und den wichtigen Aufgaben gedient, die den Archivaren für Wissenschaft und Leben zugewiesen sind.

Aber bei allem Gemeinsamen waren Höhlbaum und Koppmann sehr verschiedene Naturen. Koppmann war aus engen häuslichen Verhältnissen hervorgegangen. Erst spät fanden sich die Mittel zusammen, die ihm das Studiren ermöglichten. Er war schon 24 Jahr alt, als er die Universität bezog. Einige Jahre hatte er mit der Erlernung eines Handwerks verbracht. In seinem Arbeitszimmer hieng eine Uhr, die er als junger Mensch in einer Hamburger Werkstatt angefertigt hatte. Er las viel, und das weckte in ihm die Lust zum Studium. Anfangs Zögling einer Seminarschule, um sich zum Volksschullehrer vorzubereiten, nahm er zugleich Unterricht in Latein und Griechisch, so daß er 1862 in das akademische Gymnasium in Hamburg eintreten konnte. Dort hörte er die ersten historischen Vorlesungen. Die Vaterstadt mit ihrem regen Leben auf großem historischen Hintergrunde weckte seinen geschichtlichen Sinn. Christian Petersen, Vorstand der Hamburger Bibliothek und Professor am akad. Gymnasium, der so manchen jungen Mann zu fördern wußte, interessirte sich und andere für ihn, so daß er Ostern 1863 die Universität Göttingen beziehen konnte. Mußte er auch durch Privatstunden und Correcturen seinen be-

scheidenen Einnahmen nachhelfen, die Sorgen des Lebens haben ihn nie niedergedrückt, der Gedanke der Wissenschaft zu dienen, für die Wissenschaft zu arbeiten hat ihn immer wieder darüber empor gehoben.

Nach Beendigung seiner Universitätsstudien in Göttingen und Berlin promovirte er im Juni 1866 in Göttingen mit einer Dissertation, die die ältesten Urkunden des Erzbisthums Hamburg-Bremen, unter denen sich viel Fälschungen und Interpolationen finden, nach Entstehungszeit und Zusammensetzung untersuchte. Gleichzeitig begann er eine fleissige Mitarbeit an den Unternehmungen des Vereins für Hamburgische Geschichte, der ihn zu seinem ständigen Secretair machte. Die zahlreichen kleinen Publicationen bei Seite lassend, gedenke ich nur seiner Edition der Kämmereirechnungen der Stadt Hamburg, die in sechs Bänden in den Jahren 1869—92 erschienen und einen genauen Einblick in den Haushalt Hamburgs während zweier Jahrhunderte, von 1350—1554, gewähren. Daneben hatte Koppmann mit seiner Arbeit schon einen größern Schauplatz betreten. Die von König Maximilian II von Bayern ins Leben gerufene historische Commission hatte auf Antrag Lappenbergs eine Ausgabe der Recesse, der Abschiede der Hansetage, schon 1859 unter ihre Aufgaben aufgenommen. Der frühe Tod des Prof. Junghans, in dessen kundige Hand die Edition gelegt war, verzögerte die Ausführung, bis sich in Koppmann der rechte Ersatz fand. Im Herbst 1870 konnte der erste Band der Hanserecesse an die Öffentlichkeit treten. Um das Jahr 1430, das die Historische Commission als Endziel gesetzt hatte, zu erreichen, bedurfte es acht starker Quartbände, die Koppmann bis z. J. 1897 publicirte. Als er das Vorwort des letzten Bandes unterzeichnete und einen Rückblick auf die 28 Jahre warf, während deren er den ehren- aber auch mühevollen Auftrag der historischen Commission ausführte, durfte er sich das Zeugniß geben, die Arbeit, so gut er konnte, vollbracht zu haben. Er hatte aber mehr gethan, er hatte auch den Nachfolgern die Wege bereitet.

Während des größten Theils seiner Wirksamkeit lebte Koppmann ohne öffentliches Amt, von dem Ertrage seiner fleissigen Feder, die sich nie beikommen ließ über die Grenze der wissenschaftlichen Arbeit hinauszuschweifen. Erst 1884 wurde ihm das neubegründete Amt eines Archivars der Stadt Rostock übertragen, das er bis zu seinem Tode bekleidete.

Höhlbaum stammte aus einer wohlhabenden Kaufmannsfamilie. Schon auf dem Gymnasium durch seinen Lehrer Gotthard Hansen für das Studium der Geschichte gewonnen, bezog er jung die Hoch-

schule, im Sommer 1868 Dorpat, Herbst 1869 Göttingen, wohin ihn sein Dorpater Lehrer, Eduard Winkelmann, selbst ein Zögling Göttingens, gewiesen hatte. Schon seit Anfang der sechziger Jahre ist ein Zug junger Balten nach Göttingen wahrnehmbar. Der erste soll Herm. Hildebrand gewesen sein, dessen Vater aus der Göttinger Gegend stammte. Wie Hildebrand Göttingen um Waitzens willen aufsuchte, so auch die ihm nachfolgenden Landsleute. Es war schon die dritte, vierte Generation, die mit Höhlbaum nach Göttingen kam. So entschieden der landsmännische Typus in ihnen ausgeprägt war, so wenig bildeten sie eine abgeschlossene Gesellschaft. Ihr offener und fester deutscher Sinn führte sie mit den Studiengenossen, die dasselbe Fach ergriffen hatten, sich um das Katheder desselben Lehrers sammelten, zu enger, wissenschaftlicher und geselliger, Gemeinschaft zusammen. Es haben sich damals Freundschaften gebildet, die für das ganze Leben festgehalten haben. Die Mehrzahl jener jungen Deutschen aus den Ostseeprovinzen kehrte nach Beendigung ihrer Studien und in Göttingen vollzogener Promotion in ihre Heimat zurück. Zu der kleinen Zahl, die in Deutschland verblieb, gehörte wie sein Freund Goswin Freiherr von der Ropp, mit dem er gleichzeitig nach Göttingen gekommen und hier erst bekannt geworden war, Höhlbaum. Bei Höhlbaum wirkte dabei der Gegensatz des Deutschen gegen den Russen mächtig ein. In ihm pulsirte eine starke politische Ader. Der Zorn über die immer fortschreitende Unterdrückung der deutschen Cultur, die Adel und Bürgerthum in den Ostseeprovinzen so lange gegen das Russenthum aufrecht erhalten hatten, hätte ihn in der Heimat schwerlich zu einer Wirksamkeit gelangen lassen. Mit vollem Herzen, mit heller Begeisterung schloß er sich dem deutschen Reiche an, und dem großen Staatsmann, der den unsterblichen Gedanken der deutschen Einheit verwirklicht hatte, galt seine ungetheilte Bewunderung. Er war in der Zeit vor dem großen Kriege nach Deutschland gekommen, und es schien, als ob die ernste und entschlossene Stimmung jener Tage sich ihm für immer mitgetheilt hätte. Dabei soll ihm der Sinn für den Humor des Lebens durchaus nicht abgesprochen werden. Die Theilnehmer jener Feier, welche dem 25 jährigen Bestehen der historischen Übungen galt, werden sich mit Vergnügen des Historischen Gaudeamus erinnern, das er damals zusammenstellte.

Er war der Hauptorganisator jener Feier v. J. 1874, bei der sich eine große Zahl alter und junger Schüler um den verehrten Lehrer schaarte. Die Liste der Theilnehmer jenes Festes bezeichnet Höhlbaum als Herausgeber des Hansischen Urkundenbuches.

Es war ihm das Glück zu Theil geworden, alsbald nach Vollendung seiner Studien zu einer großen und anziehenden wissenschaftlichen Aufgabe berufen zu werden. In einer Zeit, wo mancher schwankt, wohin er sich mit seiner frischen Kraft wenden, wie er sie nutzbar und in würdiger Weise verwerthen soll, wurde ihm von der eben begründeten Organisation des Hansischen Geschichtsvereins die Herausgabe eines der großen von ihm geplanten Quellenwerke, des Hansischen Urkundenbuches, anvertraut. Der Verein wußte, an wen er sich mit seinem Vertrauen wandte. Höhlbaum hatte im Winter 71—72 in Göttingen promoviert, und als Gegenstand seiner Dissertation Joh. Renners livländische Historien gewählt. Das war ein glücklicher Griff nach einem vor kurzem in Bremen gemachten Funde. Johann Renner, Notar im bremischen Dienste, hatte gegen Ende seines Lebens „Liflendischer Historien negen boker" zusammengestellt, durch Interesse für das Land bewogen, in dem er seine Jugendjahre in Diensten des deutschen Ordens verlebt hatte. Was der Chronist bis zum Jahre 1582 aufgezeichnet hatte, ruhte fast dreihundert Jahre im Dunkel einer deutschen Bibliothek. Erst 1870 entdeckte der bekannte Reisende Joh. Georg Kohl, seit 1863 Bibliothekar seiner Vaterstadt, die Urschrift Renners in der Bibliothek der Museumsgesellschaft in Bremen. Das Anziehende des neuen Fundes lag zunächst darin, daß der Verfasser der Chronik ältere Quellen so benutzt hatte, daß sie sich aus seiner Arbeit rein herausschälen ließen. Das unternahm Höhlbaums Dissertation an einer aus dem 14. Jahrh. stammenden Reimchronik, als deren Vf Renner selbst den Priester Bartholomäus Hoeneke nennt. Da Renner „de rime hatte bleven laten" und seine Vorlage „historischer wise aver gesettet" hatte, so war es zwar nicht möglich die rhythmische Form wiederherzustellen, aber doch den historischen Gehalt zu retten. Mit dieser kritischen Untersuchung, der 1876 die Herausgabe der vollständigen Rennerschen Chronik unter Mitwirkung von Richard Hausmann folgte, führte sich Höhlbaum glücklich in die Wissenschaft ein. Gleichzeitig mit den chronikalischen Arbeiten begann er die Vorbereitung jener großen schon genannten Urkundenedition, die ihn jahrzehntelang beschäftigen sollte. Er war zu dem Zwecke nach Hamburg übergesiedelt, um hier durch Koppmann in die Arbeit eingeführt zu werden und mit ihm die Grenze zwischen Urkundenbuch und Recessen abzustecken.

Ich habe vorher der organisatorischen Thätigkeit der beiden Freunde gedacht. Der Vorgänger auf diesem Gebiete war Koppmann. Schon gegen den Ausgang seiner Universitätszeit hatte er

einen litterarischen Sammelpunkt der Studien geplant, die sich dem norddeutschen Städtewesen in der letzten Zeit immer zahlreicher und immer eindringender zugewandt hatten. Der Gedanke an eine Zeitschrift wurde erweitert zu dem eines Vereins mit jährlichen Versammlungen nach Art der Wandervereine, wie sie Philologen und Naturforscher seit langer Zeit kannten. Am 24. Mai 1870 fand in Stralsund eine hansische Erinnerungsfeier seltener Art Statt. Unter Theilnahme von Abgesandten Hamburgs Lübecks und Bremens wurde der Tag festlich begangen, an dem die Hanse vor 500 Jahren den Frieden von Stralsund in dem Kriege gegen Dänemark errungen hatte. Diese Versammlung benutzte Koppmann, um ihr den längst gehegten Plan eines Vereins vorzulegen, der sich die Förderung der Geschichte sowohl der Hanse selbst wie der den Hansestädten gemeinsamen Institutionen zur eigensten Aufgabe machen sollte. Der Antrag wurde beifällig aufgenommen und für Pfingsten des nächstfolgenden Jahres die constituirende in Lübeck zu haltende Versammlung verabredet. Zwischen dem Mai 1870 und Pfingsten 1871 lag der Krieg, lag die Wiederaufrichtung des deutschen Reiches. Koppmann war nicht wie Höhlbaum eine politisch gerichtete Natur. Ein so guter Deutscher und noch besserer Hamburger er war: unter den mancherlei Sorgen, die sein Leben bewegten, haben die um staatliche Dinge schwerlich einen Platz eingenommen. Aber der Aufschwung des politischen Lebens kam seinen wissenschaftlichen Plänen mächtig zu Hülfe. Zu der Förderung, die in den allgemeinen Verhältnissen lag, trat das einflußreiche Wort eines Mannes hinzu. Berathung von Statuten gehört zu den unvermeidlichen, aber auch unerquicklichen Beschäftigungen eines Vereins in seinen Anfängen. Diesmal erwies sie sich als überaus fruchtbar. Prof. Waitz von Göttingen erhob bei der Pfingstversammlung 1871 entschiedene Einsprache gegen die zu eng gefaßte Aufgabe des neuen Vereins. Es könne sich nicht darum handeln, die Zahl der lokalgeschichtlichen Vereine um ein neues Glied, das Genus der historischen Zeitschriften um eine neue Species zu vermehren. Ein hansischer Geschichtsverein müsse sich höhere Ziele stecken. Noch ruhten die werthvollsten Quellen zur Geschichte der Hanse und damit zugleich der Politik des deutschen und europäischen Nordens zerstreut und unbenutzt in den Archiven nicht nur der einst der Hanse angehörigen Städte, sondern auch der Nachbarreiche, mit denen die Hanse in Handelsverbindung stand. Wie die Hanse selbst, so dürfe auch die politische, die Handels-, die Rechts-, die Culturgeschichte die reichsten Erträge aus der Aufschließung dieser Quellen erwarten.

Diese Schätze zu heben und zu sammeln gehe hinaus über die Kräfte eines Vereins von Privaten. Wolle der Verein wahren Nutzen stiften, so müsse er das Interesse aller der Städte für sein Unternehmen wach rufen, die einst dem Bunde der Hanse angehörten, und sich ihre regelmäßige Unterstützung für seine Arbeiten zu verschaffen suchen.

Diese Anregung schlug durch. Sie gab dem Verein centrale Aufgaben und brachte ihn in Zusammenhang mit den großen und kleinen Gemeinwesen, deren Bürger dereinst unter dem Schutz der hansischen Freiheiten Handel und Seefahrt betrieben. Die von jenem Lübecker Tage ausgehende Aufforderung war in jeder Beziehung erfolgreich, nach der wissenschaftlichen Seite hin wie nach der der materiellen Dotation. Der Verein übernahm die Fortführung der Hanserecesse von dem Zeitpunkt an, den die Münchener Commission als ihr Endziel bestimmt hatte. Es waren das die hundert Jahre von 1430—1530. Ihre Bearbeitung und Herausgabe ist dann in zwei Abtheilungen durch die Professoren v. d. Ropp und Dietrich Schäfer erfolgt. Ein Zeichen dafür, wie sehr der Stoff mit den Jahren wächst, ist es, daß die zweite, von 1431 bis 1477 reichende Abtheilung sieben Bände erforderte, die dritte, noch nicht abgeschlossene in ihrem eben ausgegebenen siebenten Bande das Jahr 1521 erreicht hat. Neben der Ausgabe der Recesse unternahm der junge Verein eine Sammlung der Urkunden der Hanse. Knüpfte das Werk auch an die einst von Sartorius und Lappenberg edirte Urkundliche Geschichte des Ursprungs der Hanse, so faßte Höhlbaum den Plan doch in einem viel weitern Sinne, revidirte das bisherige Material und sammelte neues und schuf in den drei Bänden, die er in den J. 1876—1886 veröffentlichte, eine reiche die Zeit bis 1350 umfassende Publication, die in Anlage und Durchführung sich so musterhaft erwies, daß die Fortsetzungen von Dr. Kunze und Prof. Stein sich Höhlbaum ebenso anschließen konnten, wie die zweite und dritte Abtheilung der Recesse der ersten. Seine organisatorische Begabung bethätigte Koppmann auch in der Art und Weise, wie er das Organ des neuen Vereins redigirte. Die seit 1871 jährlich erscheinenden „Hansischen Geschichtsblätter“ hatten nie über Mitarbeiter oder Mangel an Stoff zu klagen. Die Persönlichkeit des Redacteurs, der stets mit gutem Beispiele vorangieng, erwies sich als ein lebendiger Mittelpunkt, und jeder neue Jahrgang legte den Lesern einen interessanten und wechselnden Inhalt vor.

Höhlbaum fand Gelegenheit, sein organisatorisches Talent zu bewähren, als er im J. 1880 die Stellung eines Göttinger Privat-

docenten mit der eines Archivars der Stadt Köln vertauschte. Die große rheinische Stadt mit ihrem reichen Archiv, das schon lange als eine Schatzkammer der hansischen Geschichte und Politik galt, gewährte die schönste Unterlage für das gedeiliche Wirken eines Historikers. Höhlbaums Vorgänger, Ennen, hatte viel aus dem Archiv publicirt, das überwiegend der Geschichte der Stadt Köln zu Gute gekommen war. Aber die erste an den Archivar zu stellende Forderung war noch nicht erfüllt. Das Archiv entbehrte der Ordnung. Höhlbaum ließ es sich vor allem angelegen sein, nach dieser Seite hin zu wirken. Er wußte die Stadtverwaltung für die Sache zu interessiren. Sie bewilligte die Mittel, um Hülfskräfte zu gewinnen, die Räume, die zur planmäßigen Unterbringung der Archivalien erforderlich waren, und frischen Mutes begann Höhlbaum in den „Mittheilungen aus dem Kölner Stadtarchive" die gelehrte Welt über die Bestände der großen Sammlung zu unterrichten. Er verstand es von dem Eifer, der ihn selbst beseelte, andern mitzutheilen, und unter den reichen und intelligenten Bürgern von Cöln fand er bald den, der am bereitwilligsten war, sein warmes Interesse und seine großen Mittel den historischen Studien zu Gute kommen zu lassen. Auf Gustav Mevissen gestützt, regte Höhlbaum die Stiftung der Gesellschaft für Rheinische Geschichtskunde an, eines Vereins von centraler Stellung ähnlich wie der Hansische, dem die reichen Corporationen und zahlreiche Notable des Landes ihre Unterstützung gewährten. Unter den mannichfaltigen Publicationen, die der thatkräftige junge Verein unternahm, befindet sich von Höhlbaums Hand die Ausgabe der beiden ersten Bände des Buches Weinsberg, Privatdenkwürdigkeiten eines Kölner Bürgers des 16. Jahrh., (1886—87).

So großer Erfolge sich auch Höhlbaum in seiner Kölner Stellung berühmen durfte, der Wunsch zur Universität zurückzukehren hatte ihn nie verlassen. Nach zehn Jahren gieng er in Erfüllung. 1890 erhielt er eine Professur der Geschichte in Gießen. In diesem Amte, das er bis zu seinem Tode bekleidete, bewährte er sich durch Vorlesungen wie durch die Leitung von Übungen, jüngere Historiker in die Archivarbeit, das Sammeln und Sichten der Materialien, die zweckmäßige Einrichtung urkundlicher Editionen einführend. Neben der Weiterführung des Hansischen Urkundenbuches, die er in die Wege leitete, wurde von ihm noch eine neue Serie hansischer Publicationen angeregt und ausgeführt. Es sind das die Inventare Hansischer Archive, bestimmt zur Registrirung des urkundlichen Materials von der Zeit ab, die die Ausgabe der Recesse als ihren Endpunkt gesetzt hat. In den J. 1896 und 1903

sind die beiden von Höhlbaum unter der Mitwirkung von Dr. Keussen in Köln edirten Bände, welche die Kölner Archive von 1531—1591 ausbeuten, jeder mit einem Aktenanhang ausgestattet, erschienen.

Die Professur in Gießen hatte Höhlbaum in noch engere Beziehung zu den süd- und westdeutschen Gebieten und ihrer Geschichte gebracht, als das in Köln der Fall war. Neben der festgehaltenen Arbeit für die Hanse trat die für das Rheingebiet. Auch hier hat Höhlbaum sich nicht an dem Vorhandenen genügen lassen, sondern neue wissenschaftliche Organisationen theils angeregt theils durch seine Mitwirkung unterstützt. Aus dem Mehrfachen, was hier zu erwähnen wäre, führe ich nur seine Bemühung an um die Fortsetzung der Regesten der Mainzer Erzbischöfe. Ihre Edition hatte seit dem J. 1886 geruht und die Reihe nur bis z. J. 1288 gefördert. Durch Höhlbaum wurden die Administratoren des Böhmerschen Nachlasses in Frankfurt bestimmt, die Weiterführung in die Hand zu nehmen, und durch ihn auch die jungen Gelehrten gewonnen, die sich der Aufgabe unterzogen. Seine letzte größere Arbeit war der Periode der Reichsgeschichte entnommen, in welcher die Leitung der Reichspolitik in der Hand der rheinischen Kurfürsten lag. Die in unsern Abhandlungen 1903 erschienene Arbeit über den Kurverein von Rense zeigte ihren Verfasser auch auf diesem Gebiete als einen Historiker von eindringender Combinations- und wissenschaftlicher Darstellungsgabe. Sein offenes Auge und sein rühriger Geist ließen ihn überall Lücken in der geschichtlichen Erkenntniß wahrnehmen, die er zur Aufsteckung neuer Arbeitsziele benutzte. In der letzten Vorstandssitzung des Hansischen Geschichtsvereins, der er beiwohnte, machte er auf das Bedürfniß aufmerksam, die Inventarisirung des hansischen Materials über die Archive der Hansestädte hinaus auf die außerdeutschen Länder zu erstrecken, die mit der Hanse in Verbindung standen. Um dieselbe Zeit legte er der Centraldirection der Monumenta Germaniae historica den Plan vor, die politischen Denk- und Staatsschriften des 14. Jahrhunderts zu sammeln und zu ediren. Es war die letzte Freude, die ihm das Leben bereitete, die Billigung dieses Planes zu erfahren. Er wäre der erste gewesen, der an die Ausführung Hand angelegt hätte. Wenn er Pläne wie diese anregte, so wußte er wohl, wen zumeist die Last der Arbeit treffen würde. Mit demselben Nachdruck, mit dem er seine Anträge vorzubringen pflegte, gieng er an die Ausführung. Er hat sich oft in seinem Leben zu viel zugemuthet und wiederholt ausspannen müssen. Sein eiserner Wille überwand

Ernst Abbe.

Von

W. Voigt.

Am 14. Januar dieses Jahres starb in Jena Ernst Abbe, Ehrenmitglied unserer Gesellschaft seit deren Jubiläum vom Jahre 1901.

Die Ehrenmitgliedschaft ertheilt nach ihrem Statut die Gesellschaft Männern, die (in erster Linie) durch die Förderung wissenschaftlicher Arbeit ausgezeichnet und hierdurch der Gesellschaft bei der Erreichung ihrer Ziele behülflich sind.

In dem schönsten und idealsten Sinne war diese Bedingung bei Abbe erfüllt, denn auch seine eigenen rein wissenschaftlichen Untersuchungen haben fast durchweg sich der Vervollkommnung und Verfeinerung der Hilfsmittel wissenschaftlicher Arbeit Anderer auf den verschiedensten Gebieten überaus förderlich erwiesen.

Vielleicht ist es angebracht, in der gegenwärtigen Periode wechselsweise freundlicher und feindlicher Beziehungen zwischen Wissenschaft und Technik den Versuch einer Würdigung des Abbeschen Lebenswerkes vor einem gemischten Hörerkreis mit einer allgemeinen Bemerkung über die Wissenschaft der Technik — wie ich dieselbe wenigstens verstehe — einzuleiten.

In verwirrender Buntheit, durch das Zusammenwirken der heterogensten Umstände complicirt, stellen sich uns die Erscheinungen dar, welche die umgebende Natur uns von selbst bietet, und ihre directe denkende Betrachtung hat, wie die Geschichte der Wissenschaft zeigt, äußerst wenig allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu erschließen erlaubt. Das Eindringen in ihre geheimen Gesetze gelang erst, als Galilei und seine Schüler das Experiment, d. h. die Herstellung von Naturerscheinungen unter künstlich ver-

einfachten Umständen, einführten und systematisch benutzten, — und das Experiment ist dann in den seither verflossenen fast drei Jahrhunderten ein unvergleichlich fruchtbares Hülfsmittel der Forschung geblieben.

Aber nach Gewinnung der fundamentalsten Gesetze in verschiedenen Gebieten der Physik besann sich die Wissenschaft auf ihren Ursprung, auf die Fragen, die den Menschengeist zuerst zur naturwissenschaftlichen Forschung angeregt hatten, und sie wandte sich erneut der Untersuchung derjenigen Vorgänge zu, die die Natur von selbst hervorruft. Die Geophysik ist diejenige Disciplin, in deren Problemen die geschilderte Wendung am deutlichsten zum Ausdruck gelangt. Hier handelt es sich nicht um Experimente des Laboratoriums, deren Bedingungen wir in der Hand haben, sondern um Erscheinungen, die der Beobachter im Allgemeinen nicht beeinflussen kann.

Aber Naturerscheinungen gehen auch da vor sich, wo der Mensch die Naturkräfte zu praktischen Zwecken in Anspruch nimmt, und die in den Maschinen und Hülfsmitteln der Technik sich abspielenden Vorgänge sind bis zu einem gewissen Grade ebenso gegebene, wie die in der freien Natur zu Stande kommenden, denn sie sind bestimmt nicht durch die Gesichtspunkte der Beobachtung, sondern die der praktischen Wirksamkeit. Ihre Untersuchung zum Zwecke der allseitigen Aufklärung, der Einordnung und Unterordnung in die erkannten und bewährten allgemeinen physikalischen Gesetze ist wissenschaftliche Arbeit, auch wenn die Resultate derselben (nämlich das vertiefte Verständniß der Vorgänge) sich zur Erleichterung, Verbesserung, ja Verbilligung technischer Betriebe nützlich erweisen sollten. Letzteres spricht ebenso wenig gegen die Wissenschaftlichkeit der Probleme, wie z. B. der Umstand, daß Marconi die Resultate der Hertzschen Entdeckungen zur drahtlosen Telegraphie verwerthete, den hohen wissenschaftlichen Werth der Hertzchen Forschungen herabsetzt.

Freilich, wo nicht die Erweiterung und die Vertiefung des Verständnisses Ziel und Leitstern der Arbeit sind, sondern nur Einzelthatsachen, die geeignet scheinen, praktische Vortheile zu bringen, wird man ihr den Ehrennamen der Wissenschaft nicht gönnen mögen, benutze sie auch deren glänzendstes Rüstzeug. —

In das Gebiet dieser Wissenschaft der Technik, wie ich sie soeben geschildert habe, gehören nun die epochemachenden Forschungen Abbes über das Mikroscop. Das Mikroscop rangirt hier, so seltsam dies klingen möge, direct neben der Dampfmaschine.

So wenig letztere construirt ist, um die Umwandlungen des Dampfes bei einem gewissen Proceß zu studieren, so wenig ist das Mikroscop zur Beobachtung des Verlaufes von Lichtstrahlen in einem System durch Kugelflächen begrenzter Medien erfunden. Beide Apparate verwenden physikalische Vorgänge zu technischen Zwecken und sind für solche gebaut. Bei beiden ist die erste Construction aus einer allgemeinen, aber ganz unvollständigen, ja in wesentlichen Punkten unrichtigen Vorstellung über die Wirkungsweise dieser Vorgänge entsprungen und ein Jahrhundert hindurch oder länger allein nach rohen allgemeinen Erfahrungen tastend von Schritt zu Schritt verbessert worden. Erst in neuester Zeit hat sich die Theorie der beiden Apparate angenommen. —

Abbes Entwickelungsgang weist viel mehr auf abstracte, als auf practische Ziele hin. Nach einer Studienzeit in Jena (1857 bis 1859) und Göttingen (1859—1860), wo insbesondere W. Weber und B. Riemann ihn anzogen, promovirte er — kaum zwanzigjährig — an letzterem Orte mit einer Abhandlung über „die erfahrungsmäßige Begründung des Satzes von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit". Darnach war er ein Semester Assistent an der Göttinger Sternwarte, zwei Semester Docent des Physikalischen Vereins in Frankfurt a. M. und habilitirte sich 1863 mit einer Schrift „über die Gesetzmäßigkeit in der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen" an der Universität Jena.

Die geringe Zahl der Lehrer exakter Wissenschaften an dieser Hochschule ließ eine zugleich in Breite und Tiefe gehende Wirkung nur bei großem Arbeitsaufwand des Einzelnen zu Stande kommen, und in der Absicht und Hoffnung, etwas von dem hochgesteigerten wissenschaftlichen Leben des damaligen Göttingen nach Jena zu verpflanzen, hat Abbe in den ersten Decennien seines Jenenser Aufenthaltes in ganz ungewöhnlicher Stundenzahl Vorlesungen über die verschiedensten Kapitel der reinen Mathematik, der experimentellen und der theoretischen Physik gehalten, daneben auch nach Göttinger Vorbilde practische Uebungen in der Physik veranstaltet.

Wurde er durch die experimentell-physikalischen Uebungen und Collegien von selbst tiefer in die physikalische Praxis eingeführt, so würde ihn dieser Weg dennoch kaum zu der Wissenschaft der Technik geleitet haben, wenn nicht der Universitätsmechaniker Carl Zeiß, der im Bau von Mikroscopen mit Erfolg thätig war, ihm den unbefriedigenden Zustand zur lebhaften Anschauung gebracht hätte, in dem sich damals das Verständniß,

resp. also die Theorie der im Mikroscop stattfindenden Vorgänge befand.

Zeiß wandte bei seiner Fabrikation die damals allein geübte Methode an, Fortschritte durch Herumbessern an erprobten Mikroscoptypen zu suchen, bei welcher Operation nur einige allgemeine Erfahrungssätze leitend und glückliche Einfälle in letzter Instanz entscheidend waren. Er fühlte sich von diesem Verfahren aber wenig befriedigt und glaubte, daß allgemeine theoretische Gesetze auffindbar sein müßten, nach denen sich die Wirkung der Aenderung irgend eines der im Mikroscop zusammenwirkenden Elemente im Voraus bestimmen ließe.

Theorien optischer Instrumente existierten nun zwar bereits, insbesondere war diejenige des Fernrohres durch Fraunhofer u. A. ziemlich durchgearbeitet. Aber bei dem Mikroscop handelte es sich um ein besonders schwieriges Problem, für dessen Behandlung nur erst Ansätze von zweifelhaftem Werth vorhanden waren.

Fernrohr und Mikroskop stellen sich gleicher Weise die Aufgabe, innerhalb des Empfindlichkeitsbereiches des Auges treue und richtige Abbilder von Gegenständen zu liefern; bei beiden giebt die ideal einfache Construction oder Urgestalt des Apparates Abweichungen von dieser Forderung, bei beiden sucht man durch analoge Hilfsmittel, Combination von Linsen geeignet gewählter Gestalt, Glassorte, Anordnung, die Fehler unter die Grenze des dem Auge Wahrnehmbaren herabzudrücken. Aber bei dem Fernrohr sind selbst in der Urgestalt diese Fehler sehr klein, da hier nur sehr feine Strahlenbündel von wenigen Grad Oeffnung von dem fernen Object ausgehend im Objektiv aufgefangen werden; bei dem Mikroscop sind sie sehr groß, da dessen Objectiv, dem Object ganz nahe gebracht, Strahlenkegel von außerordentlicher Größe aufnimmt, aufnehmen muß, wenn anders überhaupt eine merkliche Lichtstärke zu Stande kommen soll.

Hiermit hängt zusammen, daß sogar die Methode theoretischer Behandlung, die bei dem Fernrohr zum Ziele führt, beim Mikroscop vollständig versagt. Die Annäherungen und Vernachlässigungen, die im ersten Falle zulässig sind, werden im zweiten unbrauchbar; strenge Formeln sind an sich erhältlich, aber von unübersehbarer Complication.

In langer mühevoller Arbeit hat Abbe zunächst die physiologische Seite des Problems erledigt, experimentell festgestellt, welche Art und Größe der Abbildungsfehler dem menschlichen Auge unmerklich sind, hierauf nach einer eigenen „geometrischen“ Methode zusammengesetzte Objectivsysteme im Voraus berechnet,

die bestimmte Leistungen in der angegebenen Richtung liefern sollten, und diese Leistungen durch eine Beobachtung geprüft.

Aber diese Prüfungen wollten keineswegs immer die Voraussagen der Theorie bestätigen; es traten Widersprüche hervor, die um so unerklärlicher schienen, als die Theorie selbst keine andern physikalischen Sätze, als die überall bestätigten elementaren Gesetze der Strahlenbrechung benutzte.

Und eben diese Grundlagen mußten falsch sein. Eine neue mühsame Experimentaluntersuchung, bei der immer wieder die Wirkungen der Aenderung eines Elementes des Mikroscopes nach Theorie und Beobachtung verglichen wurden, führte Abbe um 1870 zu der Entdeckung, daß bei Objecten von feinster Textur, deren Sichtbarmachung ja eine der Hauptaufgaben des Mikroscopes ist, die alte Dioptrik, die mit geradlinig fortgepflanzten und regelmäßig gebrochenen Strahlen und Strahlenbüscheln operirt, überhaupt im Stiche läßt. Die elementaren dioptrischen Gesetze werden bei der Fortpflanzung des Lichtes von der Lichtquelle durch das feinorganisirte Object nach dem Objectiv hin ebenso wenig erfüllt, wie bei der Fortpflanzung des Lichtes von einer Straßenlaterne durch von Nebel erfüllte Luft zum Auge, wo bekanntlich eigenartige Farbenringe auftreten, die mit den Gesetzen der gewöhnlichen Dioptrik im Widerspruch sind.

Jeder Strahl, der von der Lichtquelle aus das unter dem Mikroscop liegende Object durchsetzt, wird durch sogenannte Beugung in ein, im Allgemeinen farbige Theile enthaltendes Büschel von Strahlen zerfasert, und es erwies sich nach den Abbeschen Untersuchungen von größtem Einfluß auf den Effect, ein wie großer und wie begrenzter Bruchtheil dieses Büschels von dem Objectiv des Mikroscopes aufgefaßt und in das Auge geleitet wird. Zum drastischen Nachweis dieser Gesetzmäßigkeiten construirte Abbe Vorrichtungen, durch welche von diesem gebeugten Strahlenbündel bestimmte Partien abgeblendet werden konnten, und es ergaben sich bei Veränderung dieser Partien nicht nur stärkste Aenderungen in der Deutlichkeit und Reinheit des Bildes, sondern sogar vollständige Fälschungen desselben, z. B. derart, daß für die Betrachtung durch ein Mikroscop mit geeigneten Blenden ein Gitter von rechtwinklich sich kreuzenden Linien als eine einfache Schaar diagonal verlaufender Linien erscheint. Die Demonstration dieser wunderbaren Wirkungen, die Abbe lange nach seiner Entdeckung, nämlich im Jahre 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle vornahm, wird allen damals Anwesenden unvergeßlich sein.

Durch die geschilderte Entdeckung wurde ein bisher vollständig unbeachteter Umstand der Mikroscopwirkung klargestellt, und der Gewinn, den die Wissenschaft direct und indirect hiervon gehabt hat, ist sehr erheblich.

Für die Mikroscop technik ergaben sich aus ihr die wichtigsten Directiven. Insbesondere zeigte die Abbesche Beugungstheorie des Mikroscopes einerseits die Nothwendigheit, zu möglichst vollkommener Abbildung auch eine möglichst vollkommene Aufnahme des ganzen gebeugten Strahlenbüschels durch das Objectiv zu bewirken, andererseits, da hier gewisse unüberschreitbare Grenzen gezogen sind, die Unmöglichkeit, auch mit dem vollkommensten Instrument Texturen, die eine gewisse Feinheit überschreiten, sichtbar zu machen. Die Grenze, welche auch ein ideales Mikroscop nicht überschreiten kann, ist die Trennung zweier Theile des Objectes, die einander näher sind, als die Hälfte der Wellenlänge des benutzten Lichtes, d. h. also rund 0,0003 mm. Die Bilder dieser Theile werden stets in einander verfließen, so vollkommen das Instrument, so stark die Vergrößerung auch sein möge.

Diese an sich höchst bedeutungsvolle Erkenntniß ist practisch deshalb so außerordentlich wichtig, weil sie die Aussichtslosigkeit zeigt, durch Steigerung der Vergrößerung Fortschritte in der Leistung eines Mikroscopes über eine bestimmte Grenze hinaus zu erzielen, und gebieterisch auf den einzigen Weg zur Vervollkommnung des Instrumentes weist, der gangbar ist, nämlich innerhalb der erreichten, vernünftigen Vergrößerungen die möglichste Beseitigung der Unvollkommenheiten der Abbildungen zu erstreben.

Hierfür sind insbesondere zwei Elemente verfügbar: die geometrische Configuration, also Gestalt und Anordnung der Linsen, und die physikalischen Eigenschaften, also Brechung und Farbenzerstreuung der verwandten Glassorten.

In beiden Richtungen gelang es Abbe, der Technik Hilfsmittel für wesentliche Fortschritte zur Verfügung zu stellen. Die Ausbildung eines von Fraunhofer herrührenden Verfahrens, welches die Regelmäßigkeit einer kugeligen Begrenzungsfläche mit Hülfe der Lichtwellen selbst bis auf den Betrag eines Bruchtheiles einer solchen (also auf einige Zehntausendstel eines Millimeters) festzustellen gestattet, und eine Reihe geistvoller Meßinstrumente, waren das erste. Viel wesentlicher aber und epochemachender war ein zweites.

Die erfolgreiche Anwendung der von der Theorie für die

Construction optischer Instrumente gegebenen Regeln verlangt die Verfügbarkeit von durchsichtigen Stoffen, insbesondere Glasarten mit nach verschiedenen Hinsichten verschiedenen optischen Eigenschaften, welche die Technik damals entfernt nicht bot. Die Schaar der im Handel erhältlichen Gläser war von so verwandter Natur und in ihrem optischen Verhalten derart nur quantitativ von einander abweichend, daß man gewohnt war, sie überhaupt nach einem Merkmal, das mit dem optischen Verhalten direct gar nichts zu thun hat, nämlich nach ihrem specifischen Gewicht zu characterisiren.

Schon wenige Jahre nach seiner oben geschilderten Entdeckung, nämlich im Jahre 1874, wies Abbe die Fabrikanten auf das hier vorliegende Bedürfniß der Technik nach Glasarten von abweichenden optischen Eigenschaften hin — ohne Erfolg —, das geringe Quantum Glas, was die Mikroscopindustrie consumirt, schien keine kostspieligen Experimente zu lohnen. In dem höchst interessanten Bericht über die Mikroscope auf der Londoner internationalen Ausstellung vom Jahre 1876, der auch einen Abriß seiner Theorie enthält, suchte dann Abbe gelehrte Körperschaften für sein Problem zu interessiren — gleichfalls ohne Erfolg. Aber dieser erneute Appell fand Gehör bei einem jungen Glastechniker, Dr. Otto Schott in Witten, der über den geringen zunächst zu erwartenden Erfolg hinweg auf die große wissenschaftliche und technische Bedeutung des Problems zu sehen vermochte. 1881 begann Schott nach mit Abbe vereinbartem Plane die Herstellung von Glassorten mit verschiedener Zusammensetzung, 1882 siedelte er nach Jena über, um in directer Wechselwirkung mit Abbe weiter zu arbeiten, und bald darauf nahm die Fabrikation, unterstützt durch einen von dem preußischen Unterrichtsministerium gewährten namhaften Zuschuß, einen hoffnungsvollen Aufschwung.

Abbe hob auch hier das Problem sofort auf eine wissenschaftliche Höhe. Er veranlaßte die systematische Untersuchung der Wirkung der Zusammensetzung auf die verschiedenen physikalischen Eigenschaften der hergestellten Glassorten, die unsere Kenntnisse dieser so überaus wichtigen Materialien nach Seite des optischen, thermischen, elastischen Verhaltens wesentlich erweitert und theilweise zu bemerkenswerth einfachen Gesetzen geführt hat. Durch diese Untersuchungen ist man z. B. soweit gelangt, daß man die Zusammensetzung eines Glases von gewünschten Eigenschaften bis zu einem gewissen Grade im Voraus berechnen kann, was wissenschaftlich ebenso interessant, als technisch nützlich ist.

Wie sich das Zeiß-Schottsche Unternehmen unter Abbes wissenschaftlicher und organisatorischer Leitung entwickelt hat, kann hier nicht ausführlicher geschildert werden. Ein warm und lebendig gehaltener Bericht des Jenenser Professors Auerbach vom Jahre 1904 über die Geschichte des Zeiß-Werkes giebt eine lebendige Anschauung von der Erweiterung der bearbeiteten Probleme fast über das ganze Gebiet der technischen Optik, über die Fülle der von der Firma neuconstruirten Instrumente, die sämmtlich nach theoretischer, wie nach technischer Seite meisterlich durchgebildet sind, über die in gewaltiger Progression stattgehabten Erweiterungen nach Seiten der Zahl der Angestellten, des Umfangs der Baulichkeiten, der Größe des Umsatzes. Und wer das Ansehen der Zeiß-Schottschen Werke in der großen wissenschaftlichen Welt, den Schatz, den unser Vaterland an dieser Abbeschen Schöpfung besitzt, recht erkennen will, der braucht nur die Artikel zu lesen, mit denen ausländische wissenschaftliche Zeitungen seine Entfaltung begleitet haben; insbesondere sind einige Aufsätze der Nature ebenso durch die rückhaltlose Anerkennung des in Jena Geleisteten, wie durch die leise Klage, daß Abbe die englische optische Industrie aus der beherrschenden Stellung verdrängt habe, überaus eindrucksvoll.

Liegt aber ein näheres Eingehen auf die großartige Entwickelung der Zeiß-Schottschen Werke dem Zweck dieser Gedächtnißworte fern, so müssen wir doch auf eine bisher noch nicht berührte Seite der Thätigkeit Abbes eingehen, die mit dieser Entwickelung im engen Zusammenhang steht.

Eine erfreuliche und wünschenswerthe Bethätigung jenes „Interesses für wissenschaftliche Forschung“, von dem der die Ehrenmitglieder betreffende Abschnitt unseres Statutes redet, ist die pecuniäre Unterstützung wissenschaftlicher Arbeit. Wer wüßte und spräche nicht von den gewaltigen Zuwendungen, welche die Hundert- und Tausendmillionäre jenseits des Oceans wissenschaftlichen Instituten machen. Aber von diesen löblichen Thaten, die den so Ueberreichen keinerlei Opfer auferlegen, hin zu dem stillen Wirken Abbes ist ein Schritt hinauf in eine reinere und höhere Sphäre.

Nach dem Tode von Carl Zeiß und dem Ausscheiden seines Sohnes ging (1889) das Zeißsche Unternehmen mit seinem Antheil an den Schottschen Glaswerken in den alleinigen Besitz von Abbe über. Ein stolzes Besitzthum, dessen Werth auf Millionen zu schätzen war.

Abbe entäußerte sich seines Besitzes vollständig, er bildete

aus dem Unternehmen eine Gesellschaft, in der er, neben Andern, Angestellter war, und zwar Angestellter mit einem Gehalt, der im Vergleich mit seinen Leistungen für die Gesellschaft dürftig genannt werden muß. Was zuvor als Unternehmergewinn den Besitzern zufiel, kommt jetzt einerseits der materiellen und ideellen Hebung der Lage der Angestellten und Arbeiter, und andererseits den wissenschaftlichen Instituten der Universität Jena zugut.

In den Statuten der Carl Zeiß-Stiftung — welchen Namen Abbe dem gesellschaftlichen Unternehmen gab — finden sich auf dessen Ziele bezüglich die folgenden Sätze. Es wird bezweckt

„Dauernde Vorsorge für die wissenschaftliche Sicherung des genannten Unternehmens, sowie Erhaltung und Weiterbildung der in ihnen gewonnenen industriellen Arbeiterorganisationen, als der Nahrungsquelle eines zahlreichen Personenkreises und als eines nützlichen Gliedes im Dienste wissenschaftlicher und practischer Interessen; Erfüllung größerer socialer Pflichten, als persönliche Inhaber dauernd gewährleisten würden, gegenüber der Gesammtheit der in ihnen thätigen Mitarbeiter, behufs Verbesserung ihrer persönlichen und wirthschaftlichen Rechtslage.

Förderung allgemeiner Interessen der Zweige feintechnischer Industrie im eigenen Wirkungskreis der Stiftungsbetriebe, wie außerhalb desselben; Bethätigung in gemeinnützigen Einrichtungen und Maßnahmen zugunsten der arbeitenden Bevölkerung Jenas und seiner nächsten Umgebung; Förderung naturwissenschaftlicher und mathematischer Studien in Forschung und Lehre.“

Eine nüchterne geschäftsmäßige Aufzählung von Aufgaben, kalt und klar, würdig eines Vertreters der exactesten Wissenschaften. Aber welche hehre Auffassung von den Pflichten des Menschen, die um so höher steigen, je höher seine Begabung und seine Erfolge wachsen, welche Herzenswärme und welche Selbstlosigkeit predigt diese Abbesche Stiftung.

Theoretisches Vermögen, technische Erfahrung, geschäftliche Umsicht in seltener Vereinigung mit frischester Arbeitskraft haben einen Mann zu einem großen Besitz geführt, der nach seiner innewohnenden Triebkraft sich selbstthätig noch gewaltig zu mehren verspricht. Aber das Recht an diesem Besitz gehört nach einem höheren, als dem geschriebenen Gesetz nicht jenem Einzelnen, so groß und maßgebend auch sein Antheil an dessen Erwerbung sein möge; es gehört der Gesammtheit derer, inmitten welcher und unter deren Mitwirkung die großen Erfolge errungen sind. Und

die Bethätigung dieser Lehre erfolgt hier mit einer Schlichtheit, als wenn dies das Selbstverständlichste von der Welt wäre.

Was nun die Stiftung zur Erreichung der oben genannten Ziele in den 14 Jahren ihres Bestehens geleistet hat, auch nur einigermaßen zu würdigen, würde Stunden erfordern. Wer sich dafür interessirt, findet einen Bericht über die Entwicklung der arbeiterfreundlichen Maaßnahmen und über die Schöpfung oder Unterstützung von Instituten an der Universität Jena in dem genannten Schriftchen von Prof. Auerbach über das Zeiß-Werk, dessen hierauf bezügliche Abschnitte jeden Leser mit Rührung und Bewunderung erfüllen werden. Von den unvergleichlich günstigen den Arbeitern gewährten Bedingungen für die Zeit der Gesundheit, wie der Krankheit, von dem Volkshaus, das, mit einem Aufwand von nahe einer Million Mark erbaut, neben Versammlungsräumen für künstlerische, wissenschaftliche und politische Zwecke, neben großartigen, reich ausgestatteten Lesezimmern auch liebevoll ausgerüstete Spielsäle für die Kinder enthält, kann hier ebenso wenig berichtet werden, wie von den einzelnen, zum Theil nach Abbeschen Gesichtspunkten eingerichteten Universitätsinstituten, zu denen die Stiftung bisher rund etwa 2 Millionen Mark beigetragen hat.

Nur einige allgemeine Bemerkungen dürfen zum Schluß dem Gesagten angefügt werden.

Auch bei seinen socialpolitischen Maaßnahmen hörte Abbe nie auf, Mann der Wissenschaft zu sein. Er beobachtete die Ereignisse im Verkehrsleben wie Naturerscheinungen, er stellte seine Theorie auf und prüfte sie am Experiment. Ein Beispiel möge dies belegen.

Sein warmes Herz drängte Abbe, den Arbeitern für ihre Erholung, ihre Weiterbildung so viel Zeit zu gewähren, als mit dem Bestehen und Gedeihen des stolzen Betriebes, dem ein so großer Theil seiner Lebensarbeit galt, nur irgend verträglich war. 1892 führte er den neun-, 1900 den achtstündigen Arbeitstag ein; daß er als Gegenleistung für den letzteren das Verbot des Alkoholgenusses in der Fabrik durchsetzte, sei nur nebenbei erwähnt. Aber der Gelehrte wollte sich über die Wirkung der neuen Einrichtung völlige Klarheit verschaffen, die Richtigkeit seiner Schlüsse sich und anderen beweisen; demgemäß wurde im ersten Jahre der Achtstundenarbeit eine genaue Statistik über die Leistungen der Arbeiter geführt. Dabei ergab sich denn, daß die Accordarbeiter in acht Stunden nicht weniger, sondern mehr leisteten, als zuvor in neun, und da die Fabrik bei der neuen Ordnung für eine

Stunde Betriebskraft und ev. Heizung und Beleuchtung sparte, so gewann sie, statt zu verlieren.

Und noch ein Anderes. Es war keine Laune, daß Abbe mit seiner Persönlichkeit in der Carl Zeiß-Stiftung untertauchte, seinen leitenden und befruchtenden Einfluß verbarg. Jede Hervorkehrung seiner Person war ihm zuwider, und wie ihm sein reiches Schaffen kaum Zeit für ausführliche Publicationen ließ, so hatte er noch viel weniger Zeit dafür, sich feiern zu lassen. Ehrungen waren ihm auch an sich unbequem, denn sie konnten auf dem Gedanken beruhen, er lege Werth auf dergleichen, werbe wohl gar um sie. Daraus entsprang die seltsame Gewohnheit, Ehrenbezeugungen, wenn sie ihm dargebracht wurden, mit Stillschweigen zu beantworten. Wir wissen das.

Aber die Königl. Gesellschaft hat sich selbst um eine Auszeichnung beworben, als sie Ernst Abbe ersuchte, zu gestatten, daß sein Name an die Spitze ihrer Mitgliederliste gestellt würde; und wenn sie mir heute erlaubt hat, von dem guten und großen Menschen zu sprechen, dessen Bild in mir unvergeßlich fortlebt, seit ich, wenn auch nur kurze Stunden hindurch, in die tiefen versonnenen Augen schauen durfte, so betrachte ich das gleichfalls als eine Ehre, für die ich herzlich dankbar bin.

Georg Meißner.

Von

Max Verworn.

Man kann auf mancherlei Weise Physiologie treiben.

Wie auf jedem Forschungsgebiete ist der Begriff der wissenschaftlichen Arbeit in der Physiologie individuell sehr verschieden. Der Eine sieht schon wissenschaftliche Forschung darin, wenn er für eine Methode, die er beherrscht, nach Anwendungen sucht und Probleme für seinen Zweck findet. Ein Anderer geht von Problemen aus und erkennt nur soweit Wissenschaft, als er organisch zusammenhängende Erfahrungen gewinnt. Aber zu dieser in der Natur des einzelnen Forschers begründeten Quelle der Verschiedenheit kommt in der Physiologie noch eine andere.

Wie auf wenigen Forschungsgebieten setzt in der Physiologie die Behandlung der Probleme eingehende Kenntnisse und Fähigkeiten sehr heterogener Art voraus. Ein Problem kann im Laufe seiner Entwicklung und je nach dem Stande seiner Analyse bald ein physikalisches, bald ein chemisches, bald ein anatomisches, bald ein zoologisches Antlitz gewinnen. Das macht die physiologische Forschung schwierig, denn es ist heute nicht mehr möglich, gleichzeitig auf allen diesen Gebieten die eingehenden Kenntnisse des Fachmannes zu besitzen. So ist es verständlich, daß sich der einzelne Physiologe beschränkt auf ein spezielles Gebiet und so kommt es, daß die Physiologie in verschiedenen Laboratorien sehr verschieden aussieht. Darin liegt ein Vorteil und eine Gefahr. Ein Vorteil: denn die Physiologie wird dadurch vor Einseitigkeit bewahrt, eine Gefahr: denn es kann leicht geschehen, daß die einzelnen Richtungen die Fühlung mit einander verlieren, besonders wenn, wie dies eine Zeitlang zu befürchten war, für die ver-

schiedenen Richtungen auf den Universitäten auch verschiedene Lehrstühle gegründet werden. Allein die Gefahr läßt sich vermeiden. Es ist nur nötig, daß die Physiologie das Band, das allein die einzelnen Richtungen verknüpft, niemals zerreißt. Das Band ist das einheitliche Problem der Physiologie: Die Analyse der Lebensvorgänge. Dieses biologische Moment ist leider schon heute bisweilen in den Hintergrund getreten und einzelne Physiologen haben sich bereits gelegentlich in Spezialfragen rein physikalischer oder chemischer oder auch histologischer Natur verloren. —

Daß das durchaus nicht eine notwendige Folge der mannigfachen Anforderungen ist, die an die physiologische Forschung herantreten, das zeigt die Forschergestalt Meißners, dessen Tod wir heute beklagen. Meißner hat wie sein großer Lehrer Johannes Müller in seinem reichen Lebenswerke nacheinander ganz verschiedenartige Seiten seiner Wissenschaft durch eigene Arbeiten umfaßt, und das war ihm möglich, weil er ein wirklicher Biologe war. Die Biologie gab ihm die Probleme, die er mit anatomischen, zoologischen, physikalischen, chemischen Methoden verfolgte, und die Methoden schuf er sich in dem Moment, wo er sie brauchte. So war er imstande, eine enorme Lebensarbeit zu leisten, die wir bewundern; und doch war sie noch viel grösser als wir es wissen und als es je Einer erfahren wird.

An äusseren Ereignissen ist Meißners Leben nicht reich. Meißner war am 19. November 1829 in Hannover geboren. Seine Studien begann er in Göttingen, wo er sich der Medizin und den Naturwissenschaften widmete. Hier war es Rudolph Wagner, der den jungen Studenten besonders in der zoologischen Richtung der Physiologie anregte. Wagner nahm ihn im Jahre 1851 mit auf eine zoologische Studienreise nach Triest, der sich auch Meißners Freund Billroth, der spätere Chirurg anschloß. Unter Wagners Leitung begann er dann in Göttingen die Untersuchungen über die Nervenendigungen in der Haut, die ihn zur Entdeckung der Tastkörperchen führten. Nachdem er 1852 auf Grund dieser Untersuchungen zum Dr. med. promoviert war, ging er nach Berlin, um bei Johannes Müller seine Studien fortzusetzen. Johannes Müller war damals die Erscheinung, die der Biologie ihren Charakter gab. Bei Johannes Müller mußte man gehört haben. Die ganze Biologie jener Zeit war Johannes Müllers Schule, und die erstaunliche Zahl von berühmt gewordenen Schülern, die von ihm ausgegangen sind, ist wohl in der Geschichte der Naturwissenschaften ohne Analogie. Ich erinnere nur an: Rudolph Virchow,

Helmholtz, Du Bois-Reymond, Brücke, Schwann, Henle, Remak, Traube, Max Schultze, Nasse, Miescher, Claparède, Lachmann, Lieberkühn, Guido Wagner, Haeckel, Hermann Munk, Pflüger u. a. Es kann sicherlich kein Zweifel sein, daß eine so große Zahl von Schülern eines einzigen Mannes selbst zu hervorragenden Männern wurde. Hier kann nur an die Wirkung einer gewaltigen Persönlichkeit gedacht werden. In der Tat wird auch einstimmig von allen Zeitgenossen diese Wirkung anerkannt und sie äußerte sich auch auf Meißner. Man erkennt bei Meißner auf Schritt und Tritt die Zeichen, die der Meister seinen Schülern aufdrückte. Es ist die Art des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens, die Johannes Müller auszeichnete und die er auf seine Schüler übertrug, und diese Art, die heute Vielen abhanden gekommen ist, finden wir auch bei Meißner. Sie ist charakterisiert durch die harmonische Kombination von Experiment und kritischer Erwägung. Wir haben auch heute beides in der Physiologie, aber das harmonische Gleichgewicht wird vielfach vernachlässigt. Liest man manche moderne Arbeiten, so steht der Aufwand an experimenteller Mühe oft in gar keinem Verhältnis zu dem Werte der Fragestellung. Man vermißt so oft die gründliche Sorgfalt in der Ausarbeitung und Zuspitzung des Problems. Es gehört ein gewisser ästhetischer Forschungssinn dazu, das Problem bis auf den Punkt zu führen, wo es in seiner einfachsten und präcisesten Form herausgeschält erscheint und dann an diesem Punkte das entscheidente Experiment einzusetzen, um schließlich auch die Bedeutung der gewonnenen Resultate für das Problem kritisch zu würdigen. Diese Aesthetik der wissenschaftlichen Arbeit, die wir in hohem Maße in den Arbeiten der Johannes Müllerschen Aera finden, und die auch dem Fernerstehenden Anteil und Verständnis an der Arbeit erweckt, wird heute vielfach absichtlich bei Seite gesetzt. Das Problem und seine Bedeutung wird heute manchmal kaum noch erwähnt, dagegen wird die Methode des Experiments, selbst wenn es sich um ganz nebensächliche Dinge handelt, mit einer Breite und Umständlichkeit auseinandergesetzt, als wenn sie den Zweck der ganzen Arbeit bildete. Wer nicht selbst zu den zwei oder drei Leuten gehört, die sich mit der gleichen Frage beschäftigen, versteht manchmal kaum noch, wozu der ganze Aufwand dient. Früher schrieb man seine Mitteilungen für die Gesamtheit der Fachgenossen oder selbst für den noch größeren Kreis der Naturforscher. Heute schreibt man sie vielfach für zwei oder drei Kollegen, die einzigen, die sie verstehen, weil sie

selbst gerade über den Gegenstand arbeiten. Das ist ein Begräbnis der Wissenschaft.

Von Berlin ging Meißner als Assistent zu Th. v. Siebold nach München, wo er namentlich zoologische und entwicklungsgeschichtliche Studien machte. Die Zoologie war in jener Zeit auf das Engste mit der Physiologie verknüpft. Man stand allgemein auf dem Standpunkte Rudolphis: „Die vergleichende Anatomie ist die sicherste Stütze der Physiologie, ja ohne dieselbe wäre kaum eine Physiologie denkbar.“ In der Tat kam ja auch damals unter der Pflege Johannes Müllers die vergleichende Physiologie zu ihrer ersten und leider einzigen Blüte. Meißner hat zoologische Kenntnisse als unbedingt nötig erachtet für den Physiologen und selbst in den letzten Jahren im Gespräch noch den Mangel an solchen in der heutigen Physiologie beklagt.

Im Jahre 1855 wurde der nicht viel mehr als 25jährige bereits als ordentlicher Professor für Anatomie und Physiologie nach Basel, bald darauf im Jahre 1857 als Professor der Physiologie und Zoologie nach Freiburg i. B. berufen. 1860 kehrte er nach Göttingen zurück und übernahm als Nachfolger seines Lehrers Rudolph Wagner den Lehrstuhl der Physiologie und die Leitung des Physiologischen Instituts. Von jetzt an wandte er sich überwiegend den chemischen Problemen des tierischen Stoffwechsels zu. Leider fühlte er sich durch eine kritische Bemerkung eines jüngeren Kollegen über eine seiner Arbeiten, die sich auf die Elektrisierung des Sauerstoffs bezogen, derart gekränkt, daß er in übergroßer Empfindlichkeit seit dem Jahre 1871 nichts mehr publizierte. Das hinderte ihn indessen nicht, für sich selbst unausgesetzt weiter zu arbeiten.

Der Verlust seiner Frau, einer Tochter des Dichters v. Kobell, mit der er sich einen kleinen, aber durch lebhafte künstlerische und wissenschaftliche Interessen verbundenen Freundeskreis geschaffen hatte, verursachte im Jahre 1887 einen tiefen Riß im Leben des schaffensfreudigen und tatkräftigen Mannes. Seitdem ist er zu einem einsamen, freudlosen Menschen geworden. Am 1. April 1901 trat Meißner freiwillig von seinem Lehramte zurück. Noch vier Jahre lebte er in stiller Zurückgezogenheit seinen wissenschaftlichen Interessen folgend bis er am 30. März 1905 einer Apoplexie erlag.

Meißner war eine eigenartige, sehr fein organisierte, temperamentvolle Natur. Leicht erregbar, und doch von unbegrenzter Geduld bei der Arbeit und von peinlichster Gewissenhaftigkeit. Sein rastloser Geist konnte nie ohne Beschäftigung sein und hatte ein

geradezu auffallendes Bedürfnis, alles was ihm entgegentrat, zum Gegenstande des Nachdenkens und Experimentierens zu machen. Daraus entsprang die Vielseitigkeit seiner wissenschaftlichen Interessen. Der Grundzug seines Charakters aber war eine unbestechliche Wahrheitsliebe. Was er als wahr und recht und gut erkannt hatte, vertrat er mit rücksichtsloser Energie, weder fremde noch eigene Interessen achtend. Seine wissenschaftliche Arbeit trieb er als wahrer Forscher nur um ihrer selbst willen. Das Suchen nach Wahrheit allein war ihm Genuß und ihre Erkenntnis sein Lohn. Allen äußeren Anerkennungen und Ehrungen war er durchaus abhold und jeder Personenkult war ihm in tiefster Seele verhaßt. Ein abgesagter Feind jedes äußeren Gepränges war er ein echt katonischer Charakter. Unerbittlich verlangte er auch von jedem anderen die gleiche Strenge der Pflichterfüllung und Gewissenhaftigkeit, mit der er selbst an seiner Arbeit hing. Und doch verbarg sich unter der harten, bisweilen geradezu rauhen Außenseite ein weiches Herz voll von reiner echter Güte, das vieles wieder gut machte, was er in Erregung und Rücksichtslosigkeit getan. Mancher hat das im Stillen erfahren. Er liebte nicht, daß man davon sprach. Er war bis in die feinsten Regungen seiner Seele hinein ein vornehmer Mensch.

So soll ein Lehrer, so soll ein Forscher sein. Und Meißner war beides in hervorragendem Grade. Mit reichen Gaben ausgestattet für seinen akademischen Lehrberuf, von wissenschaftlichen Idealen erfüllt, geistreich, präcise und klar im Vortrag, ein glänzender Experimentator, fand er selber Genuß in seiner akademischen Lehrtätigkeit und bot er den gleichen Genuß seinen Schülern. Meißners Vorlesungen waren berühmt. Fast alle Aerzte Hannovers haben zu seinen Füssen gesessen und zahllose Aerzte aus anderen Teilen des Reiches und aus dem Auslande zählen zu seinen Schülern. Und seine Schüler hingen an ihm in Dankbarkeit und Verehrung trotz seiner gefürchteten Strenge, trotz seiner rücksichtslosen Behandlung. Es ist ein beneidenswertes Zeichen für die Verehrung, die noch jetzt graue Häupter an ihren Lehrer fesselt, wenn man sieht, wie ihre Augen anfangen zu glänzen, sobald man mit ihnen von Meißner und seinen Vorlesungen spricht. —

Die wissenschaftliche Forscherarbeit Meißners hat nacheinander verschiedene Entwicklungsstadien durchlaufen. Ausgehend von anatomisch-zoologischen Arbeiten ist er Ende der 50er Jahre vorwiegend zu physiologischen Untersuchungen der chemischen und der physikalischen Richtung übergegangen, ohne jedoch seine

anatomisch-physiologischen Interessen aufzugeben. Hat er doch noch nach dem Verzicht auf Publikation seiner Arbeiten eine umfassende anatomische Untersuchung über den Bogengangapparat der Vögel und die benachbarten Gehirnteile ausgeführt, die auf das physiologische Problem der Bewegungsstörungen nach Operationen am Labyrinth hinauslief und deren Manuskript sich nach seinem Tode noch vorfand. Auch manche andere Physiologen haben die vergleichende Anatomie und Zoologie als Ausgangspunkt ihrer wissenschaftlichen Entwicklung genommen und es scheint, als ob gerade dieser Anfang eine besonders günstige Grundlage liefert, weil eben dadurch gerade das alle Richtungen der Physiologie vereinende biologische Moment besonders in den Vordergrund tritt. Mag sich Einer immerhin nachher auf die rein chemische oder die rein physikalische Arbeitsweise spezialisieren, er hat dadurch einen höheren Standpunkt und einen weiteren Blick als alle, die gleich von vornherein von der Physik oder Chemie allein ausgehen. Meißner ist ein gutes Beispiel dafür.

Unter den Arbeiten aus seiner anatomisch-zoologischen Periode steht voran die Entdeckung der Tastkörperchen in den Papillen der menschlichen Haut. Dieser Fund und seine systematische histologische wie physiologische Ausbeutung, der er mehrere Arbeiten widmete, haben Meißners Namen zuerst in weiteren Kreisen bekannt gemacht. Es ist bezeichnend für den vornehmen Sinn Meißners, daß er in seinen Beiträgen zur Anatomie und Physiologie der Haut (1853), die er Rudolph Wagner widmete, den besten Teil seiner Entdeckung seinem Lehrer zuwies, indem er in die Widmung schrieb: „Durch Sie erhielt Sinn und Bedeutung, was ein Zufall dem Schüler entdeckte. Wenn ich es unternahm, den Weg, auf welchen Sie leiteten, weiter zu gehen, so genehmigen Sie diesen Versuch als ein Zeichen aufrichtiger Dankbarkeit.“ Bald darauf nahmen ihn entwicklungsgeschichtliche Arbeiten in Anspruch über verschiedene Gruppen aus dem Stamme der Würmer: Bandwürmer (1859), Gordiaceen (1856), Filaria medinensis (1857). Vor allem aber führten ihn seine Studien über den Befruchtungsvorgang der Eizelle (1855, 1857) bei Insekten, Säugetieren, Echinodermen wieder zu einer bemerkenswerten Entdeckung. Er fand am Ei der Insekten die Mikropyle, durch welche die Spermatozoen in das Eiplasma einzudringen vermögen.

Schon während seiner Assistentenzeit in München bereitete sich die zweite Periode seiner wissenschaftlichen Arbeit vor. Er empfing hier nicht nur Anregungen in anatomisch-zoologischer Richtung. Die Luft in München war bereits erfüllt von Liebigs Ideen

über den Stoffwechsel. Hier hatte der große Begründer der modernen Lehre vom Stoffwechsel der Organismen einen Kreis von Schülern um sich versammelt, die im Sinne der neuen Anschauungen arbeiteten. Meißner begann sich daher auch bald für die Probleme des tierischen Stoffwechsels zu begeistern und damit trat er in die vorwiegend chemische Periode seiner Arbeiten ein. Ist Meißners Name zwar durch die Entdeckung der Tastkörperchen in der Wissenschaft populär geworden, so möchte ich doch sagen, daß die lange Reihe seiner chemischen Untersuchungen eine viel größere Bedeutung für die weitere Entwicklung der Physiologie gewonnen hat als die genannte Entdeckung. Man muß sich vergegenwärtigen, daß damals unsere heute geläufigen Vorstellungen über das Schicksal der in den Körper eingeführten Stoffe und über die Entstehung der charakteristischen Ausscheidungsprodukte des Körpers erst im Entstehen waren. Man mußte hier Schritt für Schritt durch experimentelle Untersuchungen vorwärts zu kommen suchen. Meißner hat sich durch seine Arbeiten an den verschiedensten Punkten dieses großen Gebietes in grundlegender Weise beteiligt. Wie die einzelnen Vorgänge des Gesamtstoffwechsels selbst so sind auch Meißners zahlreiche Arbeiten auf diesem Gebiet untereinander eng verkettet. Den Ausgangspunkt bildete seine Differenzierung der Verdauungsprodukte des Eiweiß, wie sie unter dem Einfluß des Magen- und Pankreassaftes entstehen. Schon Lehmann hatte als Verdauungsprodukt des Eiweiß im Magen einen Körper charakterisiert, den er als Pepton bezeichnete. Meißner bestätigte zunächst diese Entdeckung und differenzierte durch Fällungsmethoden noch einen zweiten Körper davon, den er Parapepton, und dann bei der Syntonin- und Casein-Verdauung einen dritten, den er Metapepton nannte. Im Verfolg dieser Untersuchungen schuf Meißner die Methodik für die Trennung der Verdauungsprodukte des Eiweiß und auch die Grundlage unserer Anschauungen über den Vorgang der Eiweißverdauung, denn die Untersuchungen Kühnes, dessen Nomenklatur jetzt meist angenommen ist, beruhen im Wesentlichen auf den gleichen Prinzipien. So entstanden unsere ersten Kenntnisse über das Schicksal des Nahrungseiweiß in unserem Organismus und wir müssen sagen, daß wir auch heute nach beinahe einem halben Jahrhundert noch im Großen und Ganzen auf demselben Punkte stehen. Suchte Meißner einerseits das Schicksal der Eiweißkörper im Organismus zu ermitteln, um über die eigentlichen intermediären Vorgänge im Körper Licht zu gewinnen, so benutzte er anderseits auch den entgegengesetzten Weg zur Erreichung dieses wichtigen

Ziels, indem er die Herkunft der stickstoffhaltigen Endprodukte des Eiweißstoffwechsels experimentell zu erforschen bemüht war. Heinsius und Stokvis waren zu dem Schluß gekommen, daß der Harnstoff in der Leber gebildet werden müsse, wie sie glaubten, aus Harnsäure. Meißner konnte experimentell den Beweis liefern, daß in der Tat Harnstoff in der Leber der Fleischfresser in großer Menge, wie sonst nirgends im Körper vorhanden ist. Für die Vögel gilt dasselbe hinsichtlich der Harnsäure. Ferner gelang es Meißner, für die Hippursäure beim Pflanzenfresser wenn auch noch nicht den Ort der Bildung, so doch die Vorstufe in der Benzoësäure nachzuweisen. So kam er den intermediären Stoffwechselprozessen von beiden Seiten aus näher und es konnte nicht ausbleiben, daß er nun auch zu bestimmten Fragestellungen über die Vorgänge in der lebendigen Substanz selbst geführt wurde, die den besonders augenfälligen Leistungen des tierischen Körpers speciell seiner Muskeln, zu Grunde liegen. Die Frage nach der chemischen Quelle der Muskelkraft hatte damals schon die Ansichten in zwei Lager geteilt. Die einen erblickten mit Liebig, wie das ja auch am nächstliegenden war, in der Zersetzung der Eiweißkörper die Kraftquelle für die Leistungen der Muskeln, die anderen glaubten sich überzeugt zu haben, daß der Muskel auf Kosten von stickstofffreiem Material seine Arbeit verrichte. Die beiden Ansichten haben sich bis in unsere Tage hinein bekämpft und doch hat schon Meißner eine Lösung für den Konflikt angedeutet, die den alten Streit in ganz andere Bahnen hätte lenken können. Er kommt nämlich in seiner Untersuchung über diese Frage zu dem Schluß, daß „stickstoffloses Material nur die nächste Quelle der Muskelarbeit ist; die entferntere Quelle kann sein und ist ganz gewiß teilweise eiweißartige Substanz“. In der Tat drängen uns die allgemein-physiologischen Vorstellungen der neueren Zeit zu der Annahme, daß der Muskel bei seiner Arbeit nur stickstofffreie Atomgruppen abgibt und daher zur Regeneration seiner lebendigen Substanz auch nur stickstofffreie Atomgruppen braucht. Diese aber kann er beziehen sowohl aus Eiweiß als aus Kohlehydraten.

Neben den chemischen Untersuchungen hat Meißner stets auch die physikalische Richtung in der Physiologie gepflegt. Verdankt ihm doch z. B. die physiologische Methodik den wichtigsten Apparat zum Nachweis der feinen elektrischen Ströme im lebendigen Gewebe, das „Elektrogalvanometer“, das er mit Meyerstein zusammen konstruierte. Hatte noch Du Bois-Reymond seine epochemachenden Arbeiten in der Muskel- und Nervenphysiologie

mit dem selbstgewundenen Multiplikator ausgeführt, dessen Astasierung durch zwei entgegengerichtete Magnetnadeln bewirkt war, die unendlich lange Zeit brauchten, um nach einer Ablenkung wieder in die Ruhelage zurückzukehren, so beseitigte Meißners Elektrogalvanometer diesen Uebelstand in glücklichster Weise, indem er zur Ausschaltung des Erdmagnetismus das Prinzip von Weber, die Annäherung eines selbständigen freien Magneten, und für die Dämpfung der Magnetschwingungen das Induktionsprinzip von Gauß verwendete. Mit diesem neuen Apparat hat Meißner dann in Gemeinschaft mit seinen Schülern nicht nur zahlreiche elektrophysiologische Untersuchungen über die Ströme der Haut, des Muskels, des Nerven, ausgeführt, sondern mit seinem Assistenten Thiry zusammen auch thermoëlektrische Studien über das Verhältnis der Wärmebildung des Muskels zu seiner Kontraktion, die das Resultat ergaben, daß „direkt proportional mit den Hubhöhen auch die Wärmeproduktion zu- oder abnimmt“. Untersuchungen über die Vokalanalyse mit Hülfe des Phonographen, sowie eine rein mathematische Studie über das Newtonsche Fallgesetz, die seine letzten Lebensjahre ausfüllten, hat Meißner nicht veröffentlicht.

Das Bild von dem physiologischen Lebenswerke Meißners würde aber eine empfindliche Lücke haben, wenn nicht neben seinen Originalarbeiten noch des „Jahresberichtes für Anatomie, Entwicklungsgeschichte und Physiologie“ Erwähnung geschähe, in dem er in ganz unübertrefflicher Weise den physiologischen Teil selbst bearbeitete, und der seit dem Jahre 1872 durch Hofmann und Schwalbe, später durch Hermann und Schwalbe und jetzt als selbständiger „Jahresbericht für Physiologie“ von Hermann fortgesetzt worden ist.

Geradezu erstaunlich erscheint die Vielseitigkeit und die Arbeitskraft des seltenen Mannes, wenn man bedenkt, daß er neben der Physiologie noch die Entwicklungsgeschichte und die Hygiene bis vor einer Reihe von Jahren als Lehrfach vertrat, ja daß er als Vertreter der Hygiene auch praktisch gewirkt hat, indem er zuerst systematische Untersuchungen des Brunnenwassers der Stadt Göttingen durchzusetzen verstand.

Meißner hat ein leichtes Ende gehabt. Schwerere Krankheit, die er sein Lebenlang fürchtete, hat ihn verschont. Zwar hat er, der alle Vorgänge und Veränderungen in seinem Körper mit peinlichster Genauigkeit bis zum letzten Tage prüfte, verfolgte und notierte, die Alterserscheinungen mit banger Sorge sich entwickeln

sehen. Das machte die letzten Jahre seines Lebens für ihn schließlich zur Last. Aber das unmittelbare Bevorstehen seines Todes scheint er nicht vermutet zu haben. Am 26. März dieses Jahres erlitt er eine leichte Apoplexie und wenige Tage darauf bereitete ein neuer Anfall seinem reichen, bis zuletzt lebhaften Geiste ein schmerzloses Ende.

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1905.

Sekretäre.

Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.

Ehren-Mitglieder.

Friedrich Althoff, Dr., Wirkl. Geh. Rat, Ministerial-Direktor Excellenz zu Berlin, seit 1901.
Gottlieb Planck, Dr., Prof., Wirklicher Geheimer Rat, Excellenz, zu Göttingen, seit 1901.
Georg von Neumayer, Dr., Wirklicher Geheimer Rat, Excellenz, zu Neustadt a. Hardt, seit 1901.
Wilhelm v. Hartel, Dr., k. k. Oesterreichischer Unterrichtsminister, Excellenz, zu Wien, seit 1901.
Rochus Freiherr von Liliencron, Dr., Wirklicher Geheimer Rat und Prälat, Excellenz, zu Schleswig, seit 1901.
Conrad Studt, Dr., k. Preuss. Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Excellenz, zu Berlin, seit 1901.
Georg Kopp, Dr., Kardinal-Fürstbischof, Eminenz, zu Breslau, seit 1902.
Julius Wellhausen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Göttingen, seit 1903.

Ordentliche Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Herrmann Wagner, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Prof., Geh. Justizrat, seit 1881.
Franz Kielhorn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1882.
Karl Dilthey, Dr. ph., Geh. Reg.-Rat, Prof., seit 1892.

Wilhelm Meyer, Dr., ph., Prof., seit 1892.
Gustav Cohn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Prof., seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893, D. z. Sekretär.
Paul Kehr, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1895.
Jacob Wackernagel, Dr. ph., Prof., seit 1902 (zuvor Correspondent, seit 1901).
Lorenz Morsbach, Dr. ph., Prof., seit 1902.
Eduard Schwartz, Dr. ph., Prof., seit 1902.
Edward Schröder, Dr. ph., Prof., seit 1903 (zuvor Correspondent seit 1894).
Friedrich Andreas, Dr. phil., Prof., seit 1904.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872).
Adolf von Koenen, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrat, seit 1885. (Zuvor Correspondent seit 1880.)
Theodor Liebisch, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, seit 1887.
Felix Klein, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1887. (Zuvor Assessor seit 1871, Correspondent seit 1872.)
Gottfried Berthold, Dr. ph., Prof., seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Prof., seit 1889.
Otto Wallach, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1890.
David Hilbert, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1895.
Emil Wiechert, Dr. ph., Prof., seit 1903.
Max Verworn, Dr. med., Prof., seit 1903.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Friedrich Bechtel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor seit 1882.)
Franz Bücheler, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1899. (Zuvor Correspondent seit 1881.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts, zu Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Leopold Delisle, Membre de l'Institut, ancien Administrateur général de la Bibl. Nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1866.)

P. Heinrich Denifle, Sotto-archivista della S. Sede, zu Rom, seit 1896.

Hermann Diels, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin seit 1899.

L. Duchesne, Membre de l'Institut, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Franz Ehrle, Präfect der vaticanischen Bibliothek, zu Rom, seit 1901.

M. J. de Goeje, Prof., zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspondent seit 1872.)

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1886.)

Adolf Kirchhoff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1881. (Zuvor Correspondent seit 1865.)

Ernst von Meier, Dr., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1901.

Theodor Nöldeke, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Julius Oppert, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1876.)

Richard Pietschmann, Dr., Prof., Direktor der Kgl. Universitäts-Bibliothek zu Göttingen, seit 1899. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1897.)

Gustav Roethe, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893.)

Wilhelm Schulze, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898.)

Theodor von Sickel, Dr., Prof., k. k. Sektionschef, zu Meran, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1868.)

Wilhelm Thomsen, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.

Hermann Usener, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1899. (Zuvor Correspondent seit 1887.)

Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.

Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1897. (Zuvor ordentl Mitglied seit 1892.)

Wilhelm Wilmanns, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1894.)

Mathematisch-physikalische Klasse.

Alexander Agassiz, Prof., zu Cambridge, U. S. A., seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1879.)

Arthur Auwers, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, Beständiger Secretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1871.)

Adolf von Baeyer, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1879.)

Ernst Benecke, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904. (Zuvor Correspondent seit 1889.)

Wilhelm von Bezold, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1897.)

Ludwig Boltzmann, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1882.)

Gaston Darboux, Dr., Membre de l'Institut, Prof., Beständiger Secretär der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1883.)

Richard Dedekind, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Paul Ehrlich, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, Direktor des Instituts für Serumforschung zu Frankfurt a. M., seit 1904.

Julius Elster, Dr., Professor, Oberlehrer am Gymnasium in Wolfenbüttel, seit 1902.

Wilhelm Foerster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin-Westend, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Robert Helmert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Director des geodät. Instituts zu Potsdam, seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1896.)

Ewald Hering, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Leipzig, seit 1904.

Joseph Dalton Hooker, Director der Königlichen Gärten zu Sunnigdale, seit 1865.

William Thomson Lord Kelvin, Prof., zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Carl Klein, Dr., Prof., Geh. Bergrat, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1877.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geh. Rat, Excellenz, Prof., zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1862.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Präsident der phys.-techn. Reichsanstalt, zu Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1867.)

Walter Nernst, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat., zu Berlin, seit 1905. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898.)

Carl Neumann, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Johannes Orth, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893.)

Wilhelm Pfeffer, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1885.)

Henri Poincaré, Membre de l'Institut, Prof. zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Johannes Reinke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1882.)

Gustav Retzius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1904. (Zuvor Correspondent seit 1886.)

Ferdinand Freiherr von Richthofen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Hermann Amandus Schwarz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1875, Correspondent seit 1869.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1879.)

Eduard Sueß, Dr., Prof., Präsident der K. Akademie der Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Gustav Tschermak, Dr., Prof., k. k. Hofrat in Wien, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Wilhelm Waldeyer, Dr. med. u. Dr. ph., Prof., Geh. Medicinalrat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1877.)

Heinrich Weber, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Correspondenten.

Philologisch-historische Klasse.

Theodor Aufrecht, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1871.

Otto Benndorf, Dr., k. k. Hofrat, Sektionschef, Director des k. k. österreichischen archäol. Instituts, zu Wien, seit 1883.

Friedrich von Bezold, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Bonn, seit 1901.

Adalbert Bezzenberger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Königsberg i. Pr., seit 1884.

Gustav Bickell, Dr. th. u. Dr. ph.. Prof., zu Wien, seit 1901.

Wilhelm von Bippen, Dr., Syndicus der Stadt Bremen, zu Bremen, seit 1894.

Max Bonnet, Dr., Prof., zu Montpellier, seit 1904.

Sophus Bugge, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1887.

Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.
Maxime Collignon, Dr., Prof., an der faculté des lettres, zu Paris, seit 1894.
Julius Eggeling, Dr., Prof., zu Edinburgh, seit 1901.
Adolf Ermann, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1888.
Arthur J. Evans, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1901.
John Faithfull Fleet, Dr., zu London, seit 1885.
Wendelin Förster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Percy Gardner, Prof., zu Oxford, seit 1886.
Gustav Groeber, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Charles Groß, Prof., zu Cambridge, (Mass.), U. S. A., seit 1891.
Ignazio Guidi, Prof., zu Rom, seit 1887.
Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
G. N. Hatzidakis, Dr., Prof., zu Athen, seit 1901.
Albert Hauck, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., Geh. Kirchenrat, zu Leipzig, seit 1894.
Joh. Ludwig Heiberg, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1899.
Wolfgang Helbig, Dr., Prof., zu Rom, seit 1882.
Riccardo de Hinojosa, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1891.
Georg Hoffmann, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1881.
Oswald Holder-Egger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1896.
Theophile Homolle, Membre de l'Iinstitut, Prof., zu Paris, seit 1901.
Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrat zu Dresden, seit 1885.
Eugen Hultzsch, Dr., Prof., zu Halle a. S., seit 1895.
Hermann Jacobi, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1894.
Julius Jolly, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., zu Würzburg, seit 1904.
Finnur Jonsson, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
Adolf Jülicher, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., zu Marburg, seit 1894.
Ferdinand Justi, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1875.
Bruno Keil, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Konstantinos Kontos, Prof., zu Athen, seit 1892.
Adolf Köcher, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1886.
Axel Kock, Dr., Prof., zu Lund, seit 1901.
Karl von Kraus, Dr., Prof., zu Prag, seit 1901.
Georg Löschcke, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
Sir Clements Robert Markham, zu London, seit 1890.
Aug. Mau, Dr., Prof. und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts zu Rom, seit 1894.
Paul Jonas Meier, Dr., Prof., Direktor des Herzogl. Museums zu Braunschweig, seit 1904.
Giovanni Mercati, zu Rom, seit 1901.

Eduard Meyer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1895.
Leo Meyer, Dr., Prof., k. Russ. Wirkl. Staatsrat, zu Göttingen, seit 1855. (Zuvor Assessor seit 1861.)
Adolf Michaelis, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1879.
Hermann Möller, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1894.
Ernesto Monaci, zu Rom, seit 1901.
Gabriel Monod, Membre de l'Institut, zu Versailles, seit 1901.
Carl Müller, Dr. th., Prof., zu Tübingen, seit 1899.
Arthur Napier, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1904.
Benedictus Niese, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1901.
Heinrich Nissen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Bonn, seit 1884.
Hermann Oldenberg, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1890.
Paolo Orsi, Dr., Prof., direttore del Museo zu Siracus, seit 1904.
Joseph Partsch, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Leipzig, seit 1901.
Eugen Petersén, Dr., Prof., Sekretär des archäologischen Instituts zu Rom, seit 1887.
Richard Pischel, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1889.
Richard Reitzenstein, Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Max Rieger, Dr., zu Alsbach a. d. Bergstraße, seit 1897.
Moritz Ritter, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1892.
Carl Robert, Dr., Prof., zu Halle, seit 1901.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1892.
Dietrich Schaefer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.
Carl Schuchhardt, Dr., Prof., Direktor des Kestner-Museums zu Hannover, seit 1904.
Otto Seeck, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1895.
Albert Sorel, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Elias Steinmeyer, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1895.
Rudolf Thurneysen, Dr., Prof., zu Freiburg i. B., seit 1904.
Ludwig Traube, Dr., Prof., zu München, seit 1894.
Johannes Vahlen, Dr. ph. u. Dr. jur., Prof., Geh. Reg.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.
Girolamo Vitelli, Dr., Prof., zu Florenz, seit 1904.
Curt Wachsmuth, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1884.
Wilhelm Windelband, Dr., Prof., zu Heidelberg, seit 1901.
Heinrich Zimmer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Svante Arrhenius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1901.
Dietrich Barfurth, Dr., Prof., zu Rostock, seit 1904.

Charles Barrois, Dr., Prof., zu Lille, seit 1901.
Max Bauer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1892.
Friedrich Becke, Dr., Prof., zu Wien, seit 1904.
Friedrich Beilstein, Dr., Wirkl. Staats-Rat, Excellenz, zu St. Petersburg, seit 1880.
Robert Bonnet, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1904.
Eduard Bornet, Prof., zu Paris, seit 1885.
J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.
Alexander von Brill, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Woldemar Christoffer Brögger, Dr., Director der geologischen Reichsanstalt in Christiania, seit 1902.
Heinrich Bruns, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1892.
Otto Bütschli, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Heidelberg, seit 1889.
Georg Cantor, Dr., Prof., zu Halle, seit 1878.
Carl Chun, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
Giacomo Ciamician, Dr., Prof., zu Bologna, seit 1901.
Ulisse Dini, Prof., zu Pisa, seit 1880.
Theodor Wilhelm Engelmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Berlin, seit 1884.
Emil Fischer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1901.
Rudolf Fittig, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1882.
Walter Flemming, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Kiel, seit 1887.
Lazarus Fletcher M. A. F. R. S., Keeper of the Department of Mineralogy, British Museum zu London, seit 1901.
Robert Fricke, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1904.
Georg Frobenius, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Sir Archibald Geikie, vormals Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom, zu London, seit 1889.
Karl Goebel, Dr., Prof., zu München, seit 1902.
Camillo Golgi, Prof., zu Pavia, seit 1892.
Paul Gordan, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1870.
Giovanni Battista Grassi, Prof., Vicesekretär der math.-naturw. Klasse der R. Academia dei Lincei, zu Rom, seit 1901.
Victor Hensen, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Kiel, seit 1892.
Ludimar Herrmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Königsberg i. Pr., seit 1886.
Wilhelm Hittorf, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Münster, seit 1879.
Jacob Heinrich van't Hoff, Dr. ph., med., jur. u. ing., Prof., zu Berlin, seit 1892.
Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1869.
Sir William Huggins, Präsident der Royal Society, zu London, seit 1876.

Adolf Hurwitz, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1892.
Alexander von Karpinski, Excellenz, Präsident des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1892.
Ludwig Kiepert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Hannover, seit 1882.
Leo Königsberger, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1874.
Carl Koppe, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1901.
E. Ray Lankester, Prof., Director des Natural history Museum zu London, seit 1901.
A. Michel Lévy, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Heinrich Limpricht, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor seit 1857.)
Ferdinand Lindemann, Dr., Prof., zu München, seit 1882.
Sir Joseph Norman Lockyer, Prof., zu London, seit 1876.
Hubert Ludwig, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Ernst Mach, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1887.
Adolf Mayer, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1872.
Dmitri Mendelejeff, Dr., Prof., zu St. Petersburg, seit 1892.
Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Prof., K. K. Oesterr. Hofrat zu Wien, seit 1877.
Hermann Minkowski, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1878.
Edmund von Mojsisovics, Dr., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1902.
Simon Newcomb, Prof., vormals Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Max Nöther, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1892.
Wilhelm Ostwald, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1901.
J. L. Penfield, Professor an der Yale University, zu New Haven, U. S. A., seit 1902.
Edmond Perrier, Membre de l'Institut, Director des Muséum d'Histoire naturelle zu Paris, seit 1901.
Eduard Pflüger, Dr., Prof., Geh. Medicinalrat, zu Bonn, seit 1872.
Emile Picard, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1884.
Max Planck, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Alfred Pringsheim, Dr., Prof., zu München, seit 1904.
Friedrich Prym, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1891.
Georg Quincke, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1866.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.

Friedrich von Recklinghausen, Dr., Prof., zu Straßburg i.E., seit 1901.

Theodor Reye, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1877.

Wilhelm Conrad Röntgen, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München, seit 1883.

Henry Enfield Roscoe, Prof., zu London, seit 1874.

H. Rosenbusch, Dr., Prof., Geh. Ober-Bergrat, zu Heidelberg, seit 1882.

Carl Runge, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.

Franz Eilhard Schulze, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1883.

Arthur Schuster, Dr., Prof., zu Manchester, seit 1901.

Simon Schwendener, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1892.

Hugo Seeliger, Dr., Prof., zu München, seit 1901.

Walther Spring, Dr., Prof., zu Lüttich, seit 1901.

Johann Strüver, Dr., Prof., zu Rom, seit 1874.

Ludwig Sylow, Dr., zu Frederichshall, seit 1883.

Johannes Thomae, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Jena, seit 1873.

Th. Tschernyschew, Dr., Direktor des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1904.

Victor Uhlig, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.

Hermann Vöchting, Dr. Prof., zu Tübingen, seit 1888.

Hermann Vogel, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Potsdam, seit 1887.

Karl von Voit, Dr., Prof., Geh.-Rat u. Ober-Medicinalrat, zu München, seit 1879.

Aurelius Voß, Dr., Prof., zu München, seit 1901.

Emil Warburg, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1887.

Eugen Warming, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1888.

Julius Weingarten, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Freiburg i/B., seit 1886.

Julius Wiesner, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1902.

Ferdinand Zirkel, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Leipzig, seit 1886.

Benekesche Preisstiftung.

Die Benekesche Preisstiftung bestimmt in § 2 ihres Statuts vom 28. Juni 1866 und in § 9 des Regulativs vom 22. Mai 1867, daß, falls Bewerbungen um die ausgeschriebenen Preise rechtzeitig eingereicht und Preise erteilt wurden, die Bekanntmachung der zuerkannten Preise an dem der Einlieferung zunächst folgenden 11. März, dem Geburtstage des Stifters, oder, wenn dieser Tag auf einen Sonn- oder Feiertag fällt, am nächstfolgenden Wochentage in einer öffentlichen Sitzung der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen stattzufinden habe. Die für das Jahr 1905 ausgeschriebene Benekesche philosophische Preisaufgabe (vergl. diese Zeitschrift, Jahrgang 1902) fand keine Bearbeitung, so daß die Zuerkennung eines Preises für dieses Jahr nicht in Frage kam.

Gemäß der Bestimmung in § 2 des Stiftungs-Statuts, nach der die Stellung der neuen Aufgabe jährlich in der Zeit vom 1. April bis 1. Juli erfolgen muß, ergeht die nachstehende Bekanntmachung:

Für das Jahr 1908 stellt die philosophische Fakultät die folgende neue Preisaufgabe:

> „Die Sonntagsruhe in England und Schottland ist bekanntlich die Frucht der kirchlichen Reformation. Es ist aber noch im Einzelnen nachzuweisen, und dies wird gegenwärtig gewünscht, wie durch kirchliche und weltliche Ordnungen im Laufe der Jahrhunderte die neue Sitte der Sonntagsheiligung allmählich zur Herrschaft gelangt ist. Sowohl für die Erkenntnis des allgemeinen Zusammenhanges von Recht und Sitte, wie für die besonderen Aufgaben der sozialen Gesetzgebung, sind hier wichtige Aufschlüsse zu gewinnen."

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1907, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an die Fakultät einzusenden, zusammen

mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung und innen den Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatt muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls ihr ein Preis nicht zuerkannt wird. Der erste Preis beträgt 3400 Mk., der zweite 680 Mk., und die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigentum ihres Verfassers.

Die Bekanntmachung der zuerkannten Preise erfolgt am 11. März 1908 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät in Göttingen.

In den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, von 1903 und 1904 finden sich die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1905 und 31. August 1906 einzusenden sind.

Göttingen, den 3. April 1905.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan:

W. Fleischmann.

Verzeichnis
der im Jahre 1904 eingegangenen Druckschriften.

A. Gesellschafts- und Institutspublikationen *).

Aachen Geschichtsverein: Zeitschrift Bd. 25 1903.

Aarau Historische Gesellschaft des Kantons Aargau: Argovia Bd. 30 1903.

Aberdeen University: Studies No. 8. 9. 1903.

Adelaide R. Society of South Australia: Transactions Vol. 27 p. 2 1903.

Agram Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti: Rad Knj. 153—156 1903—04.

— Ljetopis Svez. 18 1904.

— Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena Kń. 8 1903 svez. 2 Kń. 9 1904 svez. 1.

— Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium Vol. 9 1904.

— Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika Svez. 23 1903.

Agram Hrvatsko naravoslovno družtvo (Societas scientiarum naturalium Croatica): Glasnik God. 14 1903 God. 15 1903—04 God. 16 polov. 1 1904.

Altenburg Geschichts- und altertumsforschende Gesellschaft des Osterlandes: Mitteilungen Bd. 11 H. 3 1904.

Amiens Société des antiquaires de Picardie: Mémoires 4. Sér. T. 4 1903.

— Bulletins Ann. 1903 trim. 2—4 (1903—04) Ann. 1904 trim. 1.

Amsterdam K. Akademie van wetenschappen: Verhandelingen Wis- en natuurkundige afdlg. Sect. 1 D. 8 No. 6. 7. 1904 Sect. 2 D. 10 No. 1—6 1903—04 Afdlg. Letterkunde D. 4 No. 2 1904 D. 5 No. 4. 5. 1904.

— Verslag van de gewone vergaderingen der Wis- en natuurkundige afdeeling D. 12 1903—04.

*) Das Druckjahr ist, wenn es mit dem Jahrgange der Zeitschrift nicht übereinstimmt, in runden Klammern hinzugesetzt.

(Amsterdam) Verslagen en mededeelingen Afdeeling Letterkunde 4. R. D. 6 1904.
— Jaarboek 1903 (1904).
— (Pascolus, Johannes) Paedagogium. Carmen praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Acc. quatuor poemata laudata. 1904.

Amsterdam K. Nederlandsch aardrijkskundig genootschap: Tijdschrift 2. Ser. D. 21 1904.

Amsterdam Wiskundig genootschap: Nieuw archief voor wiskunde 2. R. D. 6 St. 3 1904.
— Wiskundige opgaven met de oplossingen D. 8 bladz. 265 vv. 1903. Nieuwe opgaven D. 9 No. 88—128.
— Programma van jaarlijksche prijsvragen voor 1904 (1903).
— Revue semestrielle des publications mathématiques T. 12 1903 (1904).
— Verslag van de 125. algemeene vergadering 1904.

Amsterdam K. zoologisch genootschap „Natura artis magistra“: Bijdragen tot de dierkunde Afl. 17 & 18 1893—1904.

Antwerpen Société r. de géographie: Bulletin T. 27 (27. & 28. ann. soc.) fasc. 3. 4. 1903—04 T. 28 (28. & 29. ann. soc.) fasc. 1—3 1904.

Athen Ksl. Deutsches Archäologisches Institut: Mitteilungen Bd. 28 1903 H. 3/4 Bd. 29 1904 H. 1. 2.

Athen Ecole française: Bulletin de correspondance hellénique Ann. 27 1903 Ann. 28 1904.

Athen *Ἐπιστημονικὴ ἑταιρεία*: *Ἀθηνᾶ T.* 15 1903 *τεῦχ.* 2/4 *T.* 16 1904 *τεῦχ.* 1/2.

Athen *Φιλολογικὸς σύλλογος Παρνασσός*: *Ἐπετηρίς Ἔτ. η´* 1904.

Augsburg Historischer Verein für Schwaben und Neuburg: Zeitschrift Jg. 30 1903.

Austin University of Texas: Bulletin No. 33. 34. (= Scientific series No. 1. 2.)

Baltimore Johns Hopkins university: Circulars Vol. 23 1904 No. 165.
— American journal of mathematics Vol. 25 No. 2—4 1903.
— Johns Hopkins university studies in historical and political science Ser. 21 1903.

Barcelona R. Academia de buenas letras: Boletín Año 3 Núm. 12 1903.

Basel Naturforschende Gesellschaft: Verhandlungen Bd. 15 H. 2. 3. 1904.

Batavia Genootschap van kunsten en wetenschappen: Verhandelingen D. 53 1904 D. 54 st. 3 1904 D. 56 st. 1 1904.

(Batavia) Notulen van de algemeene en directievergaderingen D 41 1903 aflg. 2—4 D. 42 1904 aflg. 1. 2.

— Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde D. 46 aflg. 6 1903 D. 47 aflg. 1—5 1904.

— Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India A. 1647/48. 1677. 's Gravenhage 1903—04.

— Kersjes, B., & Den Hamer, C., De tjandi Mĕndoet voor de restauratie. 1903.

— Louw, P. J. F., De Java-oorlog. D. 3. 1904.

— Stuart, H. N., Catalalogus der munten en amuletten van China, Japan, Corea en Annam. 1904.

Batavia K. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië: Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië D. 63 (X,7) 1904.

Batavia K. magnetisch en meteorologisch observatorium: Observations made at the magnetical and meteorological observatory Vol. 25 1902 (1904).

— Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië Jg. 25 1903 (1904).

Bayreuth Historischer Verein für Oberfranken: Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken Bd. 22 H. 2 (37. Bd.) 1903.

Bergen Museum: Aarbog 1903 H. 3. Aarsberetning f. 1903 (1904). Aarbog 1904 H. 1. 2.

— Sars, G. O., An account of the Crustacea of Norway Vol. 5 p. 1—6 1903—04.

Berkeley University of California: Bulletin N. S. Vol. 5 No. 2 1903 Vol. 6 No. 1. 2. 1904.

— The university chronicle Vol. 6 No. 2. 3. 1903.

— Publications Pathology Vol. 1 No. 1 1904 Physiology Vol. 1 No. 3. 4. 1903 No. 5 1903 (2 Expl.) No. 6—10 1903—04 No. 12 1904.

— Bulletin of the department of geology Vol. 3 No. 13—15 1904.

— Agricultural experiment station Bulletin 149—154 1903. Report of work from june 30, 1901, to june 30, 1903 (1903).

— Announcement of the publications. 1904.

— Diss. phil. W. Sharwood 1903.

Berlin K. Akademie der Wissenschaften: Abhandlungen a. d. J. 1903 (1904).

— Sitzungsberichte 1903 41—53 1904 1—40.

— Acta Borussica Münzwesen Beschreibender Teil H. 2 1904 Münzgeschichtlicher Teil Bd. 1 1904.

— Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen Bd. 29 1904.

Berlin Gesamtverein der deutschen Geschichts- und Altertumsvereine: Korrespondenzblatt Jg. 52 1904.

Berlin Verein für die Geschichte Berlins: Schriften H. 39 1904.
— Mitteilungen Jg. 21 1904.
— Satzungen 27/II 1904. Verzeichnis der Mitglieder No. 31 1904

Berlin Verein für Volkskunde: Zeitschrift Jg. 14 1904.

Berlin Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte: Mitteilungen Jg. 14 1904. Beihefte (Texte und Forschungen) 1—5 1903—04.
— Mitglieder-Verzeichnis 1904.

Berlin Deutsche Physikalische Gesellschaft: Verhandlungen Jg. 6 1904 No. 2—9.

Berlin K. Technische Hochschule: Hettner, G., Rede 26/I 1904.

Bern Allgemeine Geschichtforschende Gesellschaft der Schweiz: Jahrbuch für schweizerische Geschichte Bd. 29 Zürich 1904.

Bern Schweizerische Naturforschende Gesellschaft (Société helvétique des sciences naturelles): Verhandlungen (Actes) 86. Jahresversammlung 1903 Basel 1903.
— Archives des sciences physiques et naturelles Compte rendu des travaux présentés à la 86. session 1903 Genève 1903.
— Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Hrsg. v. d. Geologischen Kommission. N. F. Lfg. 14 Bern 1904.
— Beiträge zur Geologie der Schweiz. Hrsg. v. d. Geologischen Kommission. Geotechnische Serie Lfg. 3 Bern 1904.

Bern Naturforschende Gesellschaft: Mitteilungen 1903 (1904).

Bonn Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande, Westfalens und des Reg.-Bez. Osnabrück: Verhandlungen Jg. 60 1903. Beil.: Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1903 (1903—04).

Bordeaux Faculté des lettres: Annales 4. Sér. 26. Ann. 1904 Revue des études anciennes T. 6 Bulletin italien T. 4.

Bordeaux Société des sciences physiques et naturelles: Mémoires 6. Sér. T. 3 1903. (Append.:) Commission météorologique de la Gironde Observations pluviométriques et thermométriques 1902—03 (1903).
— Procès-verbaux des séances Ann. 1902—03 (1903).

Boston American academy of arts and sciences: Memoirs N. S. Vol. 13 No. 1 1904.
— Proceedings Vol. 39 No. 4—24 1903—04 Vol. 40 No. 1—7 1904.

Boulder University of Colorado: Investigations of the department of psychology and education Vol. 2 No. 1 1904.

Braunsberg Historischer Verein für Ermland: Zeitschrift für die Geschichte und Altertumskunde Ermlands Bd. 15 H. 1 (44) 1904.

Braunschweig Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig: Jahrbuch 2 Wolfenbüttel 1903.
— Braunschweigisches Magazin ebd. Bd. 8 [l.: 9] Jg. 1903.

Braunschweig Verein für Naturwissenschaft: Jahresbericht 13 f. 1901/02 u. 1902/03 (1904).

Bremen Naturwissenschaftlicher Verein: Abhandlungen Bd. 17 H. 3 1903.
— Jahresbericht 38 1902/03 (1903).

Breslau Schlesische Gesellschaft fur vaterländische Cultur: Jahresbericht 81 1903 (1904).
— Die Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur I. Die Hundertjahrfeier II. Geschichte der Gesellschaft. 1904.
— Schube, Th., Die Verbreitung der Gefässpflanzen in Schlesien. 1903.

Brisbane R. Society of Queensland: Proceedings Vol. 18 1904.

Brooklyn Museum of the Institute of arts and sciences: Memoirs of natural sciences Vol. 1 No. 1 1904.
— Cold Spring Harbor monographs No. 1. 2. 1903.

Brünn Naturforschender Verein: Bericht der meteorologischen Commission über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen 21. i. J. 1901 (1903).

Brüssel Académie r. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Mémoires couronnés et autres mémoires T. 65 1904 T. 66 1904.
— Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers T. 62 fasc. 5—7 1904.
— Bulletin de la classe des sciences 1903 No. 11. 12. 1904 No. 1--11.
— Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts 1903 No. 11. 12. 1904 No. 1—11.
— Concours pour les années 1905, 1906, 1907.
— Annuaire 70. ann. 1904.
— Commission r. d'histoire: Duvivier, Ch., Actes et documents anciens intéressant la Belgique N. S. 1903. — Matricule de l'université de Louvain 1 1903. — Actes ou procès-verbaux des séances tenues par le conseil de l'université de Louvain T. 1 1903. — La chronique de Gislebert de Mons. 1904. — Recueil des instructions générales aux nonces de Flandre. 1904 (2 Expl.).

Brüssel Société des Bollandistes: Analecta Bollandiana T. 23 1904. Indices in T. 1—20 pag. 49 ss.

Brüssel Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie: Procès-verbaux 17. Ann. T. 17 (2. Sér. T. 7) 1903 fasc. 5/6 (1904) 18. Ann. T. 18 (2. Sér. T. 8) 1904 fasc. 1—3.

Bryn Mawr College: Monographs Reprint series Vol. 1 No. 4 1904.

Budapest Magyar tudományos akadémia: Almanach 1904.

— Rapport sur les travaux en 1903 présenté par le sécrétaire général (1904).

— Nyelvtudományi közlemények Köt. 33 füz. 2—4 1903 Köt. 34 füz. 1 1904.

— Értekezések a nyelv- és széptudományok köreböl Köt. 18 füz. 6—8 1903—04.

— Értekezések a bölcseleti tudományok köreböl Köt. 5 1904.

— Értekezések a társadalmi tudományok köreböl Köt. 12 sz. 10 1903 Köt. 13 sz. 1. 2. 1903—04.

— Értekezések a történelmi tudományok köreböl Köt. 19 sz. 10 1903.

— Mathematikai és természettudományi értesitö Köt. 21 füz. 3—5 1903 Köt. 24 füz. 1. 2. 1904.

— Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn Bd. 19 1901 (1904).

— Archaeologiai értesitö Köt. 23 1903 füz. 3—5 Köt. 24 1904 füz. 1. 2.

— Karásconyi, J., A Magyar nemzetségek a XIV. század közepéig Köt. 3 fele 2 1904.

— Természettudományi könyvkiadó-vállalat 71—73 1903—04.

Budapest K. Ungar. Geologische Anstalt: Földtani közlöny (Geologische Mitteilungen) Köt. 33 1903 füz. 10/12 Köt. 34 1904 füz. 1—10.

— Jahresbericht f. 1901 (1903).

— Publikationen: Kalecsinszky, A. v., Die Mineralkohlen der Länder der Ungarischen Krone. 1903. — Halaváts, G., Allgemeine und paläontologische Literatur der pontischen Stufe Ungarns. 1904.

— Erläuterungen zur geologischen Specialkarte der Länder der Ungarischen Krone Sectionsbl. Zone 14 Col. 19 & Karte 1904.

Buenos Aires Sociedad científica Argentina: Anales T. 56 1903 entr. 4—6 T. 57 1904 T. 58 1904 entr. 1—3.

Buenos Aires Museo nacional: Anales 3. Ser. T. 2 1903 T. 3 1904.

Buenos Aires Oficina demográfica nacional (Ministerio del interior): Boletín demográfico Argentino A. 5 1904 Núm. 11.

Bukarest Academia Română: Analele Part. administrat. și desbater. T. 25 1902—03 (1903) T. 26 1903—04 (1904) Memoriile secțiunii istorice 2. Ser. T. 26 1903—04 (1904) Memoriile sectiunii scientifice 2. Ser. T. 26 1903—04 (1904).

(Bukarest) Discursuri de recepţiune 26 1904.
— Bianu, I., & Hodoş, N., Bibliografia Românéscă veche 1508—1830 T. 1 1903.
— Marian, S. Fl., Insectele în limba, credinţele şi obiceiurile Românilor. 1903.
— ders., Legendele Maicii Domnului. 1904.

Cambridge, Brit. Philosophical society: Transactions Vol. 19 p. 3 1904.
— Proceedings Vol. 12 p. 4—9 1903—04.

Cambridge, Mass. Museum of comparative zoölogy at Harvard college: Memoirs Vol. 29 Text & Plates 1904 Vol. 30 No. 1 1904.
— Bulletin Vol. 39 No. 9 1904 Vol. 41 No. 2 1904 Vol. 42 No. 5 1904 Vol. 43 No. 2/3 1904 Vol. 44 1904 Vol. 45 No. 1—3 1904 Vol. 46 No. 1. 2. 1904 Vol. 48 No. 1 1904.
— Annual report of the keeper f. 1903–04 (1904).

Charkow Université Imp.: Annales 1903 кн. 4 1904 кн. 1—3.

Charkow Société mathématique: Communications 2. Sér. T. 8 1902—04.

Charlottenburg Physikalisch-Technische Reichsanstalt: Die Tätigkeit i. J. 1903 (1904).
— Die bisherige Tätigkeit. Mit einem Verzeichnis der Veröffentlichungen aus d. J. 1901—03 (1904).

Chemnitz K. Sächs. Meteorologisches Institut: Jahrbuch Jg. 18 1900 (1904).
— Dekaden-Monatsberichte Jg. 5 1902 (1903) Jg. 6 1903 (1904).

Cherbourg Société nationale des sciences naturelles et mathématiques: Mémoires T. 33 (4. Sér. T. 3) 1902 fasc. 2 (1903).

Chicago University: The astrophysical journal Vol. 17 1903 No. 2–5 Vol. 18 1904 Vol. 19 1904 Vol. 20 1904.
— The botanical gazette Vol. 36 1903 No. 6 Vol. 37 1904 No. 1—4.
— The journal of geology Vol. 11 1903 No. 8 Vol. 12 1904 No. 1–6.
— The journal of political economy Vol. 12 1903–04.
— The American journal of Semitic languages and literatures Vol. 20 No. 2. 3. 1904.
— The American journal of sociology Vol. 8 1903 No. 5. 6. Vol. 9 1904 Vol. 10 1904 No. 1—3.

Chicago John Crerar library: Annual report 9 f. 1903 (1904).

Chicago Field Columbian museum: Publication 75 1903 77—92 1903—04 95 p. 1. 2. 1904.

Greifswald Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein: Pommersche Jahrbücher Bd. 5 1904.

Greifswald Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern und Rügen: Mitteilungen Jg. 35 1903 (1904).

Guben Niederlausitzer Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde: Niederlausitzer Mitteilungen Bd. 8 H. 1—6 1904.

Haag K. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlansch-Indië: Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië 7. Volgr. D. 2 (56) 1904.

Haarlem Hollandsche maatschappij der wetenschappen: Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles 2. Sér. T. 8 livr. 5 1903 T. 9 1904.

Haarlem Museum Teyler: Archives du Musée Teyler 2. Sér. Vol. 8 p. 5 1904.

Halle Ksl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher: Abhandlungen (Nova acta) Bd. 80. 81. 1903.

— Leopoldina H. 39 1903 No. 12 H. 40 1904 No. 1—11.

Halle Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen: Zeitschrift für Naturwissenschaften Bd. 76 H. 3—6 1903 Bd. 77 H. 1/2 1904.

Halle Verein für Erdkunde: Mitteilungen 1904.

Halle Deutsche Morgenländische Gesellschaft: Zeitschrift Bd. 57 H. 4 1903 Bd. 58 H. 1—3 1904.

Hamburg Verein für Hamburgische Geschichte: Zeitschrift Bd. 12 H. 1 1904.

— Mitteilungen Jg. 23 1903 (1904).

Hamburg Mathematische Gesellschaft: Mitteilungen Bd. 4 H. 4 1904.

Hamburg Naturwissenschaftlicher Verein: Verhandlungen 3. F. 11 1903 (1904).

Hamburg Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung: Verhandlungen Bd. 12 1900—03 (1904).

Hanau Wetterauische Gesellschaft für die gesamte Naturkunde: Bericht v. 1. April 1899—30. Sept. 1903 (1903).

Hanoi École française d'extrême-orient: Bulletin Ann. 3 1903 T. 3 No. 4 Ann. 4 1904 T. 4 No. 1—3.

Heidelberg Historisch-philosophischer Verein: Neue Heidelberger Jahrbücher Jg. 12 H. 2 1903 Jg. 13 H. 1 1904.

Heidelberg Naturhistorisch-medizinischer Verein: Verhandlungen N. F. Bd. 7 H. 3—5 1904.

Heidelberg Grhzl. Sternwarte (Astrometrisches Institut): Veröffentlichungen Bd. 3 1904.

— Mitteilungen 3. 4. 1904.

Helsingfors Finska vetenskaps-societeten: Acta societatis scientiarum Fennicae T. 28—31 1902—03.
— Öfversigt af förhandlingar 44 1901/02 (1902) 45 1902/03 1903.
— Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk H. 61 1902 H. 62 1903.
— Geologisk öfversiktskarte öfver Finland Sekt. D 2 1904.
- Observations météorologiques publ. par l'institut météorologique central Vol. 16 1897 (1904) Vol. 17 1898 (1904).
— Heinrichs, A., Etat des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1892—1893 (1904).
Helsingfors Societas pro fauna et flora Fennica: Acta Vol. 21—23 1901—02.
— Meddelanden H. 28 1901/02.
Hermannstadt Verein für Siebenbürgische Landeskunde: Archiv N. F. Bd. 31 H. 2 1903 Bd. 32 H. 1 1903 H. 2 1904.
— Jahresbericht f. 1903 (1904).
Hermannstadt Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften: Verhandlungen und Mitteilungen Bd. 52 Jg. 1902 (1903).
Innsbruck Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein: Berichte Jg. 28 1902/03 (1903).
Iowa State university: Bulletin N. S. No. 74 1904 (2 Expl.).
Ithaca Cornell university: The journal of physical chemistry Vol. 7 1903 No. 9 Vol. 8 1904.
Jassy Universităţea: Annales scientifiques de l'université T. 3 fasc. 1 1904.
Kahla Verein für Geschichts- und Altertumskunde: Mitteilungen Bd. 6 H. 2 1904.
Kalkutta Asiatic society of Bengal: Bibliotheca Indica N. S. No. 1036—1094 1903—04.
— Catalogue of printed books and manuscripts in Sanskrit fasc. 4 1904.
Kalkutta Geological survey of India: Memoirs Vol. 34 p. 3 1903 Vol. 35 p. 2 1903 p. 3 1904 Vol. 36 p. 1 1904 Palaeontologia Indica 15. Ser. Vol. 1 p. 5 1903 Vol. 4 1903.
— Records Contents and index of vols. 21—30 1887—97 (1903). Vol. 31 p. 1. 2. 1904.
— General report on the work carried on f. 1902/03 (1903).
Kalkutta Board of scientific advice for India: Annual report f. 1902—03 (1904).
Kapstadt South African association for the advancement of science: Report 1. meeting 1903.

Kapstadt South African philosophical society: Transactions Vol. 1—4 1877—88 Vol. 5 p. 2 1893 Vol. 6—14 1889—1904 Vol. 15 p. 1. 2. 1904. List of contents of vols. 1—10 and vol. 11 p. 1 & 2 1900.

Karlsruhe Grhzl. Technische Hochschule Fridericiana: Pogramm f. 1904/05 (1904).

— Klein, L., Festrede 25/XI 1903 (1904).

— Habilitationsschriften 1903—04 M. Auerbach, G. Hamel, J. Lassen la Cour, W. Ludwig.

— Dissertationen 1903—04 L. Bloch, K. Czeija, S. Heymann, F. Marguerre, H. Mehlis, H. Oesterlin, S. Ottenstein, F. Richardt, R. Russ.

Kasan Имп. Университетъ: Ученыя записки Г. 70 1903 кн. 12 Г. 71 1904.

— Bulletin de la société physico-mathématique 2. Sér. T. 13 No. 3. 4. 1903 T. 14 No. 1 1904.

Kassel Verein für Hessische Geschichte und Landeskunde: Zeitschrift N. F. Bd. 27 1903 Bd. 28 1904.

— Mitteilungen an die Mitglieder Jg. 1902 (1903) Jg. 1903/04 (1904).

Kassel Verein für Naturkunde: Abhandlungen und Bericht 48 üb. d. 67. Vereinsj. 1902/03 (1903).

Kempten Allgäuer Altertums-Verein: Allgäuer Geschichtsfreund Jg. 15 1902.

Kiel Gesellschaft für Schleswig-Holsteinsche Geschichte: Zeitschrift Bd. 33 1904. Register zu Bd. 21—30 1904.

Kiew Общество естествоиспытателей (Société des naturalistes): Записки (Mémoires) T. 18 1904.

Kioto College of science and engineering, Imp. University: Memoirs Vol. 1 1903 1.

Klagenfurt Geschichtsverein für Kärnten: Carinthia I Jg. 93 1903.

— Jahres-Bericht üb. 1902 u. Voranschlag f. 1903 (1903).

Klausenburg Erdélyi múzeum-egylet: Értesitö I. Orvosi szak Évf. 28 1903 Köt. 25 füz. 1—3 (1903—04) II. Természettudományi szak Évf. 28 1903 Köt. 25 füz. 1. 2.

Köln Historischer Verein für den Niederrhein: Annalen H. 77. 78. Beih. 7. 1904.

Königsberg i. Pr. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft: Schriften Jg. 44 1903.

Kopenhagen Det K. Danske Videnskabernes Selskab: Skrifter Histor. og filosof. Afd. 6. R. Bd. 6 No. 2 1904 Naturvidensk. og mathem. Afd. 6. R. Bd. 12 No. 4 1904 7. R. Bd. 1 No. 1—3 1904 Bd. 2 No. 1—3 1904.

— Oversigt over Forhandlinger 1903 No. 6 (1904) 1904 No. 1—5.

Krakau Akademia umiejętności: Anzeiger der Akademie der Wissenschaften Philol. Kl. & Histor.-philos. Kl. 1903 Nr. 8—10 1904 Nr. 1—7 Mathem.-naturwiss. Kl. 1903 Nr. 8—10 1904 Nr. 1—7.

— Katalog literatury naukowej polskiej wydawany przez komisyę bibliograficzną wydziału matematyczno-przyrodniczego T. 3 1903 zesz. 2—4.

Laibach Musealverein für Krain: Mitteilungen Jg. 16 1903 Jg. 17 1904 H. 1.

— Izvestja muzejskega društva za Kranjsko Letn. 13 1903.

Landshut Historischer Verein für Niederbayern: Verhandlungen Bd. 40 1904.

Lawrence University of Kansas: Science bulletin 1. Ser. Vol. 2 No. 1—15 1903—04.

Leiden Maatschappij der Nederlandsche letterkunde: Handelingen en mededeelingen 1903/04 (1904).

— Levensberichten der afgestorven medeleden 1904.

— Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde D. 22 (N. R. 14) aflg. 3. 4. 1904 D. 23 (N. R. 15) aflg. 1. 2. 1904.

— Nederlandsche volksboeken 8. 9. 1904.

Leipzig K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften: Abhandlungen Philol.-histor. Kl. Bd. 22 No. 4—6 1904 Bd. 24 No. 1—3 1904 Mathem.-phys. Kl. Bd. 28 No. 6. 7. 1904 Bd. 29 No. 1. 2. 1904.

— Berichte über die Verhandlungen Philol.-histor. Kl. Bd. 55 1903 H. 3—6 Bd. 56 1904 H. 1—3 Mathem.-phys. Kl. Bd. 55 1903 H. 6 Bd. 56 1904 H. 1—4.

Leipzig Naturforschende Gesellschaft: Sitzungsberichte Jg. 28/29 1901/02 (1903).

Leisnig Geschichts- und Altertums-Verein: Mitteilungen H. 12 1904.

Lemberg Towarzystwo ludoznawczy: Lud T. 9 1903 zesz. 4 T. 10 1904 zesz. 1—3.

Linz Museum Francisco-Carolinum: Jahres-Bericht 62 1904.

Liverpool Biological society: Proceedings and transactions Vol. 18 Sess. 1903—04 (1904).

London R. Society: Philosophical Transactions Ser. A Vol. 199 1902 Vol. 203 1904 Vol. 204 pag. 1—219 1904 Ser. B Vol. 196 pag. 295—388 1903 Vol. 197 pag. 1—345 1904.

(London) Proceedings Vol. 72—74 1903—04.
— Year-book No. 8 1904.
— Obituary notices of fellows p. 1—3 1904.
— Catalogue of scientific papers 1800—1883 Suppl. vol. (Vol. 12) 1902.

London Mathematical society: Proceedings 2. Ser. Vol. 1 p. 3—7 1904 Vol. 2 p. 1—4 1904.
— List of members 12. nov. 1903 (1903—04 40. sess.).

London R. astronomical society: Memoirs Vol. 54 1899—1901 (1904); appendix 1—5 1901—03 Vol. 55 1904; appendix 1 1904.
— Monthly notices Vol. 64 No. 2—9 1903—04 Vol. 65 No. 1 1904.

London R. microscopical society: Journal 1904.

London Linnean society: Transactions 2. Ser. Botany Vol. 6 p. 7—9 1904 Zoology Vol. 8 p. 13 1903 Vol. 9 p. 3—5 1903—04.
— Proceedings from nov. 1903 to june 1904 (1904).
— Journal Botany Vol. 35 No. 248 1903 Vol. 36 No. 253. 254. 1904 Vol. 37 No. 257 1904 Zoology Vol. 29 No. 189. 190. 1904.
— List 1904—05 (1904).

London Zoological society: Proceedings of the general meetings for scientific business f. 1903 Vol. 2 p. 2 1904 f. 1904 Vol. 1 p. 1 1904.

London Secretary of the admiralty: Report of H. M.'s astronomer at the Cape of good hope f. 1903 (1904).

Lucca R. Accademia di scienze, lettere ed arti: Atti T. 21—23 1882—84 T. 25—31 1889—1902.

Lübeck Verein für Lübeckische Geschichte und Altertumskunde: Mitteilungen H. 11 1903.

Lüttich Société r. des sciences: Mémoires Sér. 3 T. 5 1904.

Lüttich Société géologique de Belgique: Mémoires T. 2 livr. 1 1904 T. 30 livr. 2 1904 T. 31 livr. 1—3 1904.

Lund Universitetet: Årsskrift (Acta universitatis Lundensis) T. 38 No. 1. 2. 1902.

Luxemburg Institut gr.-duc.: Publications Section historique Vol. 52 fasc. 1 1903 Section des sciences naturelles et mathématiques T. 27 1904.

Luzern Historischer Verein der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug: Der Geschichtsfreund Bd. 59 1904.

Lyon Académie des sciences, belles-lettres et arts: Mémoires 3. Sér. Sciences et lettres T. 7 1903.

Lyon Société Linnéenne: Annales N. S. T. 49 1903 T. 50 1904.

Lyon Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles: Annales 7. Sér. T. 9 1901 (1902) T. 10 1902 (1903) 8. Sér. T. 1 1903 (1904).

Lyon Université: Annales N. S. I. Sciences, Médecine Fasc. 12—15 1903—04 II. Droit, Lettres Fasc. 11—13 1903.

— Bulletin historique du diocèse de Lyon paraissant sous le patronage des facultés catholiques Ann. 5 1904.

Madison Wisconsin academy of sciences, arts and letters: Transactions Vol. 13 p. 2 1901 (1902) Vol. 14 p. 1 1902 (1903).

Madison Wisconsin geological and natural history survey: Bulletin No. 9—13 1903—04.

Madras government museum: Bulletin Vol. 5 No. 1 1903.

Madrid R. Academia de la historia: Boletín T. 44. 45. 1904.

Madrid R. Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales: Revista T. 1 1904 No. 1—5.

Magdeburg Verein für Geschichte und Altertumskunde des Herzogtums und Erzstifts Magdeburg: Geschichts-Blätter für Stadt und Land Magdeburg Jg. 38 1903 H. 2 Jg. 39 1904 H. 1.

Mailand R. Istituto Lombardo di scienze e lettere: Memorie Cl. di scienze matem. e natur. Vol. 19 (3. Ser. 10) fasc. 10—13 1903—04 Vol. 20 (3. Ser. 11) fasc. 2 1903.

— Rendiconti 2. Ser. Vol. 36 p. 17—20 1903—04 Vol. 37 p. 1—16 1904.

Manchester Literary uud philosophical society: Memoirs and proceedings 4. Ser. Vol. 48 1903/04.

Manchester Victoria university: Publications Economic series No. 1 1904 Historical series No. 1. 2. 1904.

— Studies from the physical and chemical laboratories of the Owens college Vol. 1 1893.

— Historial essays by members of the Owens college, published in commemoration of its jubilee 1902.

Mannheim Altertumsverein: Mannheimer Geschichtsblätter Jg. 5 1904 Jg. 6 1905 No. 1.

Maredsous Abbaye: Revue Bénédictine Ann. 21 1904.

— Anecdota Maredsolana Vol. 3 p. 3 1903.

Medford Tufts college: Studies Vol. 1 No. 8 1904.

Meiningen Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte und Landeskunde: Schriften H. 46—49 1903—04.

Meissen Verein für Geschichte der Stadt Meissen: Mitteilungen Bd. 6 H. 3 1903.

Melbourne R. Society of Victoria: Proceedings N. S. Vol. 16 p. 2 1904 Vol. 17 p. 1 1904.

Melbourne Secretary for mines and water supply of Victoria: Annual report f. 1903.

Metz Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde: Jahr-Buch Jg. 15 1903.

Mexiko Instituto geológico: Boletín No. 7—11 1897—98.

— Parergones T. 1 No. 1—5 1903—04.

Mexiko Observatorio meteorológico central: Boletín mensual 1902 marzo—julio.

Missoula University of Montana: Bulletin No. 16 1904 No. 18—23 1903—04.

Mölln Verein für die Geschichte des Herzogtums Lauenburg: Archiv Bd. 7 (= Vaterländisches Archiv für das Herzogtum Lauenburg N. F. Bd. 10) H. 3 1904.

Montevideo Museo nacional: Anales 2. Ser. Entr. 1 1904. Sección histór.-philos. T. 1 1904.

Montgomery Geological survey of Alabama: Smith, E. A., & Mc Calley, H., Index to the Mineral resources of Alabama. 1904.

Montpellier Académie des sciences et lettres: Mémoires 2. Sér. Sect. d. sciences T. 3 No. 3 1903 Sect. d. lettres T. 4 No. 2 1904.

Moskau Математическое общество (Société mathématique): Математическій сборникъ T. 23 вып. 3. 4. 1902 T. 24 вып. 2. 3. 1904.

Moskau Société imp. des naturalistes: Bulletin Ann. 1903 No. 2—4 Ann. 1904 No. 1.

Moskau Духовная академія: Богословский вѣстникъ T. 12 1903 декабрь T. 13 1904.

— Преподобнаго отца нашего Макарія Египетскаго духовныя бесѣды, посланіе и слова, съ присовокупленіемъ свѣдѣній о жизни его и писаніяхъ. Переведены съ греческаго. Изд. 4. 1904.

Mount Hamilton Lick observatory (University of California): Publications Vol. 6 1903.

— Bulletin No. 50—64 1904.

München K. Bayer. Akademie der Wissenschaften: Abhandlungen Histor. Kl. Bd. 23 Abt. 1 1903.

— Sitzungsberichte d. philos.-philol. u. histor. Kl. Jg. 1903 H. 4. 5. (1904) Jg. 1904 H. 1—3. Sitzungsberichte d. mathemat.-physik. Kl. Jg. 1903 H. 4 (1904) Jg. 1904 H. 1. 2.

— Simonsfeld, H., Wilhelm Heinrich Riehl als Kulturhistoriker (Festrede) 1898.

(München) Pöhlmann, R., Griechische Geschichte im neunzehnten Jahrhundert (Festrede) 1902.
— Plan eines Corpus der griechischen Urkunden des Mittelalters und der neueren Zeit 1903.
— Veröffentlichungen des Erdmagnetischen Observatoriums bei der K. Sternwarte H. 1 1904.
München Historischer Verein von Oberbayern: Oberbayerisches Archiv für vaterländische Geschichte Bd. 52 H. 1 1904.
— Altbayerische Forschungen 2/3 1904.
— Altbayerische Monatsschrift Jg. 4 1903 H. 4. 5.
Neapel Società R.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche 3. Ser. Vol. 9 (Anno 42) 1903 fasc. 8—12 Vol. 10 (Anno 43) 1904 fasc. 1—7.
Neuburg a. D. Historischer Verein: Neuburger Kollektaneen-Blatt Jg. 65 1901.
New Haven American oriental society: Journal Vol. 24 half 2 1903 Vol. 25 half 1 1904.
New Haven Astronomical observatory of Yale university: Transactions Vol. 1 p. 7/8 1904.
— Report f. 1900—04.
New York American mathematical society: Bulletin Vol. 10 No. 4—10 1904 Vol. 11 No. 1—3 1904. General index 1891—1904 (1904).
— Annual register Jan. 1904.
(New York) The astronomical and astrophysical society of America: Meeting 2 New York 1900 (repr. from „Science" N. S. Vol. 12 1900) Meeting 3 Washington 1901 (repr. from „Science" N. S. Vol. 15 1902) Meeting 4 Washington 1902 (repr. from „Science" N. S. Vol. 17 1903).
New York American geographical society: Journal Vol. 35 1903 No. 5 Vol. 36 1904.
New York Columbia university: Quarterly Vol. 6 No. 1 1903.
Nürnberg Germanisches Nationalmuseum: Anzeiger (& Mitteilungen) Jg. 1903.
Nürnberg Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg: Mitteilungen H. 16 1904.
— Jahresbericht 26. Vereinsj. 1903 (1904).
— Die Pflege der Dichtkunst im alten Nürnberg. 1904.
Nürnberg Naturhistorische Gesellschaft: Jahresbericht f. 1903 (1904).
Odessa Новороссійское общество естествоиспытателей (Société des naturalistes de la Nouvelle Russie): Записки (Mémoires) 25 1903—04. Прилож. 1903.

Osnabrück Verein für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück: Mitteilungen Bd. 28 1903 (1904).

Ottawa Geological survey of Canada: No. 883 1904. Sheet 42—48. 56—58.

— Annual report N. S. Vol. 12 1899 & maps Vol. 13 1903 & maps.

— Report on the great landside at Frank, Alta. 1903 (1904).

— White, J., Altitudes in the dominion of Canada. 1901. Profiles sheet 1—4.

— White, J., Dictionary of altitudes in the dominion of Canada. 1903.

Palermo Società di scienze naturali ed economiche: Giornale di scienze naturali ed economiche Vol. 24 A 1904.

Palermo Circolo matematico: Rendiconti T. 18 1904.

— Annuario A. 21 1904.

Paris Académie des inscriptions et belles lettres: Note de la commission chargée d'examiner le projet tendant à la publication d'une édition critique du Mahābhārata. 1904. (3 Expl.)

— Glasson, E., Mémoire sur la condition civile des étrangers en France. 1904.

Paris Académie des sciences: Laplace, P. S., Oeuvres complètes T. 13 1904.

Paris Société mathématique de France: Bulletin T. 31 1903 fasc. 4 T. 32 1904 fasc. 1—3.

Paris École polytechnique: Journal 2. Sér. Cah. 9 1904.

Paris Musée Guimet: Revue de l'histoire des religions Ann. 24 1903 T. 48 Ann. 25 1904 T. 49 No. 1. 2.

Philadelphia American philosophical society: Procedings Vol. 42 1903 No. 173 Vol. 43 1904 No. 174—176.

Philadelphia Academy of natural sciences: Proceedings Vol. 55 1903 p. 2. 3. Vol. 56 1904 p. 1.

Philadelphia American academy of political und social science: Annals Vol. 23. 24. 1904.

Philadelphia University of Pennsylvania: The university bulletins 4. Ser. No. 2 p. 2 (provost's report 1903) 1903.

— Catalogue 1903/04 (1903).

— Proceedings of university day febr. 22, 1904.

— Proceedings of commencement june 15, 1904.

Philadelphia Alumni association of the College of pharmacy: Alumni report Vol. 39 1903 No. 12 Vol. 40 1904 No. 1—4.

Pisa Società Toscana di scienze naturali: Atti Memorie Vol. 20 1904 Processi verbali Vol. 14 1903/05 No. 1—5.

Pisa R. Scuola normale superiore: Annali Scienze fisiche e matematiche 9 1904.

Plauen i. V. Altertumsverein: Mitteilungen 16 1903/04 (1904) & Beil.: Raab, C. v., Das Amt Pausa. 1903.

Posen Historische Gesellschaft für die Provinz Posen: Zeitschrift Jg. 18 1903.

— Historische Monatsblätter für die Provinz Posen Jg. 4 1903.

Posen Kaiser-Wilhelm-Bibliothek: Die Begründung der Kaiser-Wilhelm-Bibliothek i. d. J. 1898—1902 (1904).

— Jahresbericht 1 1902 2 1903 (1904).

Potsdam K. Preuss. Geodätisches Institut: Veröffentlichung N. F. No. 14—17 1904.

— Centralbureau der internationalen Erdmessung N. F. der Veröffentlichungen No. 9. 10. 1904.

— Verhandlungen der 14. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung 1903 Th. 1 (1904).

Prag K. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften: Sitzungsberichte Cl. f. Philos., Gesch. u. Philol. Jg. 1903 (1904) Mathem.-Naturwiss. Cl. Jg. 1903 (1904).

— Jahresbericht f. 1903 (1904).

Prag Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen: Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit i. J. 1903 (1904).

— Bibliothek Deutscher Schriftsteller aus Böhmen Bd. 14 1904.

Prag Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen: Mitteilungen Jg. 42 1903—04.

Prag Deutscher Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos": Sitzungsberichte Jg. 1903 N. F. Bd. 23 (51).

Prag K. K. Sternwarte: Magnetische und meteorologische Beobachtungen Jg. 64 1903 (1904).

Pressburg Verein für Natur- und Heilkunde: Verhandlungen N. F. Bd. 15 (24) Jg. 1903 (1904).

Princeton Theological seminary of the presbyterian church: The Princeton theological review Vol. 2 1904 No. 1. 2.

Regensburg Historischer Verein von Oberpfalz und Regensburg: Verhandlungen Bd. 55 (N. F. 47) 1903.

Rennes Société scientifique et médicale de l'ouest: Bulletin T. 12 1903 No. 4 T. 13 1904 No. 1. 2.

Rennes Faculté des lettres: Annales de Bretagne T. 19 No. 2—4 1904.

— Bibliothèque Bretonne Armoricaine Fasc. 3 1900.

Rom R. Accademia dei Lincei: Atti Cl. di scienze fisiche, matematiche e naturali Rendiconti 5. Ser. Vol. 12 1903 2. Sem. fasc. 12 Vol. 13 1904 1. Sem. fasc. 1—12 2. Sem. fasc. 1—11 Cl. di scienze morali, storiche e filologiche P. 1 Memorie A. 297—300 1900—03 Vol. 8—11 (1903—04) P. 2 Notizie degli scavi 5. Ser. Vol. 11 1903 fasc. 9—12 & indici.

— Rendiconti Cl. di scienze morali, storiche e filologiche 5. Ser. Vol. 12 1903 fasc. 11/12 Vol. 13 1904 fasc. 1—8.

— Atti A. 301 1904 5. Ser. Notizie degli scavi di antichità Vol. 1 fasc. 1—3.

— Rendiconto dell' adunanza solenne del 5 giugno 1904.

Rom R. Società Romana di storia patria: Archivio Vol. 27 fasc. 1/2 1904.

Rostock Verein für Rostocks Altertümer: Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock Bd. 4 H. 1 1904.

Rotterdam Société Batave de philosophie expérimentale: Programme 1904.

Saint Louis Academy of science: Transactions Vol. 12 No. 9 1902 No. 10 1903 Vol. 13 1903—04 Vol. 14 No. 1—6 1904.

Salzwedel Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte und Industrie Abt. f. Geschichte: Jahresbericht 31 H. 2 1904.

San Francisco California academy of sciences: Memoirs Vol. 3 1903.

— Proceedings 3. Ser. Zoology Vol. 3 No. 5. 6. 1903 Botany Vol. 2 No. 10 1902 Geology Vol. 2 No. 1 1902 Math.-Phys. Vol. 1 No. 8 1903.

San Francisco Geographical society of California: Transactions and proceedings 2. Ser. Vol. 3 1904.

Sankt Petersburg Académie Imp. des sciences: Mémoires 8. Sér. Cl. des sciences phys. et mathémat. T. 13 No. 6 1903 T. 14 1903—04 T. 15 1904 T. 16 No. 1—3 1904 Cl. des sciences histor.-philolog. T. 6 No. 5 1903 No. 6 1904.

— Annuaire du musée zoologique T. 8 1903 No. 2—4 T. 9 1904 No. 1. 2.

— Comptes rendus des séances de la commission sismique permanente T. 1 livr. 3 1904.

— Annales de l'observatoire physique central Nicolas Ann. 1900 supplément (1902) Ann. 1902 p. 1. 2. & supplément 1904.

— *Βυζαντινὰ Χρονικὰ* T. 9 1902 No. 3/4 T. 10 1903.

— Сборникъ отдѣленія русскаго языка и словесности T. 74 1903 T. 75 1904.

Sankt Petersburg Имп. Русск. географическое общество: Извѣстія Т. 39 1903 вып. 4. 5. Т. 40 1904 вып. 1/2.

— Отчетъ за 1903 годъ (1904).

Sankt Petersburg Имп. Русск. археологическое общество: Записки отдѣленія русской и славянской археологіи Т. 5 вып. 1 1903 Т. 6 1903.

— Записки восточнаго отдѣленія Т. 14 вып. 2—4 1902 (2. Expl.) Т. 15 вып. 1 1903.

Sankt Petersburg Духовная академія: Церковный вѣстникъ Г. 29 1903 No. 47—52 Г. 30 1904 No. 1—48. Прилож.: Христіанское чтеніе Г. 83 1903 Т. 216 декабрь Г. 84 1904 Т. 217 Т. 218 іюль—ноябрь. Странникъ Г. 44 1903 декабрь.

Santiago Sociedad científica de Chile: Actas T. 12 1902 entr. 4. 5. (1903) T. 13 1903 entr. 1—3.

Santiago Universidad: Anales T. 112/113 Año 61 1903 T. 114/115 Año 62 1904 enero-abril.

São Paulo Sociedade scientifica: Relatorio da directoria 1903—04 (1904).

Sarajevo Bosnisch-Hercegovinische Landesregierung: Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien-Hercegovina i. J. 1900 (1903).

Schaffhausen Historisch-antiquarischer Verein: Neujahrsblatt 13 1905.

Siena R. Accademia dei rozzi: Bulletino Senese di storia patria A. 11 1904 fasc. 1/2.

Stavanger Museum: Aarshefte Aarg. 14 f. 1903 (1904).

Stockholm K. Svenska vetenskaps-akademien: Handlingar N. F. Bd. 37 1903 H. 4—8 Bd. 38 1904 H. 1—5.

— Les Prix Nobel en 1901 (1904).

— Årsbok (2.) f. 1904.

— Arkiv för kemi, mineralogi och geologi Bd. 1 H. 2 1904.

— Arkiv för botanik Bd. 1 H. 4 1904 Bd. 2 1904 Bd. 3 1904.

— Arkiv för zoologi Bd. 1 H. 3. 4. 1904.

— Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium Bd. 8 H. 1 1903.

— Meteorologiska iakttagelser i Sverige, anstälda under inseende af Meteorologiska Central-Anstalten Bd. 43 (2. Ser. Bd. 29) 1901 (1903) Bd. 44 (2. Ser. Bd. 30) 1902 (1904) Bd. 45 (2. Ser. Bd. 31) 1903 (1904).

Stockholm K. Vitterhets historie och antikvitets akademien: Månadsblad Årg. 30 & 31 1901 & 1902 (1904).
— Antiquarisk tidskrift för Sverige D. 17 H. 23 1904.
Stockholm K. Biblioteket: Sveriges offentliga bibliotek accessions-katalog 16 1901 (1902—03).
Strassburg Historisch-litterarischer Zweigverein des Vogesen-Clubs: Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Literatur Elsass-Lothringens Jg. 20 1904.
Strassburg Ksl. Universitäts-Sternwarte: Annalen Bd. 3 1904.
Stuttgart Württ. Kommission für Landesgeschichte: Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte N. F. Jg. 13 1904.
Sydney Australian association for the advancement of science: Report of the 2. meeting 1890 9. meeting 1902.
Taschkent Observatoire astronomique et physique: Publications No. 4. 5. 1904.
Thorn Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst: Mitteilungen H. 13 1904.
— Boethke, K., Geschichte des Coppernicus-Vereins. 1904.
Tokio Medicinische Facultät der Ksl.-Japan. Universität: Mitteilungen Bd. 6 No. 2 1903.
Tokio College of science, Imp. University: Journal Vol. 19 p. 2—4 1904 p. 9 1904 p. 11—20 1904 Vol. 20 art. 1. 2. 1904.
Tokio Earthquake investigation committee: Publications in foreign languages No. 15—18 1904.
Tokio Sūgaku-Buturigakkwa (Mathematico-physical society): Hōkoku Vol. 2 No. 5. 6. 1904.
— Kiji-Gaiyō Vol. 2 No. 7—12 1904.
Torgau Altertums-Verein: Veröffentlichungen 17 1904.
Toronto Canadian institute: Transactions Vol. 7 p. 3 (No. 15) 1904.
— Proceedings N. S. Vol. 2 p. 6 (No. 11) 1904.
Toulouse Faculté des sciences: Annales 2. Sér. T. 5 1903 fasc. 3. 4. T. 6 1904 fasc. 1.
Turin R. Accademia delle scienze: Memorie 2. Ser. T. 54 1904.
— Atti Vol. 39 1904 & (Annesso:) R. Osservatorio astronomico Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1903 (1904).
Upsala R. Societas scientiarum: Nova acta 3. Ser. Vol. 20 fasc. 2 1904.
Upsala Humanistisk vetenskapssamfundet: Skrifter Bd. 8 1902—03.
Upsala Observatoire météorologique de l'Université: Bulletin mensuel Vol. 35 1903 (1903—04).
Urbana Illinois state laboratory of natural history: Bulletin Vol. 7 art. 1—3 1904.

Washington Smithsonian institution: Bulletin of the United States national museum (special bulletin) American hydroids P. 2 1904.
— Proceedings of the United States national museum Vol. 26 1903 Vol. 27 1904.
— Report of the national museum f. the year ending june 30, 1901 (1903) 1902 (1904).
Washington United States naval observatory: Publications 2. Ser. Vol. 5 1903.
— Report of the superintendent f. the fiscal year ending june 30, 1904.
Washington United States coast and geodetic survey: Report of the superintendent (72. annual) from july 1, 1902, to june 30, 1903 (1903).
— List and catalogue of the publications 1816—1902 (1902).
Washington United States geological survey: Bulletin No. 208—233 1903—04 No. 241 1904.
— Annual report 24 1902—03 (1903).
— Monographs Vol. 44 1903 Vol. 45 & atlas 1903 Vol. 46 1904.
— Professional paper No. 9 1903 No. 10 1902 No. 11—28 1903—04.
— Water-supply and irrigation papers No. 80—98 1903—04 No. 101. 102. 104. 1904.
— Mineral resources of the United States 1902 (1904).
— Geological atlas of the United States fol. 91—106 1903—04.
Washington National bureau of standards: Annual report of the director for the fiscal year ended june 30, 1903.
— Bureau circular No. 1—7 1903—04.
— Bulletin Vol. 1 No. 1 1904.
Washington Carnegie institution: Year-book No. 1 1902 (1903) No. 2 1903 (1904).
Wien Ksl. Akademie der Wissenschaften: Denkschriften Philos.-histor. Kl. Bd. 49. 50. 1904 Mathem.-naturwiss. Kl. Bd. 74 1904.
— Sitzungsberichte Philos.-histor. Kl. Bd. 146 Jg. 1902/03 (1903) Bd. 147 Jg. 1903 (1904) Bd. 148 Jg. 1903/04 (1904) Mathem.-naturwiss. Kl. Abt. 1 Jg. 1902 Bd. 111 H. 10 Jg. 1903 Bd. 112 Jg. 1904 Bd. 113 H. 1—4 Abt. 2a Jg. 1903 Bd. 112 Jg. 1904 Bd. 113 H. 1—7 Abt. 2b Jg. 1903 Bd. 112 Jg. 1904 Bd. 113 H. 1—6 Abt. 3 Jg. 1903 Bd. 112 Jg. 1904 Bd. 113 H. 1—5.
— Almanach Jg. 53 1903 (2 Expl.).

(Wien) Archiv für österreichische Geschichte. Hrsg. v. der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Kommission. Bd. 92 Hälfte 2 1903 Bd. 93 Hälfte 1 1904.

— Fontes rerum Austriacarum. Hrsg. v. der Historischen Kommission. Abt. 1 Scriptores Bd. 9 Hälfte 1 1904. Abt. 2 Diplomataria et Acta Bd. 56 1903 Bd. 57 1904.

— Der römische Limes in Österreich H. 3 1902 H. 4 1903.

— Promemoria über den Plan einer kritischen Ausgabe des Mahābhārata ausgearbeitet von Jacobi, Lüders und Winternitz (Sonderabdr. a. d. Almanach) 1904. (4 Expl.)

— Mitteilungen der Erdbeben-Kommission N. F. No. 14—24 1903—04.

Wien Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Monatsblatt Bd. 1 (Jg 2) No. 13—24 1904.

— Jahrbuch für Landeskunde von Niederösterreich N. F. Jg. 2 1903 (1904).

— Topographie von Niederösterreich Bd. 5 Bog. 137—152 (Schluss) 1903 Bd. 6 H. 1/2 1903.

Wien K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft: Verhandlungen Bd. 53 Jg. 1903 H. 10 Bd. 54 Jg. 1904 H. 1—9.

Wien v. Kuffner'sche Sternwarte: Publikationen Bd. 6 T. 3. 4. 1904.

Wien OesterreichischeGradmessungs-Kommission: (Publikationen für die internationale Erdmessung) Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des K. u. K. militär-geographischen-Institutes Bd. 20 1903.

Wien K. K. Geologische Reichsanstalt: Abhandlungen Bd. 19 H. 2. 3. 1904.

— Verhandlungen 1903 No. 16—18 1904 No. 1—12.

— Jahrbuch 1903 Bd. 53 H. 2—4 1904 Bd. 54 H. 1.

Wien K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus: Jahrbücher Jg. 1902 (Bd. 47) N. F. Bd. 39 (1904).

— Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. Prof. Dr. J. M. Pernter. Bd. 20 1903 H. 12 Bd. 21 1904 H. 1—11.

Wiesbaden Verein für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung: Annalen Bd. 33 H. 2 1904.

— Mitteilungen an seine Mitglieder Jg. 1903/04.

Wiesbaden Nassauischer Verein für Naturkunde: Jahrbücher Jg. 57 1904.

Winterthur Naturwissenschaftliche Gesellschaft: Mitteilungen H. 5 Jg. 1903 u. 1904 (1904).

Worms Altertums-Verein: Vom Rhein Jg. 3 1904.

Würzburg Historischer Vereiu von Unterfranken und Aschaffenburg: Archiv Bd. 45 1903.
— Jahres-Bericht 1902 (1903).
Würzburg Physikalisch-medizinische Gesellschaft: Verhandlungen N. F. Bd. 35 No. 8 1903 Bd. 36 1903—04 Bd. 37 No. 1. 2. 1904.
— Sitzungsberichte 1903 1904 No. 1—3.
Zürich Antiquarische Gesellschaft: Mitteilungen Bd. 26 H. 2 1904.
Zürich Naturforschende Gesellschaft: Vierteljahrsschrift Jg. 48 1903 H. 3/4 Jg. 49 1904 H. 1/2.
— Astronomische Mitteilungen Nr. 95 1904 (Separatabdr. a. d. Vierteljahrsschrift Jg. 49 1904).
Zürich Physikalische Gesellschaft: Mitteilungen No. 1 1901 No. 6. 7. 1904.
Zürich Schweizerisches Landesmuseum: Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde (& Mitteilungen aus dem Verbande der Schweizerischen Altertumssammlungen) N. F. Bd. 5 1903 No. 2—4 Bd. 6 1904/05 No. 1. (Beil.:) Rahn, J. R., Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler: Die Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens beschrieben von R. Durrer Bog. 17.
— Jahresbericht 12 1903 (1904).

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Abbe, Ernst, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1 Jena 1904.
Abel, Eugen, Analecta nova ad historiam renascentium in Hungaria litterarum spectantia. Ex scriptis relictis cum commentariis edidit partimque auxit Stephanus Hegedüs. Budapestini 1903.
Abhandlungen, Astronomische, als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten hrsg. v. H. Kreutz No. 5—7 Kiel 1904.
Acta mathematica hrsg. v. G. Mittag-Leffler 28. 29. Stockholm 1904.
Albrecht, Th., Neue Bestimmungen des geographischen Längenunterschiedes Potsdam-Greenwich. (Aus: Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1904.)
Archiv für Religionswissenschaft 7. Bd. Prospektheft enth. Auszüge aus den im ersten Doppelheft erschienenen Aufsätzen Leipzig 1904.
Berlanga, Manual R. de, Catálogo del Museo Loringiano. Malaga 1903.

Berthold, G., Untersuchungen zur Physiologie der Pflanzlichen Organisation T. 2 Hälfte 1 Leipzig 1904.

De **Beylié,** Le palais d' Angkor Vat, ancienne résidence des rois khmers. Hanoi 1904. (1903).

Bjerknes, V., Carl Anton Bjerknes. Gedächtnisrede geh. vor der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania am 17. April 1903. Leipzig 1903 (1904).

Brioschi, Francesco, Opere matematiche. Pubbl. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 3 Milano 1904.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes publ. sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'instruction publique Sér. 2 T. 5 Paris 1903.

Χατξιδάκις, Γ. Ν., 'Ακαδημεικὰ ἀναγνώσματα Τ. Β' 'Εν 'Αθήναις 1904 (= *Βιβλιοθήκη Μαρασλῆ 'Αριθ.* 225—228).

— *Γραμματικὰ ζητήματα. 'Εν 'Αθήναις* 1904.

La **Chronique** de France. Publ. sous la direction de Pierre de Coubertin. Paris Ann. 4 1903 & Carnet bibliographique (1904).

Conwentz, H., Die Gefährdung der Naturdenkmäler und Vorschläge zu ihrer Erhaltung. Berlin 1904.

Davidson, George, The Alaska boundary. Publ. by the Alaska parkers association. San Francisco 1903.

Le **Devoir.** Revue des questions sociales réd. par J. Pascaly. T. 28 Au familistère, Guise (Aisne) 1904.

Ebstein, W., Exodin, ein neues Abführmittel. (Aus: Deutsche medizin. Wochenschrift 1904.)

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées éd. franç. T. 1 vol. 1 fasc. 1 Paris & Leipzig 1904.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (2 Expl.:) Bd. 1 H. 8 Bd. 2, 1 H. 5 Bd. 3, 2 H. 2 Bd. 4, 1 II H. 1 Bd. 5, 2 H. 1 Leipzig 1904.

Fuchs, L., Gesammelte Mathematische Werke Bd. 1 Berlin 1904.

Galilei, Galileo, Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d' Italia. Vol. 14 Firenze 1904.

Grenander, S., Les variations annuelles de la température dans les lacs suèdois. (Repr. from Bull. of the Geol. Instit. of Upsala Vol. 6.) Uppsala 1904.

Guhl, G., Lücken-Quadrate. Zürich 1904.

Hänisch, V., Konstruktion zur Ermöglichung der „Intermittierenden Kraftausnützung". Wien 1904. (Sond.-Abdr. a. d. Zeitschr. d. Oesterr. Ingen.- u. Archit.-Vereines 1904.)

Hallock-Greenewalt, Mary, Pulse and Rhythm. (Aus: The Popular Science Monthly 1903.)

Hauswaldt, Hans, Interferenz-Erscheinungen im polarisirten Licht. Photographisch aufgenommen. Neue Folge. Magdeburg 1904.

Helmord, G., Results of harmonic analysis of the diurnal variation at the Cape of Good Hope and at Hobart. (From Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity 1904.)

Hell, Camillo, Ideale Planimetrie. Eine Botschaft vom Gesetz der Kreise. Wien 1904.

Helmert, F. R., Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. (Aus: Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1904.)

Hoppe, Edmund, Die Philosophie Leonhard Eulers. Gotha 1904.

Jaarboek, Paedologisch, Stad Antwerpen, on der redactie van M. C. Schuyten Jaarg. 5 Antwerpen 1904.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe u. Georg Wallenberg. Bd. 33 Jg. 1902 H. 1. 2. Berlin 1904.

Janko, Josef, Soustava dlouhých slabik koncových v staré germanštině. V Praze 1903.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publ. pelo F. Gomes Teixeira Vol. 15, 3. 4. Coimbra 1903—04.

Kalecsinsky, Alexander v., Über die Akkumulation der Sonnenwärme in verschiedenen Flüssigkeiten. (Sonderabdr. a. d. Mathematischen u. Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn 21.) Leipzig 1904.

Karpinsky, A., Ueber die eocambrische Cephalopodengattung Volborthella Schmidt. (Sep.-Abdr. a. d. Verhandlungen d. Russ.-Ksl. Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg Bd. 41.) St. Petersburg 1903.

— Ueber ein merkwürdiges Groruditgestein aus dem Transbaikal-Gebiete. (Sep.-Abdr. a. d. Verhandlungen . . . Bd. 41.) ebd. 1904.

Klein, C., Die Meteoritensammlung der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 21. Januar 1904. (Aus: Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1904.)

Kölliker, A., Die Entwicklung und Bedeutung des Glaskörpers. Leipzig 1904. (Sonderabdr. a.: Zeitschrift f. wissenschaftl. Zoologie 76.)

Kramář, Ph. C. Karl, Über die sumerisch-gruzinische Spracheinheit. Prag 1904.

Latch, E. B., Indications of the book of Job. Philadelphia 1880.

—, A review of the Holy Bible. ebd. 1885.

—, Indications of the first book of Moses called Genesis. ebd. 1890.

—, Indications of the book of Exodus. ebd. 1892.

—, Application of the Mosaic system of chronology. ebd. 1895. (2 Expl.)

—, The Mosaic system and the macrocosmic cross. ebd. 1897.

—, The Mosaic system and the Codex Argenteus. ebd. 1898.

Leyst, Ernst, Meteorologische Beobachtungen in Moskau i. J. 1900 i. J. 1901 i. J. 1902 i. J. 1903.

—, Die Halophänomene in Russland. Москва 1903. (Aus: Bull. de Moscou 1903.)

— Современныя задачи по изученію атмосфернаго электричества. Москва 1904. (Изъ Протоколовъ засѣданій Императ. Московск. Общ. Испыт. Прир. за 1903 г.)

Lichtenbergs Briefe. Hrsg. v. A. Leitzmann und C. Schüddekopf. 3. Bd. Leipzig 1904.

Lietzmann, Hans, Appollinaris von Laodicea und seine Schule. I. Tübingen 1904.

Light, The greater. (E. B. Latch, editor and proprietor.) Philadelphia Vol. 5 No. 3—12 1903—04 Vol. 6 No. 1. 2. 1904.

Lohest, M., A. **Habets** et H. **Forir**, La géologie & la reconnaissance du terrain houiller du nord de la Belgique. Liége 1904.

Marr, B., Der Baum der Erkenntnis. Dux 1904.

Mímir. Icelandic institutions with addresses 1903 & Supplement Copenhagen 1903.

Nature (Vol. 69—71) No. 1783—1835 London 1903—04.

Nernst, W., Theoretische Chemie. 4. Aufl. Stuttgart 1903.

Neumann, Luise, Franz Neumann. Tübingen u. Leipzig 1904.

Nicoladoni, Alexander, Moritz v. Schwind und seine Beziehungen zu Linz. (Sep.-Abdr. a. d. Unterhaltungsbeilage der Linzer „Tages-Post".) Linz 1904.

Nicolas, Ad., Spokil langue internationale grammaire — exercices — les deux dictionnaires. 1904.

Petersen, E., Comitium, Rostra, Grab des Romulus. Rom 1904.

Prokop, August, Kunstgeschichtliche Bilder aus Mähren. (Sond.-Abdr. a. d. Zeitschr. d. Oesterr. Ingen.- u. Archit.-Vereines 1902.)

Ramírez de Arellano, Rafael, La banda real de Castilla. Córdoba 1899.

Rapports de la Commission nommée par M. le Préfet d' Ille-et-Vilaine à l'effet d' étudier la salubrité des parcs ostréicoles de Cancale. Rennes 1904.

Reports, scientific, on the investigations of the cancer research fund. Under the direction of the R. College of physicians. No. 1 London 1904.

Revue historique 29. Ann. T. 84–86 Paris 1904.

Rodrigues, Campos, Corrections aux ascensions droites de quelques étoiles du Berliner Jahrbuch observées à Lisbonne (Tapada). (Abdr. a. d. Astr. Nachr. Bd. 159 1902.)

—, F. **Oom** et Teixeira **Bastos**, Observations d' éclipses de Lune à l'observatoire royal de Lisbonne (Tapada). (Abdr. a. d. Astr. Nachr. Bd. 165 1904.)

Rosenbusch, H., Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine. 4. Aufl. Bd. 1 Hälfte 1 Stuttgart 1904.

Schubert, Joh., Der Wärmeaustausch im festen Erdboden, in Gewässern und in der Atmosphäre. Berlin 1904.

Schuyten, M. C., Over de omzetting van zwavel in ijzer. Antwerpen 1904.

Spring, W., Sur la diminution de densité qu' éprouvent certains corps à la suite d'une forte compression et sur la raison probable de ce phénomène. Bruxelles 1903.

—, Sur la décomposition de quelques sulfates acides à la suite d'une déformation mécanique. (Aus: Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas et de la Belgique T. 23 (2. sér. t. 9) 1904.)

Teixeira, F. Gomes, Obras sobre mathematica. Publ. p. ord. do governo português. Vol. 1 Coimbra 1904.

Thesaurus linguae Latinae Vol. 1 fasc. 6 1903 fasc. 7 1904 Vol. 2 fasc. 7 1904. Index librorum scriptorum inscriptionum ex quibus exempla adferuntur. 1904.

— Bericht der Commission über die Münchener Conferenz. 1904.

Veronese, Giuseppe, Commemorazione del socio Luigi Cremona. (Aus: Rendiconti della R. Accademia dei Lincei Cl. di scienze fis., matem. e natur. Vol. 12, 2. sem., ser. 5, 1903.)

—, La laguna di Venezia. (Aus: Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti Anno acad. 1903—04 T. 63 p. 1.)

Vogel, H. C., Untersuchungen über das spectroskopische Doppelsternsystem β Aurigae. (Aus: Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1904.)

Zamponi, Ludwig, Zur Frage der Einführung einer internationalen Verkehrssprache. Graz 1904.

Ζήσιος, *Κωνσταντ. Γ., Ἔκθεσις τοῦ γλωσσικοῦ διαγωνισμοῦ τῆς ἐν Ἀθήναις γλωσσικῆς ἑταιρείας. Ἐν Ἀθήναις* 1904.

Bericht

über die öffentliche Sitzung am 11. November 1905.

Die K. Gesellschaft hielt am 11. November die in ihren Statuten vorgeschriebene öffentliche Sitzung zur Erinnerung an ihren Stifter, König Georg II., ab.

Herr W. Voigt las über „Arbeitshypothesen“.

Ueber Arbeitshypothesen.

Rede in der öffentlichen Sitzung der Königl. Ges. der Wissenschaften, am 11. Nov. 1905.

Von

W. Voigt.

„War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
Die mit geheimnißvoll verborgnem Trieb
Die Kräfte der Natur um mich enthüllen
Und mir das Herz mit stiller Freude füllen?"

Diese begeisterten Worte, mit denen Faust das Zeichen des „Erdgeistes" begrüßt, setzt Boltzmann als Motto über die Einleitung zum zweiten Theil seiner Vorlesungen über die moderne Theorie der Electricität und des Lichtes, deren bedeutungsvollste Erweiterung wir dem Genie des englischen Forschers Maxwell verdanken. Viele Leser werden ihm nachgefühlt haben, — hier liegen in der That Triumphe des Menschengeistes vor, die zu stolzer Freude stimmen.

Es war ein Großes, in dem Gesetz der allgemeinen Gravitation den sichern Leitfaden durch die Mannigfaltigkeit der himmlischen Erscheinungen und die Verknüpfung der Bewegung der Gestirne mit dem Fall des Steines auf der Erde zu finden, und unser anderer großer Dichter hat ein Wort des Preises für den schöpferischen Gedanken Newtons gefunden. Aber dort handelte es sich doch immer um Vorgänge aus einem sehr eng begrenzten Erscheinungsgebiete.

Die Electrodynamik der Gegenwart umfaßt dagegen in einem, wenige Zeilen füllenden Formelsystem alle Äußerungen der ruhenden, wie der bewegten Electricität, von dem einfachen Influenzproblem an, mit dem die Demonstrationen in der Schule beginnen, über die Gesetze der constanten Ströme mit ihren

wunderbaren magnetischen Wirkungen hinweg bis hinauf zu den Schwingungserscheinungen, in denen die electrischen und magnetischen Kräfte in harmonische Wechselbeziehungen treten, — sie umfaßt sie mit derartig minutiöser Genauigkeit, daß sie den Effect jeder beliebigen experimentellen Veranstaltung mit Sicherheit zahlenmäßig vorauszusagen vermag. Und daneben spricht sie die Gesetze der verschiedenartigsten optischen Erscheinungen aus, die durch Reflexion, Brechung, Interferenz, Beugung, Dispersion, Absorption, Polarisation entstehen, und die ebenso unser Auge durch ihre Farben- und Formenreize, wie unsere Phantasie durch die Anmuth und Eleganz der geometrischen Beziehungen entzücken, — sie spricht sie so umfassend und so bestimmt aus, daß die bloße Betrachtung ihrer Formeln wiederholt zur Voraussage noch nicht gesehener Erscheinungen geführt hat, die sich dann auch immer haben nachweisen lassen.

Das sind Resultate, die noch über die Newtonsche Gravitationstheorie hinausgehen, eine geistige Herrschaft über die Natur, deren Umfang und Tiefe sich dem Laien nur schwer ganz klar machen läßt, und es ist begreiflich, daß in den Reihen der Physiker das Hochgefühl, in einer großen Zeit ihrer Wissenschaft zu leben, sich mächtig regt, so mächtig, daß gelegentlich „der Becher überschäumt“.

Gerade dieses Überschäumen ruft die Kritik der Fernerstehenden hervor. Auch in weitere Kreise hinein dringen ja ab und an Nachrichten von neuen Anschauungen, die auftauchen, von der Nothwendigkeit, alte, lange festgehaltene Vorstellungen aufzugeben, und sie wecken den Zweifel an dem dauernden Bestand dessen, worauf wir stolz sind. Alles scheint in Fluß und Veränderung begriffen: warum soll nicht in Decennien die ganze Physik ein anderes Antlitz bekommen können, ebenso wie das jetzige weit verschieden ist von dem, was sie vor 30 oder 50 Jahren besaß.

Daß solche Fragen erhoben werden, beweisen auch die verschiedenen Abwehrversuche, die in der letzten Zeit erschienen sind. Unter ihnen nimmt ein kleines Buch des genialen französischen Mathematikers H. Poincaré „La Science et l'Hypothèse“, in dem die Rolle der Hypothesen in der Mathematik und der theoretischen Physik in lehrreicher und anziehender Weise geschildert wird, eine hervorragende Stellung ein. Ich möchte versuchen, von einem theilweise andern Standpunkt aus die Entwicklung gewisser hypothetischer Vorstellungen, die in der Physik eine große Rolle gespielt haben, und deren Wechsel, Auftauchen

und Verschwinden, dem Fernerstehenden den Eindruck eines unsichern Herumtastens erwecken könnte, zu schildern und die Bedeutung auseinanderzusetzen, welche dieser Wechsel factisch für die Wissenschaft besitzt.

Dabei werde ich mich jeder principiellen Erörterung über Nutzen oder Gefahren des Arbeitens mit Hypothesen enthalten. Die oberste Lehrmeisterin in der Naturwissenschaft ist die Beobachtung; das gilt nicht nur für die eigentlichen Gegenstände unserer Forschung, das gilt auch für die Methode der Forschung selbst. —

Die Wege, auf denen neue Gesetzmäßigkeiten gefunden worden sind, haben je nach der Eigenart des Problems und nicht weniger nach derjenigen des Forschers sehr verschiedenen Charakter gehabt. Aber zwei Typen lassen sich bei ihnen doch einigermaßen bestimmt sondern.

Der eine Weg enthält sich bestimmter Vorstellungen über den Mechanismus des Zustandekommens eines Vorganges durchaus, er operirt wesentlich mathematisch, insbesondere häufig auch geometrisch. Einige Beispiele werden ihn erläutern.

Die allgemeinsten Gesetze der Elasticität lassen sich gewinnen, wenn man den beliebig deformirten Körper gedanklich in elementare Parallelopipede zerlegt, deren Kleinheit gestattet, innerhalb jedes einzelnen von dem Wechsel des Deformationszustandes mit dem Orte abzusehen. Jedes solches Element wird dann als gleichförmig (nämlich wieder in ein Parallelopiped) deformirt angesehen, und für diese Deformation werden die einfachen Gesetze angewandt, welche die Erfahrung für einen solchen Fall gelehrt hat. Der Aufbau des beliebig deformirten, z. B. gebogenen oder gedrillten Körpers aus solchen Elementen ist dann eine rein mathematische Aufgabe.

Dieser Weg ist durch ein Minimum von willkürlichen Annahmen ausgezeichnet und darum vorzüglich; aber seine Anwendbarkeit ist beschränkt: er leistet nichts weiter, als die Reduction complicirter Vorgänge auf einfachere von genau derselben Art, über welche Erfahrungsthatsachen vorliegen. Er versagt also von vornherein, wo solche elementare Vorgänge fehlen oder der Beobachtung nicht zugänglich sind, — wie z. B. in weiten Gebieten der Electricitätslehre und der Optik — er kann auch nicht verschiedenartige Vorgänge durch neue Beziehungen verknüpfen lehren.

In dieselbe Kategorie von Entwickelungen gehört die Geschichte der Gleichung der Energie.

Die Mechanik lehrt, daß die Bewegung gewisser Massensysteme, die sich selbst überlassen sind, (wie z. B. in Annäherung des Planetensystems mit seinen Monden) so stattfindet, als habe das System zwei Gattungen von Vorräthen zu eigen, zwischen denen dauernd Austausche stattfinden. Der eine Theil dieses Besitzes hängt von den Geschwindigkeiten ab, der andere von den zwischen den Theilen des Systemes wirkenden Kräften. Bei der Bewegung nimmt der eine Vorrath jederzeit zu oder ab auf Kosten resp. zu Gunsten des andern; vergrößert sich der Geschwindigkeitsvorrath, so nimmt der Kraftvorrath ab und umgekehrt.

Die beiden Vorräthe zusammen stellen also ein unveränderliches Besitzthum des sich selbst überlassenen Systems dar, man nannte es seine (mechanische) Energie und bezeichnet die geschilderten Austausche als Umwandlungen von Geschwindigkeits- in Kraftenergie und umgekehrt.

Durch äußere Einwirkungen kann man die Summe beider Vorräthe, d. h. also die Energie des Systemes, vergrößeren oder verkleinern, aber auch bei der nunmehr geänderten Bewegung findet ein analoger wechselseitiger Austausch zwischen dem Geschwindigkeits- und Kraftvorrath statt, wie bei der ursprünglichen.

Dieses überaus anschauliche und elegante Gesetz war indessen auf solche rein mechanische Vorgänge beschränkt, die gewissen Voraussetzungen genügten, und man hob ehedem die Ausnahmen hervor, denen es unterliege.

Nun zeigte die Beobachtung, daß überall, wo das Gesetz in seiner geschilderten Form versagt, andere als mechanische Wirkungen auftreten, insbesondere thermische, electrische, magnetische, oder auch chemische. Die Einfachheit des ursprünglichen Gesetzes legte nahe, zu versuchen, ob nicht eine Erweiterung möglich wäre, die jene Abweichungen mit umfaßt. Es ist in der That gelungen, bei den genannten Vorgängen Beziehungen aufzufinden, welche sich auf das Bestehen von Vorräthen anderer Art (thermischer, chemischer, electrischer, magnetischer Energie) deuten lassen.

Die Veränderungen in diesen Systemen finden dann, wenn äußere Einwirkungen fehlen, so statt, daß ein Austausch zwischen den einzelnen Vorräthen, den verschiedenen Energiearten stattfindet, ohne daß die Gesammtsumme sich ändert. Bewegungsenergie kann in Wärme oder electrische Energie umgewandelt werden und umgekehrt, und die neu auftretenden Beträge lassen sich aus den verschwundenen quantitativ berechnen.

Äußere Einwirkungen vergrößern oder verkleinern demgemäß in letzter Instanz immer die Gesammtsumme aller Energien, da zwischen den verschiedenen Arten alle möglichen Austausche stattfinden können.

Hier haben wir also ein Verfahren, das ohne bestimmte Vorstellungen über die Art der Wechselwirkungen zur Kenntniß von Beziehungen zwischen verschiedenen Gattungen von Erscheinungen geführt hat. Aber die Methode ist auf nur wenig Fälle anwendbar gewesen und ihre Resultate geben meist auch nur einen kleinen Theil dessen, was wir wissen wollen. So sagt z. B. die Gleichung der Energie nichts darüber aus, welche Veränderungen in dem System bei bestimmten Umständen im Einzelnen wirklich eintreten, sie giebt nur eine Regel über ein Zahlenverhältniß, das zwischen gewissen Gesammteffecten, wenn dieselben eintreten, nothwendig stattfindet.

Die rein mathematischen Methoden erweisen sich hiernach als von beschränkter Wirksamkeit.

In der That kann es, Alles in Allem genommen, nicht zweifelhaft sein, daß die bei weitem größere Menge der in der theoretischen Physik erreichten Fortschritte mit Hülfe ganz bestimmter Vorstellungen über den Mechanismus des Geschehens gewonnen ist. Wir haben uns dieser Hilfsmittel in keiner Weise zu schämen. Der exacte Forscher und der schaffende Künstler sind nicht zwei völlig verschiedene Gattungen Mensch; zwischen den extrem einseitigen Begabungen eines Gauß und eines Beethoven ist ebenso ein stetiger Übergang vorhanden, wie zwischen den geistigen Kräften, welche Wissenschaft und Kunst in Bewegung setzen; die Phantasie, die in der Kunst herrschend ist, hat auch in der Wissenschaft ihre Bedeutung, ja man darf sagen, daß die meisten großen theoretischen Entdeckungen in unserer Wissenschaft unter starker Inanspruchnahme der Phantasie zu Stande gekommen sind. Es ist ja auch ganz begreiflich, daß der Mensch neue Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten leichter erräth, wenn er sich von einer Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges — hergenommen etwa von sichtbaren Vorgängen, deren Gesetze durch die Beobachtung festgestellt sind — leiten läßt, als wenn er nur die ungeheure Summe des überhaupt Möglichen erwägt.

Gewisse Ähnlichkeiten des zu untersuchenden Vorganges mit einem bekannten, am besten der unmittelbaren Anschauung zugänglichen, regen den Gedanken an, daß es sich in beiden Fällen um Verwandtes handeln möchte. Die Verfolgung dieser Analogie

fordert für den unbekannten Vorgang eine bisher nicht bemerkte Eigenschaft. Ihr Nachweis durch die Beobachtung verstärkt den Glauben an die betreffende Analogie, die nun als Arbeitshypothese zu weitergehenden Schlüssen verwerthet wird; neue Bestätigungen regen zu neuen Folgerungen an — so entsteht, was wir im engeren Sinne als die Theorie eines Erscheinungsgebietes bezeichnen.

Dabei mag ein wichtiger Punkt schon hier hervorgehoben werden. In allen Fällen betrifft die Analogie, auf der eine Theorie sich erbaut, nur einzelne Punkte, nicht genügend, um damit ein vollständiges Bild des Mechanismus des Vorganges zu formen, wie es zum lebendigen Anschauen des Geschehens und zur Ableitung neuer Gesetzmäßigkeiten erforderlich ist. Jederzeit fügt dann die Phantasie Bestandtheile hinzu, die das Bild zu einem lebendigen abrunden, zunächst der Regel nach unbewußt. Die Prüfung dieser Zusatzhypothesen drängt sich aber von selbst auf, sowie der erste Widerspruch zwischen den Folgerungen, zu denen das Analogiebild leitet, mit der Erfahrung sich geltend macht. Es bietet sich dann die Aufgabe, das Bild so zu corrigiren, daß dieser Widerspruch verschwindet, und die Vergleichung neuer Folgerungen mit der Erfahrung muß den Beweis liefern, daß die Ergänzung eine weitergehende Fruchtbarkeit hat. —

Kein anderes Erscheinungsgebiet hat der Theorie so viel Schwierigkeiten entgegengesetzt, wie das aus zwei getrennten jetzt in eines verschmolzene electrisch-optische; in keinem andern ist demgemäß auch die Entwicklung so lehrreich bezüglich der Rolle und des Werthes der Hypothesen. Wir wollen demgemäß eine kurze Skizze der Geschichte der Optik und der Electrodynamik, soweit sie für unser Problem in Betracht kommt, hier einfügen.

Die moderne Lichttheorie beruht auf einer kleinen Abhandlung, die der hochbegabte holländische Physiker Huyghens 1678 verfaßt und 1690 veröffentlicht hat. Hier ist die Hypothese, das Licht beruhe analog dem Schall auf der Fortpflanzung von Schwingungen eines elastischen Körpers, zum ersten Male bis in zahlreiche Consequenzen verfolgt. Als Gründe für diese Anschauungen führt der Verfasser neben der geläufigen Vorstellung, daß erhitzte und leuchtende Körper in rascher Bewegung befindliche Theilchen enthalten, insbesondere die Erfahrungsthatsachen an, daß mehrere Lichtstrahlungen sich ohne gegenseitige Störung durchkreuzen und daß die Geschwindigkeit der Fortpflanzung unabhängig von der Intensität des Lichtes ist, Beob-

achtungsthatsachen, für welche Analoga in dem Gebiet des elasti schen Stoßes vorhanden sind.

Das Medium, in dem sich die Licht-Schwingungen fortpflanzen, muß von den greif- und wägbaren Körpern verschieden sein, da auch der luftleere Raum die Lichtstrahlen durchläßt, während er dem Schall, der nachweisbar auf den Schwingungen der wägbaren Materie beruht, den Durchgang verwehrt. Es muß also außer der wägbaren Materie noch eine andere schwingungsfähige Substanz geben, die (um auch die evacuirten Räume erfüllen zu können) für Luft undurchlässige Wände zu durchdringen vermag; Huyghens überträgt auf sie den bereits vor ihm für derartige hypothetische Fluida angewandten Namen des Aethers.

Wir gehen nicht darauf ein, wie nach Huyghens die Elasticität überhaupt und speciell die Elasticität des Aethers zu Stande kommen soll, betonen aber, daß der mehrfach wiederkehrende Vergleich der Fortpflanzung des Lichtes mit der Ausbreitung eines Stoßes innerhalb eines Systemes sich einander berührender hochelastischer Kugeln annehmen läßt, daß Huyghens bei seiner Lichttheorie an periodische Schwingungen nicht gedacht hat und daß er die Stoßrichtung ausschließlich oder hauptsächlich in der Fortpflanzungsrichtung liegend gedacht hat.

Da der Aether die wägbare Materie durchdringt, so ist verständlich, daß auch die Lichtschwingungen dieselben zu durchsetzen vermögen. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist in den ponderabeln Körpern geringer als im freien Aether, vielleicht wegen der Umwege, die durch die eingelagerten Massentheile für die Schwingungen entstehen.

Es ist bekannt, daß Huyghens seine Hypothese auch auf die Erklärung der Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen, wie Kalkspath und Bergkrystall, angewendet hat. Er gelangte zu einer Deutung der — hauptsächlich von ihm selbst angestellten — Beobachtungen durch die Erweiterung seiner Grundvorstellung in dem Sinne, daß in diesen Körpern Stöße sich in jeder Richtung in zwei Antheilen mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Die verschiedenen Geschwindigkeiten erklärte er sich durch die Annahme, daß der eine Stoß sich nur durch den Aether, der andere auch durch die Krystalltheilchen fortpflanze.

Drei wichtige, Huyghens bereits bekannte Erscheinungen wollten sich seiner Theorie nicht fügen: die verschiedenen Farben, welche das Licht zeigen kann, die Interferenzen, singuläre Erscheinungen, insbesondere gegenseitige Schwächungen, die auftreten, wenn mehrere Lichtwellen auf dieselbe Stelle fallen,

endlich die Polarisation, jene merkwürdige Eigenschaft des aus einem doppelbrechenden Krystall austretenden Strahles, eine Verschiedenwerthigkeit der verschiedenen Querrichtungen zu zeigen, ähnlich einem rechteckigen Stab, der durch ein Gitter nur bei einer bestimmten Haltung hindurchgesteckt werden kann, während ein kreisrunder Stab dies bei jeder Haltung erlaubt.

Die Grundhypothese von Huyghens bedurfte demnach der Umgestaltung. Eine solche kam spät, da zeitweilig die ganze Undulationsvorstellung verdrängt war durch die von Newton ihr entgegengesetzte Emanations-Hypothese, welche die Lichterscheinungen auf die Ausstoßung kleiner Projectile aus der Lichtquelle zurückführte.

Den ersten wichtigen weiteren Schritt that, um 1750 etwa, Euler der die Analogie zwischen Licht und Schall weiter ausnutzte. Er betonte den Schwingungscharacter der fortgepflanzten Bewegungen und setzte die Tonhöhe, d. h. also die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde, in Parallele zu der Farbe, derart, daß die Schwingungen des violetten Endes des Spectrums schneller stattfinden, als die des rothen. Daß Licht verschiedener Farbe sich gleichzeitig ausbreiten kann, wurde durch die gleichzeitige Ausbreitung verschiedener Töne direct als möglich erwiesen.

In Anwendung der von Euler vervollständigten Vorstellungen gelang es etwa um 1800 Thomas Young, die Interferenzerscheinungen durch die Zusammenwirkung mehrerer Wellenbewegungen zu erklären und ihre Gesetze in meist überraschender Übereinstimmung mit der Erfahrung abzuleiten.

Bis hierher war der Grundgedanke von Huyghens nicht wesentlich verändert, nur sachgemäß ausgestaltet, die Analogie zwischen Schall und Licht vollständiger zur Geltung gebracht und fruchtbringend verwerthet. Aber diesem Schema wollten sich die Polarisationserscheinungen, deren inzwischen weitere entdeckt waren, nicht fügen. Beruhten die Lichtschwingungen so, wie die Schallschwingungen in Luft, auf Verschiebungen, die in der Richtung der Fortpflanzung, also longitudinal stattfinden, so war nicht einzusehen, wie bei einem Lichtstrahl ein Unterschied zwischen verschiedenen Querrichtungen bestehen könnte, die ja sämmtlich gleich liegen gegen Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtung.

Den hier nöthigen wichtigen Schritt, der eine überaus starke Modification der Huyghensschen Hypothese bezeichnet, that Fresnel in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts auf Grund geistvoller, mit Arago durchgeführter Experimente, aus

denen sich unzweideutig ergab: beruht das Licht auf Schwingungen, so liegen diese nicht parallel zur Fortpflanzungsrichtung, sondern senkrecht dazu, sind nicht longitudinal, sondern transversal.

Hiermit schien die Analogie zwischen Licht und Schall fast völlig zerstört zu sein, jedenfalls zeigten beide Vorgänge ganz wesentliche Unterschiede: Der Aether konnte sich offenbar nicht einer elastischen Flüssigkeit analog verhalten. Dieser Eindruck bewog Fresnel, für den Aether eine eigne Art „Elasticität" oder Pseudoelasticität anzunehmen, welche transversale Schwingungen und zwar nur solche gestattet. Mit einer außerordentlichen Genialität erfand er ein System von Eigenschaften, die man dem Aether beilegen müßte, um in ihm auch diejenige Art von complicirten Schwingungen zu ermöglichen, die nach seinen Untersuchungen bei Krystallen von complicirterer Natur (als den Huyghens bekannten) stattfinden.

Indessen erwies es sich wenige Jahre nach diesen epochemachenden Untersuchungen Fresnels, daß ein zwingender Grund, die Analogie zwischen Lichtschwingungen und elastischen Schwingungen aufzugeben, eigentlich nicht vorlag. Die Entdeckung der Transversalität der Lichtschwingungen führte zu einer genaueren Untersuchung auch der Schallschwingungen, und man erkannte, daß das Fortpflanzen von ausschließlich longitudinalen Schwingungen keine allgemeine Eigenschaft der elastischen Körper ist, sondern nur den Flüssigkeiten entspricht.

Es entstand um 1828 etwa die allgemeine Elasticitätstheorie, die bezeichnender Weise ursprünglich auch wieder auf einer ganz speciellen Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges, (nämlich derjenigen der wechselwirkenden Kräfte zwischen frei beweglichen Elementartheilchen) aufgebaut war. Diese Theorie, die sich bei allen Anwendungen gut bewährt hat, ergab, daß feste elastische Körper sowohl longitudinale, als transversale Schwingungen fortpflanzen; speciell liefern Krystalle innerhalb desselben Raumes eine longitudinale und zwei transversale Wellen mit im allgemeinen drei verschiedenen Geschwindigkeiten als möglich.

Hier eröffnete sich also die Möglichkeit, den von Fresnel abgerissenen Faden zwischen Elasticität resp. Akustik und Optik wieder anzuknüpfen, und eine ganze Reihe von Forschern, insbesondere Cauchy, Fr. Neumann, Mac Cullagh haben sich darum bemüht. Der Aether wurde dabei wie ein elastischer fester Körper, — innerhalb der Krystalle als selbst krystallinisch behandelt.

Die Schwierigkeit lag darin, daß die Theorie der Elasticität

zuviel gab. Einmal folgte aus ihr, wie gesagt, neben transversalen *die longitudinale* Welle, die nach den *Fresnel-Arago*schen Beobachtungen in der Optik nicht existirt, und sodann lieferte sie bei Krystallen für die Geschwindigkeiten der transversalen Wellen Gesetze, die der Erfahrung zwar nicht widersprachen, aber in dem Sinne allgemeiner sind, als die beobachteten, wie ein Ellipsoid eine allgemeinere Fläche ist, als die Kugel, die aus jenem erst hervorgeht, wenn man dessen drei Axen einander gleich macht.

Die Theorie war offenbar unvollständig, so lange nicht klargestellt war, *weshalb* die longitudinale Welle bei den Lichterscheinungen nicht entsteht, *warum* die Gesetze der Geschwindigkeit im Krystall jene einfachere Form besitzen. Die genauere Analyse zeigt; daß beide Fragen in einem gewissen Zusammenhang stehen.

Zwei Erklärungsversuche kommen insbesondere in Betracht. Die Schwierigkeit verschwindet einmal, wenn man dem Aether nicht nur die Elasticitätsverhältnisse fester Körper beilegt, sondern außerdem noch speciell eine *überaus geringe* Compressibilität, — ihn ähnlich etwa einem Gelée denkt, das bei fast völliger Incompressibilität doch leicht beweglich ist. Hier kommt eine longitudinale Welle, die stets mit Verdünnung und Verdichtung verbunden ist, practisch nicht zu Stande; schon die strahlenden Theilchen können keine Bewegung ausführen, die mit Dichtigkeitsänderungen des Aethers verknüpft wäre.

Die Schwierigkeit verschwindet aber auch, wenn man dem Aether unendlich leichte Compressibilität beilegt: denn hier erregt eine Bewegung des leuchtenden Theilchens, die eine Compression des Aethers veranlaßt, gar keine elastische Reactionskraft und demnach keine sich fortpflanzende Welle.

Man kann sagen, daß auf beide Weisen das Bild, welches der elastische feste Körper für den Aether lieferte, derartig vervollständigt war, daß es sich den bisher besprochenen Erfahrungen ungezwungen anschmiegte. Auch eine vielfältig hervorgehobene Schwierigkeit, welche das elastische Bild für den Vorgang der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier Medien auf den ersten Blick ergab, hat sich unter Benutzung der Überlegung, daß der Aether sich innerhalb der ponderabeln Körper befindet, also *die Lichtschwingungen in einem aus Aether und Materie gemischten Medium stattfinden*, m. E. befriedigend heben lassen. Selbst die ganz speciellen Erscheinungen, welche die sogenannten activen Krystalle liefern,

schienen sich mit der so erweiterten elastischen Theorie vereinigen zu lassen.

Doch lag noch eine große Schwierigkeit vor. Die elastische Theorie gab in der engsten Fassung überhaupt keine Dispersion des Lichtes, d. h. keine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Farbe; in der Erweiterung, welche die Eigenschaften eines aus Aether und Materie gemischten Systemes benutzte, lieferte sie zwar eine solche Abhängigkeit, aber viel specieller, als die Erfahrung. Und die Beobachtung hatte gerade hier eine derartig verwirrende Mannigfaltigkeit von Erscheinungen aufgedeckt, daß die Auffindung der allgemeinen Gesetze ohne den Leitfaden einer Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges unmöglich schien.

Ein solcher Leitfaden wurde durch die akustische Analogie nun zwar an die Hand gegeben. Die Beobachtung zeigte, daß die Dispersion eng verknüpft war mit der Absorption des Lichtes, daß insbesondere große und eigenartige Veränderungen der Lichtgeschwindigkeit in dem Bereich von denjenigen Farben liegen, die von dem Körper auswählend, d. h. besonders stark absorbirt werden. Und für den Vorgang der Absorption einzelner Farben gab sich ein Bild in der bekannten Erfahrung, daß eine Saite oder Stimmgabel aus einem Tongemisch denjenigen Ton herausgreift, auf den sie selbst gestimmt ist, durch ihn sich zum Schwingen anregen läßt, und, da zur Erhaltung dieser Schwingungen ein Aufwand nöthig ist, in dem Tongemisch diesen Ton andauernd schwächt.

Wenn sonach ein Körper von einem Lichtgemisch, das sich in ihm fortpflanzt, eine bestimmte Farbe auffallend schwächt, so verlangt diese Analogie, daß in ihm Gebilde vorhanden sind, die ähnlich einer gespannten Saite oder einer Stimmgabel, wie man sagt, Eigenschwingungen auszuführen vermögen, deren Schwingungszahlen der Substanz individuell sind, und die zu diesen Schwingungen durch die Lichtwelle angeregt worden.

Aber solche, der Substanz individuelle Eigenschwingungen kennt die Elasticitätslehre nicht: sie kennt nur Eigenschwingungen abgeschlossener Systeme, wie einer Claviersaite oder einer Stimmgabel, für deren Gesetz neben der Substanz auch Größe und Gestalt des Systemes wesentlich maßgebend sind.

Es giebt in der Elasticitätstheorie aber keine Eigenschwingung des Eisens, sondern dasselbe Eisen kann in verschieden gespannten Saiten, in verschieden großen Stimmgabeln oder Stäben alle möglichen Schwingungen ausführen.

Hier war denn eine neue wesentliche Loslösung der Vorstellung

von dem elastischen Bilde nöthig. Ein erster Versuch in dieser Richtung ist 1872 von Sellmeier gemacht worden; 1874 fand er eine Vervollständigung durch Helmholtz, der seine Vorstellungen in sehr präciser Form ausspricht, so daß es leicht ist, ihre Stellung zu der elastischen Theorie des Lichtes zu erkennen.

Helmholtz macht die Annahme, die er als „wohl der Wirklichkeit nicht ganz entsprechend, aber mechanisch unanstößig" bezeichnet, daß in den Molekülen „schwere centrale Massen festliegen, und kleinere bewegliche Theile gegen diese und gegen den Aether eine Gleichgewichtslage zu bewahren streben." Nach dieser Gleichgewichtslage hin werden die kleinen Theile mit einer dem Abstand proportionalen Kraft gezogen, und ihrer Bewegung wirkt eine Art Reibungskraft entgegen. Diese Systeme sind in dem Aether eingebettet, wie eine Anzahl von Stimmgabeln in den Luftraum, und wenn eine Lichtwelle den Aether in Schwingungen versetzt, werden die beweglichen kleinen Massen zur Resonnanz angeregt, die ihrerseits das Fortschreiten der Lichtwellen beeinflußt. Durch Verfolgung dieser Annahmen gewinnt Helmholtz ein Gesetz, das zugleich die auswählende Absorption und die Dispersion der Körper in allen untersuchten Fällen in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung dargestellt hat.

Was das Verhältniß der geschilderten Annahme zur elastischen Hypothese angeht, so sind der letzteren, wie gesagt, jene beweglichen kleinen Theile, die Eigenschwingungen ausführen können, durchaus fremd. Sie sind von Sellmeier und Helmholtz zur Gewinnung einer gewissen Folgerung vollständig willkürlich eingeführt, und, so bedeutend der dadurch erzielte Nutzen, die Ableitung eines höchst allgemeinen und bestens bestätigten Gesetzes auch ist, man wird den erreichten Standpunkt nicht als befriedigend betrachten können, so lange jene kleinen Massen, die in den ponderabeln Molekülen eine Art Planetensystem mit einer Centralsonne bilden, nicht von einer andern Seite wahrscheinlich gemacht, eventuell in einer andern Rolle wirksam gezeigt sind.

Diesen weiteren Schritt hat die elastische oder, — wie wir sie in weiterer Fassung lieber nennen — die mechanische Theorie des Lichtes zu thun nicht vermocht; es ist eine der Leistungen der electrischen Lichttheorie, die zu einem bestimmten Zweck gemachte Annahme mit ganz anderen Erfahrungs-Gebieten in Verbindung zu setzen und dadurch überraschend zu stützen.

Um zu verstehen, worum es sich hier handelt, brauchen wir

von der reichen Entwickelung der Electricitätslehre nur ganz wenige Etappen zu schildern. Auch in dieser Entwickelung spielt die Verwendung eines Bildes zur Veranschaulichung der Vorgänge eine große Rolle.

Länger, als sonst in der Physik Vorstellungen haben ungeändert festgehalten werden können, hat sich die Fluidumtheorie der Electricität fruchtbar erwiesen. Aus der Vorstellung, daß in anscheinend unelectrischen Körpern positives und negatives electrisches Fluidum in gleicher und practisch unerschöpflicher Menge vorhanden wäre, daß eine ausgeübte electrische Kraft eine Scheidung verursache, die in Leitern zu einer Bewegung des Fluidum von Massentheilchen zu Massentheilchen, in Nichtleitern zu einer solchen nur innerhalb der kleinsten Theile führe, haben sich die Gesetze der ganzen Electrodynamik Schritt für Schritt gewinnen lassen. Auch Maxwell ist von derselben Vorstellung ausgegangen, als er jenen wichtigen Schritt that, der die Electricitätslehre mit der Optik verknüpfte, und auf den im Eingang dieses Vortrages hingewiesen wurde.

Sein Verfahren ist ungemein merkwürdig. Wilh. Weber hatte bei dem Versuch, alle electrodynamischen Erscheinungen auf eine Elementarwirkung zwischen den einzelnen Theilchen der electrischen Fluide ebenso zurückzuführen, wie Newton alle Gravitationswirkungen auf Elementarkräfte zwischen den Theilchen der ponderabeln Materie, ein Gesetz gefunden, das für den damaligen Stand unserer Kenntnisse das Verlangte lieferte. Dies Gesetz ergab unter anderem die Folgerung, daß bei einer bestimmten relativen Geschwindigkeit zwei electrische Theilchen überhaupt keine Kraft aufeinander ausüben dürften. Gewisse Beobachtungen gestatteten eine (indirecte) Bestimmung dieser Geschwindigkeit, und Messungen, die Weber und Kohlrausch 1856 ausführten, ergaben jene „kritische" Geschwindigkeit angenähert gleich der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum; spätere Untersuchungen haben diese Uebereinstimmung noch vergrößert.

Von diesem Auftauchen einer optischen Constante in einem rein electrodynamischen Problem wurde Maxwell aufs tiefste angeregt. Dieser so genaue Zusammenhang konnte nicht zufällig sein, es mußte eine ganz directe Beziehung zwischen beiden Gebieten bestehen, das Licht mußte auf einem electrischen Vorgang beruhen. Die Kühnheit dieses Gedankens war um so größer, als die damalige Electrodynamik von der Vorstellung unvermittelter Fernkräfte beherrscht war, und ihre Formeln die

Möglichkeit zeitlicher Fortpflanzung von Schwingungen durch den leeren Raum oder andere Nichtleiter durchaus ausschlossen.

Aber Maxwell zeigte, daß es nur einer geringen Modification der alten Theorie bedurfte, die keines der früher aus ihr gefolgerten Resultate berührt, um sie für die neuen Anwendungen geeignet zu machen. Es ist bekannt, daß diese zunächst zur Erklärung der Lichterscheinung gemachte Erweiterung von H. Hertz auf electrodynamischem Gebiete bestätigt worden ist. Es gelang Hertz, mit rein electrischen Hülfsmitteln Schwingungen hervorzubringen, die in Allem und Jedem sich den Lichtschwingungen von sehr großer Wellenlänge analog verhielten. Die Zeit gestattet nicht, dies Alles näher zu schildern; es muß genügen, daß nach der neuen Vorstellung nicht der Aether selbst wie ein elastischer Körper schwingt, sondern in jedem Raumelement, enthalte dies nun nur Aether oder Aether und Materie, ein Fremdes, sagen wir die electrischen Fluida, bei gegebener Anregung Bewegungen ausführen und auf die Umgebung übertragen, also fortpflanzen.

So war eine neue Theorie des Lichtes begründet, die der elastischen vielfach parallel ging, aber den ungemeinen Vortheil hatte, des Hypothetischen viel weniger zu erfordern; wir brauchen ja die Hertzschen electrischen Schwingungen, die wir mit größter Sicherheit hervorzubringen vermögen, nur in mikroscopische Dimensionen verkleinert zu denken, um Lichtschwingungen mit allen ihren Eigenschaften zu erhalten. Die Brücke von den Schwingungen eines elastischen Körpers zu den Lichtschwingungen dagegen war auf Hülfshypothesen von zum Theil etwas künstlicher Art gestützt.

Aber diese Maxwellsche electrische Lichttheorie glich der elastischen in dem einen fatalen Punkte, daß sie keine Farbenzerstreuung, keine Abhängigkeit der Geschwindigkeiten von der Wellenlänge des Lichtes ergab. Hier mußte also eine analoge Hypothese zu Hülfe genommen werden, wie die von Sellmeier und Helmholtz in die mechanische Lichttheorie eingeführte. Um Theile zu erhalten, die, Stimmgabeln gleich, für sich allein bestimmte Eigenschwingungen auszuführen vermochten, mußte man auch hier die Existenz sehr kleiner Massen annehmen, die an die ponderabeln Moleküle gebunden sind, ähnlich wie Planeten an eine Centralsonne. Daß sie electrische Ladungen tragen mußten, gab sich nach der Grundlage der neuen Theorie von selbst, — aber daß man ihre wirkliche Existenz einmal würde durch andere Wir-

kungen nachweisen können, erschien ebenso wenig wahrscheinlich, wie bei der alten rein mechanischen Vorstellung.

Hier hat nun die Entwickelung der allerletzten Jahre eine wahrhaft wundervolle Lösung der alten Schwierigkeit geliefert.

Verschiedene Beobachtungen drängten dazu, die Electricität, statt als eine continuirliche Flüssigkeit, molekular, d. h. in einzelnen äußerst kleinen Elementartheilchen, ca. 1000 Mal kleiner als das kleinste bekannte chemische Atom, bestehend aufzufassen. Der electrische Strom in den Leitern stellte sich dann dar als ein Dahingleiten dieser sogenannten Electronen zwischen den Molekülen der Materie, und bei der Bewegung der Electricität in sehr hoch evacuirten Räumen hatte man die Electronen nahezu frei vor sich, konnte ihre Bewegungen unter der Einwirkung magnetischer und electrischer Kräfte studiren, ihre Massen, ihre Geschwindigkeiten bestimmen.

Aehnliche Kräfte konnte man aber auch auf die hypothetischen Helmholtz schen Körperchen ausüben und deren Wirkung, wie Zeemann gezeigt hat, auf optischem Wege erkennen; diese Versuche haben gezeigt, daß jene Körperchen nach ihren Eigenschaften mit den freien Electronen identisch sind, so daß nun wirklich die gewünschte Bethätigung derselben auf einem andern Gebiete zuverlässig erwiesen ist. Der Ring hat sich auf das schönste geschlossen. —

Werfen wir nunmehr einen Rückblick auf den Weg, den die theoretische Optik bis zu ihrer Verbindung mit der Electronenlehre genommen hat, so sehen wir an ihrer Entwickelung alle die characteristischen Eigenschaften, auf die im Voraus aufmerksam gemacht worden war. Gewisse zuerst auffallende Merkmale der Fortpflanzung des Lichtes zeigen die Analogie zu der Ausbreitung von Stößen in einem elastischen Medium; damit ist ein erster leitender Gesichtspunkt gegeben, von dem aus bekannte Erscheinungen sich gesetzmäßig fassen ließen. Aber die erste Fassung führte nicht weiter. Es bedurfte der Zufügung immer neuer Züge zu dem verfolgten Bilde um neue Erscheinungsgebiete zu umfassen. Diese Züge waren so zu wählen, daß die Beherrschung der zuvor eroberten nicht verloren ging. Allmählich lockert sich der Zusammenhang mit der Vorstellung, die den Ausgangspunkt der Entwickelung gebildet hatte; der Aether wird den elastischen Körpern immer unähnlicher, bei den ponderabeln Massen drängen sich Eigenschaften auf, die mechanisch nicht deutbar sind. Schließlich entscheiden gewisse nummerische Beziehungen, welche die electrische Deutung der Lichterscheinungen verlangt und die Erfahrung bestätigt, für die letztere. —

War nun jede der Vorstufen unserer jetzigen Auffassung ein Irrthum? Ja und nein. Ja, insofern in den früheren Bildern neben den Zügen, die wirklichen Eigenschaften entsprechen, andere waren, die, in Ermangelung der bezüglichen Kenntnisse, unsere Phantasie hinzudichten mußte, um das Bild so zu vervollständigen, daß es wirklich faßbar und verwendbar war, und die sich später als hinderlich, nämlich der Wirklichkeit nicht entsprechend, erwiesen haben. Nein, insofern die richtigen Züge bedeutungsvoll genug waren, um die Ableitung neuer Gesetzmässigkeiten und somit einen Fortschritt in der Entwickelung unserer Kenntnisse zu ermöglichen.

Wir sind froh und stolz über das jetzt erreichte Ziel, und dennoch giebt es nicht Wenige, die glauben, daß auch das jetzt geltende Bild noch Züge besitzt, die uns auf falsche Wege weisen. In der Theorie der Einwirkung der Bewegung eines Körpers auf seine optischen Eigenschaften will noch nicht Alles stimmen; man vermag die Widersprüche mit Hülfshypothesen eben noch auszugleichen; aber solche nur für einen einzigen Zweck gemachte Annahmen sind wenig befriedigend, so lange sie nicht durch den Nachweis, daß andere aus ihnen fließende Folgerungen der Erfahrung entsprechen, gestützt werden. Hier kündigen sich neue Wandelungen an, und wer will behaupten, daß in einigen Decennien auch nur die allgemeinen Vorstellungen von Aether und von Electronen sich noch werden halten lassen? —

Nach dem Gesagten ist es vollständig einleuchtend, daß der Werth der Arbeitshypothesen, d. h. also der Bilder, die wir uns von dem Mechanismus eines Vorganges machen können, von verschiedenen Autoren sehr verschieden bemessen wird. Ja, es darf uns nicht wundern, wenn derselbe Autor verschiedenen Erscheinungsgebieten gegenüber sich gelegentlich verschieden verhält.

Bekannt ist das Wort von H. Hertz, daß er auf die Frage „Was ist die Maxwellsche Theorie der Electricität“ keine kürzere und bestimmtere Antwort wisse, als die: „Die Maxwellsche Theorie ist das System der Maxwellschen Gleichungen“ und characteristisch ist seine Ausführung, daß man zwar durch concrete sinnliche Vorstellungen der Einbildungskraft zu Hilfe kommen könne, daß es sich dabei aber nur um ein buntes Gewand handele, welches wir der Theorie überwerfen, und dessen Schnitt und Farbe vollständig in unserer Hand liege.

Geringschätziger hat wohl Niemand über die Rolle hypothetischer Vorstellungen in der Theorie gesprochen. (Und doch erachtet es Hertz in seiner Mechanik als einen Fortschritt, den

Kraftbegriff durch die Annahme zu eliminiren, jedes Massensystem enthalte außer den uns sichtbaren Massen und Bewegungen noch unsichtbare!)

Einen ganz entgegengesetzten Standpunkt als Hertz gegenüber der Maxwellschen Theorie nimmt u. A. Planck ein. Der Austausch, der nach früher Erörtertem zwischen Energien verschiedener Art (mechanischer, thermischer, chemischer, electrischer) möglich ist, scheint ihm auf eine Wesensgemeinschaft aller Erscheinungsgebiete hinzudeuten, und daraus erwächst ihm als letztes Ziel der Theorie die Aufstellung eines Bildes, das durch Vorgänge von einer einzigen Art alle Gattungen von wahrnehmbaren Veränderungen zu erklären gestattet. Hier gewinnt das Bild also eine ganz ungeheure Bedeutung.

Läßt Planck die Art des elementaren Vorganges zunächst unbestimmt, so vertritt Lord Kelvin mit dem ganzen Gewicht seiner eminenten Persönlichkeit den uralten Gedanken, daß das letzte Ziel der Theorie eine Zurückführung aller Erscheinungen auf mechanische Vorgänge sei; demgemäß bietet sich ihm für alle möglichen Prozesse ein mechanisches Modell, und er erklärt (von seinem Standpunkt aus consequenter Weise) die ganze electrische Lichttheorie für einen zweifelhaften Fortschritt und einen unzweifelhaften Umweg, da man schließlich doch vor die Aufgabe gestellt würde, die electrischen Vorgänge selbst mechanisch zu erklären.

Diese Verschiedenheit darf nicht Wunder nehmen; sie hängt zusammen mit der Verschiedenheit der Organisation des menschlichen Geistes, und man wird es in der Wissenschaft, wie in der Kunst, im Interesse reicher und mannigfaltiger Entwickelung nur begrüßen, daß es für deren Ziele keine starre Formel giebt.

Immerhin macht die Erscheinung nachdenklich, daß eine Reihe, vielleicht die Mehrzahl großer Fortschritte in unserer Wissenschaft gerade Männern gelungen ist, die an das Bild, das sie sich von dem Geschehenen gemacht hatten, mit naiver Festigkeit glaubten. Aus diesem Glauben erwuchs ihnen die liebevolle Vertiefung in die Vorstellung, die allein sie zu Folgerungen leitete, welche neue Gesetze enthielten. Es ist mir unvergeßlich, wie den genialen holländischen Forscher Van der Waals, der aus der Hypothese der molekularen Constitution der Materie eine Fülle neuer Gesetzmäßigkeiten erschlossen hat, die Anzweifelung gewisser Züge des von ihm benutzten Bildes tiefstens erregte, nicht anders, als wäre ein Theil eines religiösen Glaubens angetastet.

Hier liegen Beziehungen vor, die wohl geeignet sind, zu Gedanken anzuregen. Sind doch alle Weltanschauungen, von dem Systeme der Philosophen bis zu den Glaubenssatzungen der Kirchen, Arbeitshypothesen, ähnlich den vorhin betrachteten, Bilder der Welt, deren Zweck ist, einerseits die Welt begreifen zu helfen, andrerseits sich fruchtbar zu erweisen. Auch hier lehrt die Geschichte, daß die großen Wirkungen, die der Hebung der Cultur zu Gute gekommen sind, nicht von Denen ausgegangen sind, deren Arbeitshypothese die feinst ausgefeilte war, sondern von Denen, die sich ihrer Weltanschauung mit der größten Inbrunst hingegeben haben.

Noch täglich entspringen mächtige und segensreiche Wirkungen aus Weltanschauungen, die uns naturwissenschaftlich Gebildeten unannehmbar sind; ja, man darf vielleicht behaupten, daß auf unserer Seite eher ein Minus, als ein Plus von Opferwilligkeit und Gemeinsinn zu verzeichnen ist, verglichen mit der gegnerischen Seite.

Unsere Wissenschaft, — die sich das tiefsinnige Wort „an ihren Früchten sollt ihr sie erkennen" in weitem Umfange seiner Bedeutung angeeignet hat und die auch eine befremdende physikalische Arbeitshypothese gelten läßt, wenn sie nur wirkliche Fortschritte der Erkenntniß zeitigt, — sie lehrt uns, auch bei der Beurtheilung der Erscheinungen des Lebens die Art der Weltanschauungen wenig zu beachten neben den Früchten, die aus ihnen erwachsen.

Es ist vielleicht angemessen, hieran in einer Zeit zu erinnern, wo der Streit um die Weltanschauung eine ungeahnte und unnöthige Schärfe angenommen hat, und wo gelegentlich selbst unter der Flagge der Freiheit die Intoleranz kämpft. Auch die Erscheinung, daß bedeutende und verdiente Forscher eine leidenschaftliche öffentliche Propaganda für ihre Arbeitshypothese mit heftigen, ja vielfältig ungerechten Angriffen auf andere Anschauungen verbinden und damit eine lange nachzitternde Erregung hervorrufen, fordert dazu auf zu erklären, daß dies im Grunde wenig wissenschaftlich gedacht und gehandelt ist.

Komme ich damit zu dem Ueberschäumen des Bechers zurück, von dem ich im Eingang meines Vortrages sprach, so darf ich auch wohl an die Veranlassung derartiger Erscheinungen erinnern. Es rührt sich ein mächtiges Leben und Schaffen im ganzen Gebiete der physischen Wissenschaften; mit unermüdlicher Zähigkeit werden die alten Probleme weiter geschoben, mit Begeisterung die neuen in Angriff genommen. Viele Versuche des Fort-

schrittes verlaufen vergeblich, aber keine treue Arbeit ist völlig unnützlich. Und das Arbeitsgebiet, das vor Jahren der Erschöpfung entgegenzugehen schien, erweitert sich schier unermeßlich, — überall sprießen Probleme, die Herrlichstes versprechen.

„Es ist eine Lust, zu leben!“

